

(no title)

Ingo Blechschmidt

12. Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

0.1	Hausaufgaben	3
0.1.1	1. Hausaufgabe	3
0.1.2	2. Hausaufgabe	4
0.1.3	3. Hausaufgabe	5
0.1.4	4. Hausaufgabe	7
0.1.5	5. Hausaufgabe	7
0.1.6	6. Hausaufgabe	8
0.1.7	7. Hausaufgabe	9
0.1.8	8. Hausaufgabe	10
0.1.9	9. Hausaufgabe	10
0.1.10	10. Hausaufgabe	11
0.1.11	11. Hausaufgabe	12
0.1.12	12. Hausaufgabe	14
0.1.13	13. Hausaufgabe	14
0.1.14	14. Hausaufgabe	14
0.1.15	15. Hausaufgabe	15
0.1.16	18. Hausaufgabe	16
0.1.17	19. Hausaufgabe	17
0.1.18	20. Hausaufgabe	18

0.1.1921. Hausaufgabe	19
0.1.2022. Hausaufgabe	20
0.1.2123. Hausaufgabe	20
0.1.2224. Hausaufgabe	21
0.1.2325. Hausaufgabe	21
0.1.2426. Hausaufgabe	21
0.1.2527. Hausaufgabe	22
0.1.2628. Hausaufgabe	22
0.1.2729. Hausaufgabe	23
0.1.2830. Hausaufgabe	23
0.1.2931. Hausaufgabe	24
0.1.3032. Hausaufgabe	24
0.1.3133. Hausaufgabe	25
0.1.3234. Hausaufgabe	25
0.1.3335. Hausaufgabe	25
0.1.3436. Hausaufgabe	26
0.1.3537. Hausaufgabe	26
0.1.3638. Hausaufgabe	27
0.1.3739. Hausaufgabe	28
0.1.3840. Hausaufgabe	28
0.1.3941. Hausaufgabe	29
0.1.4042. Hausaufgabe	30
0.1.4143. Hausaufgabe	30
0.1.4244. Hausaufgabe	32
0.1.4345. Hausaufgabe	33
0.1.4446. Hausaufgabe	34
0.1.4547. Hausaufgabe	35
0.1.4648. Hausaufgabe	37
0.1.4749. Hausaufgabe	38

0.1.4850. Hausaufgabe	39
0.1.4951. Hausaufgabe	39
0.1.5052. Hausaufgabe	40
0.1.5153. Hausaufgabe	41
0.1.5255. Hausaufgabe	41
0.1.5356. Hausaufgabe	42
0.1.5457. Hausaufgabe	44
0.1.5558. Hausaufgabe	44
0.1.5659. Hausaufgabe	45
0.1.5760. Hausaufgabe	47
0.1.5861. Hausaufgabe	48
0.1.5962. Hausaufgabe	50
0.1.6063. Hausaufgabe	51
0.1.6164. Hausaufgabe	51
0.1.6265. Hausaufgabe	52

0.1 Hausaufgaben

0.1.1 1. Hausaufgabe

Buch Seite 20, Aufgabe 3a

Bestimme die Steigung und die Geradengleichung, wenn der Abschnitt t auf der y -Achse und ein Punkt P gegeben sind!

$$t = -1; P(-2; 5);$$

$$5 = -2m - 1;$$

$$\Rightarrow 2m = -6; \Rightarrow m = -3;$$

$$\Rightarrow f : x \mapsto y = -3x - 1;$$

Buch Seite 20, Aufgabe 4a

Wie lautet die Gleichung der Geraden PQ ? Welche Steigung hat sie? Berechne den Neigungswinkel auf $0,01^\circ$ genau!

$$P(2; 2); Q(4; 6);$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} 2 &= 2m + t; \implies t = 2 - 2m; \\ 6 &= 4m + t; \implies t = 6 - 4m; \end{aligned} \right\} \implies 2 - 2m = 6 - 4m; \implies 2m = 4; \implies \\
& m = 2; \\
& \implies t = 2 - 2 \cdot 2 = -2; \\
& \implies f : x \mapsto y = 2x - 2; \\
& \arctan 2 \approx 63,43^\circ
\end{aligned}$$

Buch Seite 20, Aufgabe 7a

Zeige, dass g_1 und g_2 aufeinander senkrecht stehen!

$$\left. \begin{aligned} g_1 : x \mapsto y &= 2x + 3; \implies m_1 = 2; \\ g_2 : x \mapsto y &= -\frac{1}{2}x - 7; \implies m_2 = -\frac{1}{2}; \end{aligned} \right\} \implies m_1 \cdot m_2 = 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1;$$

0.1.2 2. Hausaufgabe**Zettel, Aufgabe 52**

$$h_t(x) = -tx + t; t \in \mathbb{R}; \mathbb{D}_{h_t} = \mathbb{R};$$

a) Zeige, dass alle Graphen der Schar eine gemeinsame Nullstelle haben.

$$\begin{aligned}
-tx + t &= 0 \\
t \cdot (1 - x) &= 0 \\
1 - x &= 0 \\
1 &= x \\
\Rightarrow N(1; 0)
\end{aligned}$$

b) Bestimme den Inhalt der Dreiecksfläche, die von der y -Achse und zwei zueinander senkrechten Schargeraden begrenzt ist.

$$\begin{aligned}
l_t(x) &= \frac{1}{t}x - \frac{1}{t}; \\
\implies A(t) &= \frac{1}{2} \cdot |h_t(0) - l_t(0)| \cdot 1 = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left| t + \frac{1}{t} \right| = \left| \frac{t^2 + 1}{2t} \right|;
\end{aligned}$$

c) Für welches t schließt die Schargerade mit der y -Achse einen Winkel von 30° ein?

$$\begin{aligned}
m_{h_t} &= \tan \frac{\pi}{3} \\
-t &= \tan \frac{\pi}{3} \\
t &= -\tan \frac{\pi}{3} \\
t &= -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

0.1.3 3. Hausaufgabe**Zettel, Aufgabe 58**

$$f_t(x) = tx + 2\sqrt{t^2 + 1}; \mathbb{D}_{f_t} = \mathbb{R}; t \in \mathbb{R};$$

- a)** Für welches t ist der Graph parallel zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten? Zeichne den Graphen!

$$\begin{aligned} tx &= x \\ t &= 1 \end{aligned}$$

- b)** Für welches t ist der Graph senkrecht zu einer Geraden mit der Gleichung $y = 2x + 333$?

$$\begin{aligned} tx &= -\frac{1}{2}x \\ t &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- c)** Welche Graphen der Schar schließen mit der x -Achse einen Winkel von 60° ein?

$$\begin{aligned} tx &= \tan \frac{\pi}{3} \cdot x \\ t &= \sqrt{3} \text{ sowie } -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{\pm\sqrt{3}}(x) = \pm\sqrt{3}x + 4;$$

- d)** Bei welchen t -Werten sind die Nullstellen vom Ursprung $2\sqrt{2}$ entfernt?

$$d = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 0 &= td + 2\sqrt{t^2 + 1} \\ -td &= 2\sqrt{t^2 + 1} \\ t^2 d^2 &= 4t^2 + 4 \\ t^2(d^2 - 4) &= 4 \\ t^2 &= \frac{4}{d^2 - 4} \\ t &= 2\frac{\sqrt{d^2 - 4}}{d^2 - 4} \\ t &= \pm 1 \end{aligned}$$

- e)** Welche Stellen der x -Achse sind keine Nullstellen von Schargen?

$$\text{Nullstelle: } tx + 2\sqrt{t^2 + 1} = 0; \Rightarrow x(t) = -2\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t};$$

Auflösen nach t :

$$t = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 4}}; \Rightarrow \mathbb{D}_t = \mathbb{W}_x = \mathbb{R} \setminus [-2; 2];$$

- f)** Bestimme die Entfernung d , die die beiden Achsenabschnittpunkte der Geraden zum Parameterwert $t = 5$ haben.

$$P\left(-2\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}; 0\right);$$

$$Q(0; f_t(0)) = Q(0; 2\sqrt{t^2+1});$$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{P_x^2 + Q_y^2} = \\ &= \sqrt{4\frac{t^2+1}{t^2} + 4t^2 + 4} = \\ &= 2\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2} + t^2 + 1} = \\ &= \sqrt{4\frac{26}{25} + 104} = 2\sqrt{\frac{26}{25} + 26} = 2\sqrt{\frac{676}{25}} = 2\frac{26}{5} = \frac{52}{5}; \end{aligned}$$

- g)** Bestimme die Entfernung der Achsenabschnittpunkte einer Schargeraden allgemein.

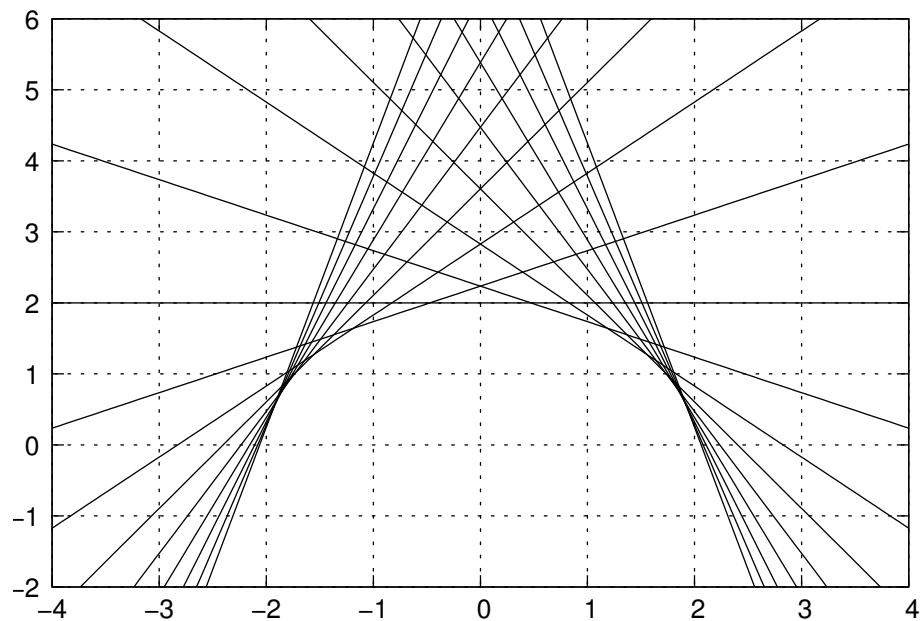
Siehe f)

- h)** Für welches t beträgt die Entfernung der Achsenabschnittpunkte genau 4?

$$\begin{aligned} 4 &= \sqrt{4\frac{t^2+1}{t^2} + 4t^2 + 4} \\ 16 &= 4\frac{t^2+1}{t^2} + 4t^2 + 4 \\ 10 &= 4\frac{t^2+1}{t^2} + 4t^2 \\ 10t^2 &= 4t^2 + 4 + 4t^4 \\ 0 &= 4t^4 - 6t^2 + 4 \\ 0 &= 4u^2 - 6u + 4 \end{aligned}$$

$$D_u = 36 - 4 \cdot 4 \cdot 4 < 0 \implies \mathbb{L}_t = \{\}$$

- i)** Zeichne die zu $t \in \{0; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{1}{2}; \pm 1; \pm 2; \pm 4\}$ gehörenden Graphen (Anm.: Ich habe für t Werte von -2 bis $+2$ mit einer Schrittweite von $0,1$ genommen).



0.1.4 4. Hausaufgabe

Zettel, Aufgabe 58g

Siehe 3. Hausaufgabe.

0.1.5 5. Hausaufgabe

Zettel, Aufgabe 58i

Siehe 3. Hausaufgabe.

Zettel, Aufgabe 56

Die Geraden einer Schar haben folgende Eigenschaft:

Die Koordinatenachsen und eine Schargerade bestimmen jeweils ein rechtwinkliges Dreieck im ersten Quadranten mit dem Flächeninhalt $A = 8$.

a) Bestimme die Scharfunktionen f_t .

$$f_t : x \mapsto -tx + td;$$

$$a : x \mapsto td;$$

$$-tx + td = 0; \implies d = x; \implies b : x \mapsto d;$$

$$\frac{1}{2}tdd = A; \implies d^2 = \frac{2A}{t}; \implies d = \frac{\sqrt{2At}}{t};$$

$$f_t : x \mapsto -tx + \sqrt{2At};$$

b) Welche Nullstelle hat f_t ?

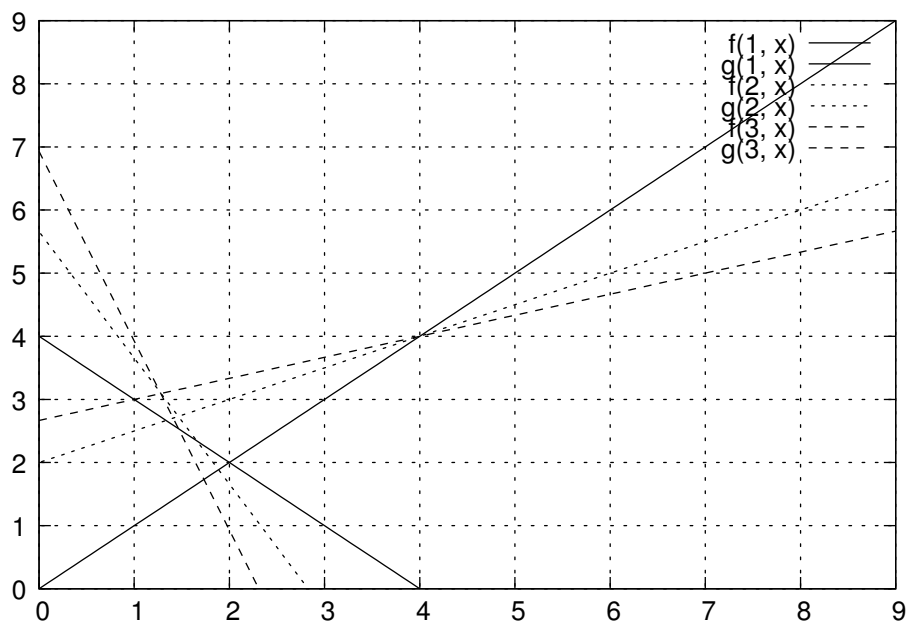
Siehe a) (Variable d)

c) Bestimme die Schar der Funktionen g_t , deren Graphen durch $(4; 4)$ verlaufende Geraden sind; dabei soll G_{g_t} auf G_{f_t} senkrecht stehen.

$$g_t : x \mapsto \frac{1}{t}x + c;$$

$$\frac{1}{t} \cdot 4 + c = 4; \implies c = 4 - \frac{4}{t};$$

$$g_t : x \mapsto \frac{1}{t}x + 4 - \frac{4}{t};$$



0.1.6 6. Hausaufgabe

Buch Seite 20, Aufgabe 9

Gegeben ist die Geradenschar $g_k : kx - y + 3 - k = 0; k \in \mathbb{R};$

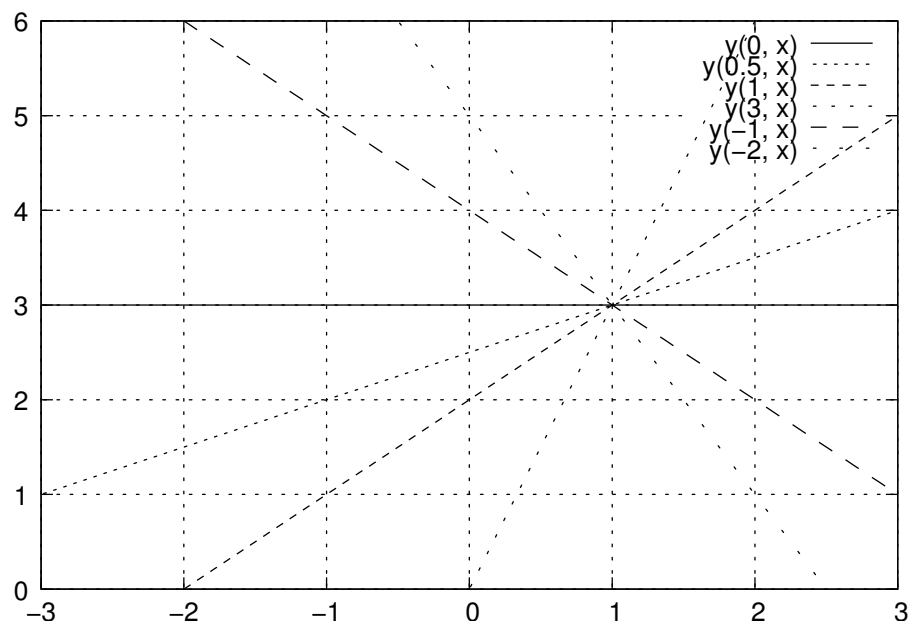
(1)

Zeige, dass der Punkt $P(1; 3)$ allen Geraden der Schar gemeinsam ist und daher ein **Geradenbündel** vorliegt!

$$\begin{aligned} kx - y + 3 - k &= 0 \\ k - 3 + 3 - k &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

(2)

Zeichne $g_0, g_{0,5}, g_1, g_3, g_{-1}$ und g_{-2} !

**(3)**

Welche Gerade durch P wird von der Gleichung g_k nicht erfasst?

$$x = 1;$$

0.1.7 7. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

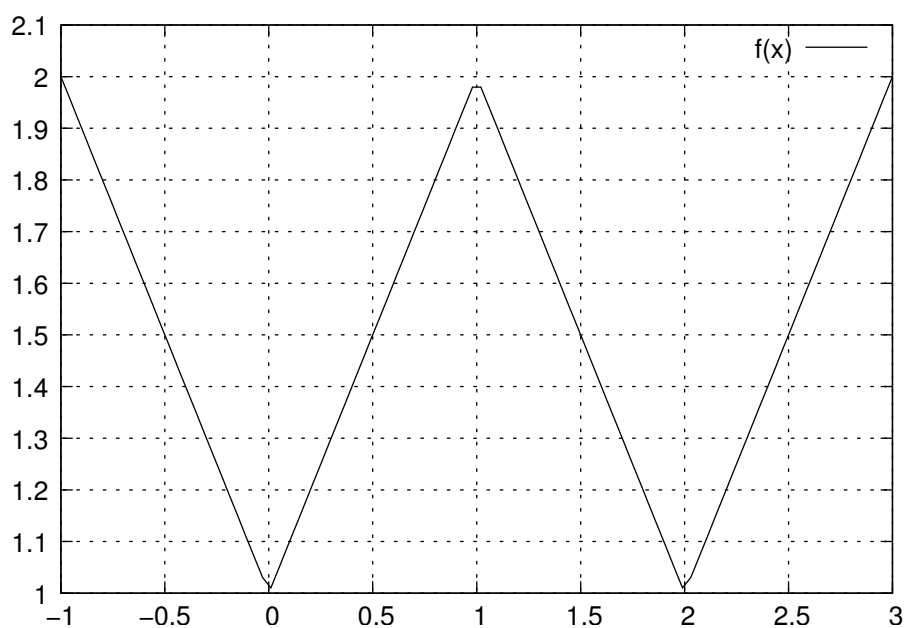
Gib die betragsfreie Form der Funktion $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ an!

$$\begin{aligned}
 f(x) &= |x+1| + |x-1| = \\
 &= \begin{cases} -2x & \text{für } x < -1; \\ 2 & \text{für } -1 \leq x < 1; \\ 2x & \text{für } x \geq 1; \end{cases}
 \end{aligned}$$

0.1.8 8. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

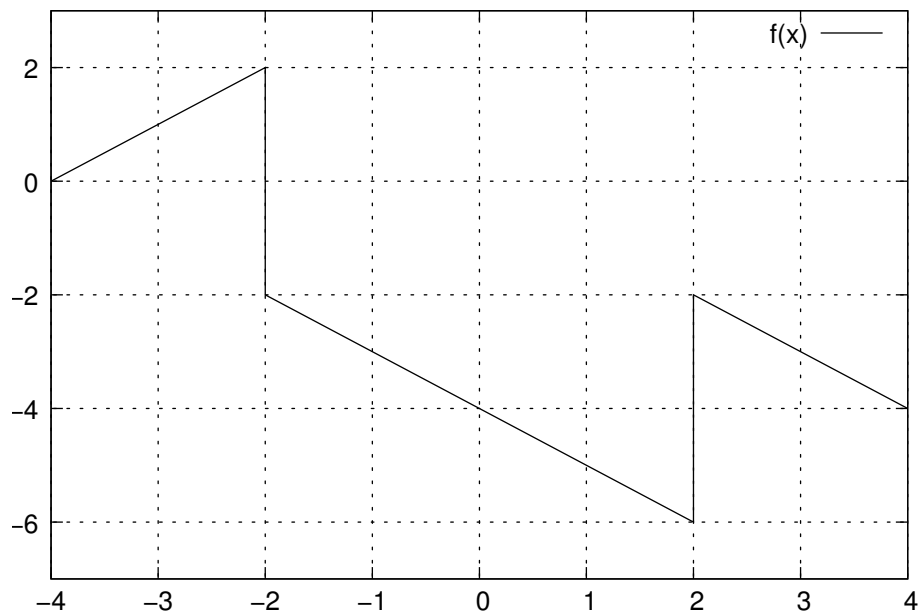
$$\begin{aligned}
 f(x) &= |x| - |x-1| + |x-2| = \\
 &= \begin{cases} -x + x - 1 - x + 2 = -x + 1 & \text{für } x \leq 0; \\ +x + x - 1 - x + 2 = x + 1 & \text{für } 0 < x \leq 1; \\ +x - x + 1 - x + 2 = -x + 3 & \text{für } 1 < x \leq 2; \\ +x - x + 1 + x - 2 = x - 1 & \text{für } x > 2; \end{cases}
 \end{aligned}$$



0.1.9 9. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2 \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 4) - |x + 2| = \\
 &= \begin{cases} 4 + x & \text{für } x < -2; \\ 0 & \text{für } x = -2; \\ -4 - x & \text{für } -2 < x < 2; \\ -4 & \text{für } x = 2; \\ -x & \text{für } x > 2; \end{cases}
 \end{aligned}$$



0.1.10 10. Hausaufgabe

Buch Seite 22, Aufgabe 2

Bestimme die Nullstellen folgender Funktionen:

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x = x \cdot (x^2 - 3x + 1) = x \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$

$$\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}; x_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2};$$

c) $\left. \begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^2 + 4; \\ x^2 &= u; \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = u^2 - 5u + 4; \Rightarrow u_1 = 1; u_2 = 4;$

$$\Rightarrow x_1 = -2; x_2 = -1; x_3 = 1; x_4 = 2;$$

Buch Seite 22, Aufgabe 6

Wo liegt der Scheitel der Parabel, wo sind die Funktionswerte negativ?

$$\mathbf{e)} \quad f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2;$$

$$\implies f'(x) = 2x + 1 = 0;$$

$$\implies x = -\frac{1}{2};$$

$$\implies y = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4};$$

$$\implies S\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right);$$

$$\mathbb{D}_N =]-2; 1[;$$

$$\mathbf{f)} \quad f(x) = -x^2 + 2x + 1 =$$

$$\implies f'(x) = -2x + 2;$$

$$\implies x = 1;$$

$$\implies y = 2;$$

$$\implies S(1; 2);$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}; \quad x_2 = 1 + \sqrt{2};$$

$$\mathbb{D}_N = \mathbb{R} \setminus [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}];$$

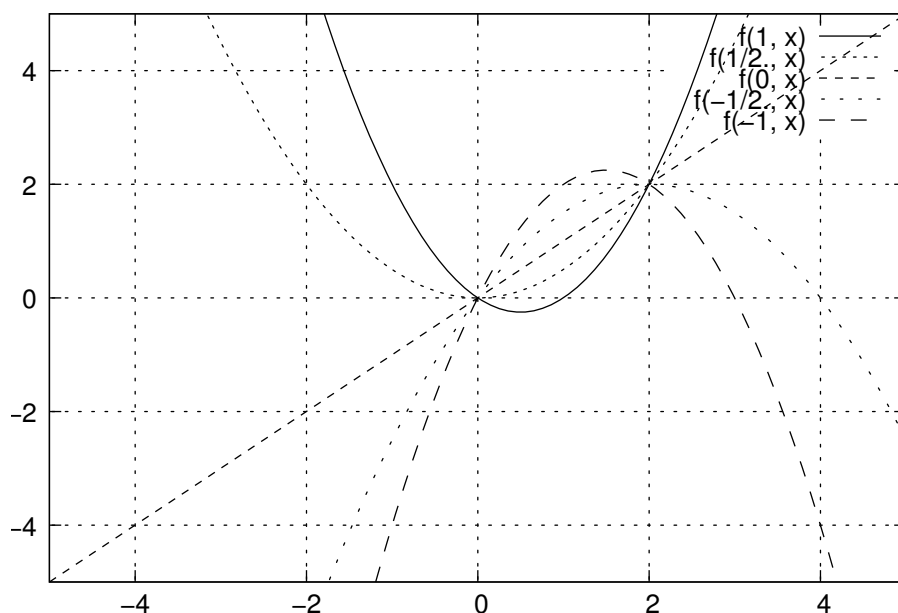
0.1.11 11. Hausaufgabe**Blatt, Aufgabe 10**

Gegeben ist die Schar der Funktionen

$$f_a : x \mapsto f_a(x) = ax^2 + (1 - 2a)x; \quad x \in \mathbb{R};$$

mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ und den zugehörigen Graphen G_a .

a) Zeichne die Graphen G_1 , G_0 und G_{-1} .



b) Zeige, dass genau zwei Punkte allen Graphen der Schar angehören.

$$\begin{array}{rcl}
 f_{a_1}(x) & = & f_{a_2}(x) \\
 a_1x^2 + (1 - 2a_1)x & = & a_2x^2 + (1 - 2a_2)x \quad : x \implies x_1 = 0; \\
 a_1x + 1 - 2a_1 & = & a_2x + 1 - 2a_2 \quad -a_2x - (1 - 2a_1) \\
 x(a_1 - a_2) & = & 1 - 2a_2 - 1 + 2a_1 \quad : (...) \\
 x & = & 2 \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_2} \\
 x & = & 2
 \end{array}$$

$$\Rightarrow P_1(0; 0); P_2(2; 2);$$

c) Wie muss a gewählt werden, damit G_a durch den Punkt $P(4; 0)$ geht? Zeichne den zugehörigen Graphen.

$$\begin{array}{rcl}
 y_P & = & f_a(x_P) \\
 0 & = & 8a + 4 \\
 -\frac{1}{2} & = & a
 \end{array}$$

d) Bestimme allgemein für $a \neq 0$ die Nullstellen von f_a .

$$\begin{array}{l}
 f_a(x) = 0; \implies ax + 1 - 2a = 0; \implies x = \frac{2a-1}{a}; \\
 \Rightarrow N\left(\frac{2a-1}{a}; 0\right);
 \end{array}$$

e) Für welchen Wert von a berührt G_a die x -Achse?

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{2a-1}{2a}; \\ f_a(x) = ax^2 + (1-2a)x = ax + 1 - 2a = 0; \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a \frac{2a-1}{2a} + 1 - 2a = 0 \\ 2a - 1 + 2 - 4a = 0 \\ -2a + 1 = 0 \\ \frac{1}{2} = a \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \\ +2a : 2 \end{array}$$

0.1.12 12. Hausaufgabe**Buch Seite 26, Aufgabe 2e**

Untersuche, ohne den Graphen zu zeichnen, die folgenden Funktion auf ihr Monotonieverhalten:

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}; x \in \mathbb{R}^-;$$

$$x_1 < x_2; x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-; \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} < 0;$$

$\Rightarrow f$ ist streng monoton fallend.

0.1.13 13. Hausaufgabe**Selbstgestellte Aufgabe**

$$f(x) = \frac{4+x}{2+x}; x \in \mathbb{R}^-;$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}; x_1 < x_2; \Rightarrow$$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{4+x_2}{2+x_2} - \frac{4+x_1}{2+x_1} = 2 \frac{x_1 x_2 + 3x_2 + 3x_1 + 8}{x_1 x_2 + 2x_2 + 2x_1 + 4},$$

0.1.14 14. Hausaufgabe**Selbstgestellte Aufgabe**

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1};$$

$$y = \frac{2x}{x^2+1};$$

$$\Rightarrow x^2 y - 2x + y = 0;$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y};$$

$$\Rightarrow y \neq 0; 1 - y^2 \geq 0;$$

$$\Rightarrow W = [-1; 1];$$

Infimum ist $y = -1$, Supremum ist $y = 1$. Maximum ist $(1; 1)$, Minimum ist $(-1; -1)$.

0.1.15 15. Hausaufgabe**Selbstgestellte Aufgabe**

Untersuche f auf Symmetrie, Monotonie für $x \geq 0$ und Beschränktheit (Wertemenge)!

$$f(x) = \frac{4+|x|}{2+|x|};$$

Symmetrie

$$f(-x) = \frac{4+|x|}{2+|x|} = f(x); \Rightarrow \text{Symmetrie zur } y\text{-Achse}$$

Monotonie

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 0; x_1 < x_2; \\ \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) &= \frac{4+x_2}{2+x_2} - \frac{4+x_1}{2+x_1} = \frac{8+4x_1+2x_2+x_1x_2-8-4x_2-2x_1-x_1x_2}{\text{HN}} = \\ \frac{(x_1-x_2)(4-2)}{\text{HN}} &< 0; \\ \Rightarrow \text{smf für } x &\geq 0; \end{aligned}$$

Beschränktheit

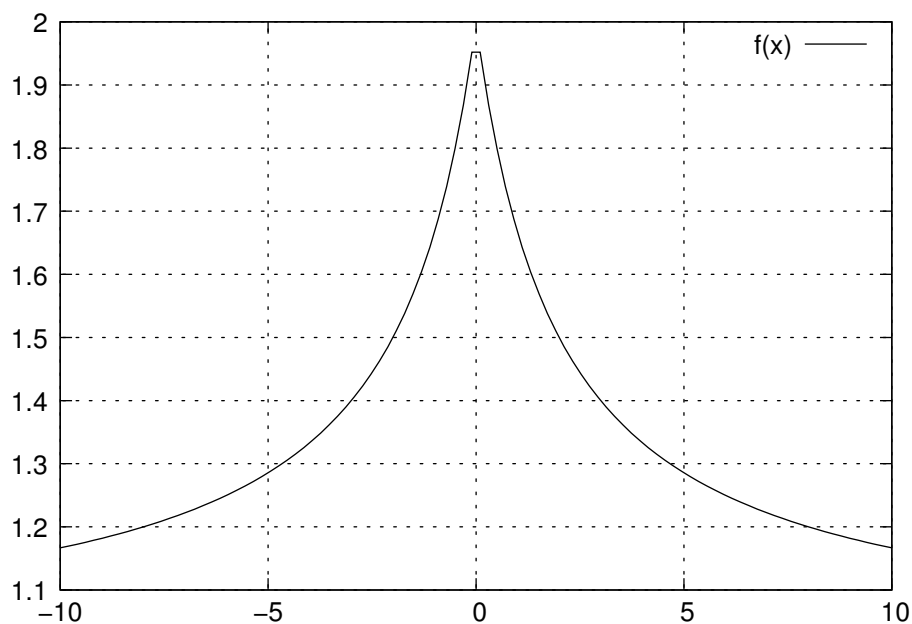
$$\begin{array}{lcl} y & = & \frac{4+|x|}{2+|x|} \\ 2y + |x|y & = & 4 + |x| \\ |x|(y-1) & = & 4 - 2y \\ |x| & = & \frac{4-2y}{y-1} \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot (...) \\ - |x| - 2y \\ : (...) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y \neq 1;$$

$$\begin{array}{lcl} \frac{4-2y}{y-1} & \geq & 0 \\ 4 - 2y & \geq & 0 \\ 2 & \geq & y \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot (...) \\ +2x : 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \text{ und } y \leq 2 \\ y \leq 1 \text{ und } y \geq 2; \end{cases} \quad \text{oder}$$

$$\Rightarrow W =]1; 2];$$



0.1.16 18. Hausaufgabe

Zettel, Aufgabe 1

Errate eine Nullstelle und berechne die übrigen:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9; \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = -1; x_3 = 3;$

b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2; \Rightarrow x_1 = 1;$

Zettel, Aufgabe 2c

Faktorisiere:

$$f(x) = -x^5 + 13x^3 - 36x; \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = -2; x_3 = 0; x_4 = 2; x_5 = 3; \Rightarrow f(x) = -x(x-3)(x-2)(x+2)(x+3);$$

Zettel, Aufgabe 3a

Die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 schneiden sich an der Stelle $x_1 = 2$. Bestimme die übrigen Schnittpunkte!

In welchem Bereich gilt $f_1(x) \geq f_2(x)$?

$$f_1(x) = x^2 + 14;$$

$$f_2(x) = ax;$$

$$f_1(x_1) = f_2(x_1); \implies a = 9; \implies f_2(x) = 9x;$$

$$f_1(x) = f_2(x); \implies x_2 = 7;$$

$$\implies f_1(x) \geq f_2(x); \implies x \in \mathbb{R} \setminus]2; 7[;$$

Zettel, Aufgabe 4a

Wo gilt $f(x) > g(x)$?

$$f(x) = x^2; g(x) = x^4;$$

$$f(x) > g(x); \implies x^2 > x^4; \implies 1 > x^2; x \neq 0; \implies |x| < 1;$$

0.1.17 19. Hausaufgabe

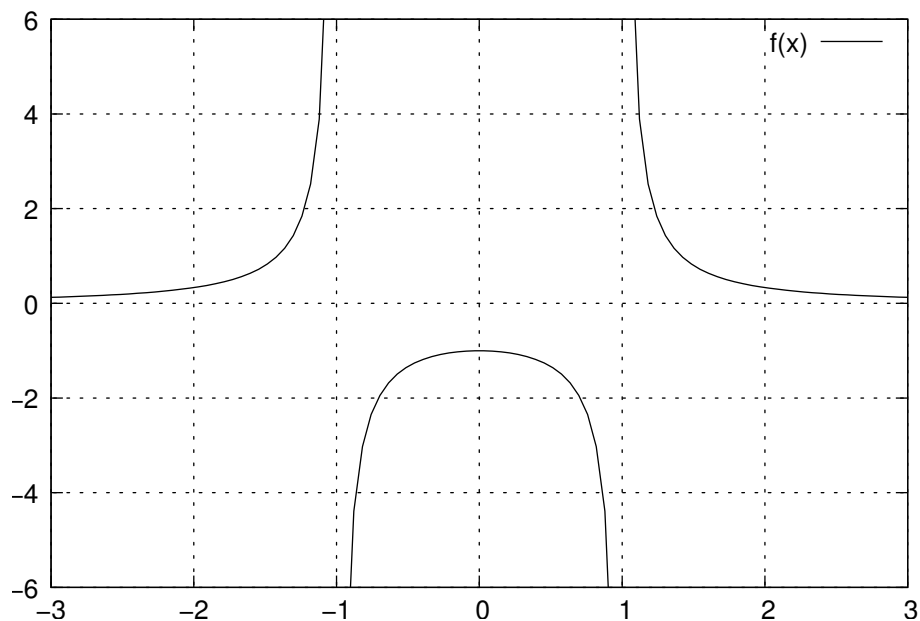
Selbstgestellte Aufgabe

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1};$$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}; \quad \mathbb{W}_f = \mathbb{R} \setminus]-1; 0];$$

$$f(-x) = \frac{1}{x^2-1} = f(x); \implies \text{Symmetrie zur } y\text{-Achse};$$

Bei $x = -1$ und $x = 1$ liegen Unendlichkeitsstellen mit VZW vor.



0.1.18 20. Hausaufgabe**Buch Seite 35, Aufgabe 1d**

Bestimme Nullstellen, Unendlichkeitsstellen und erkennbare Symmetrieeigenschaften der Graphen folgender Funktion:

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{(x-3)(x+2)}{x(x+2)(x-1)} = \frac{x-3}{x(x-1)}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 1\};$$

Nullstellen

$$N(3; 0);$$

„Lochstellen“

$$L(-2; -\frac{5}{6});$$

Unendlichkeitsstellen

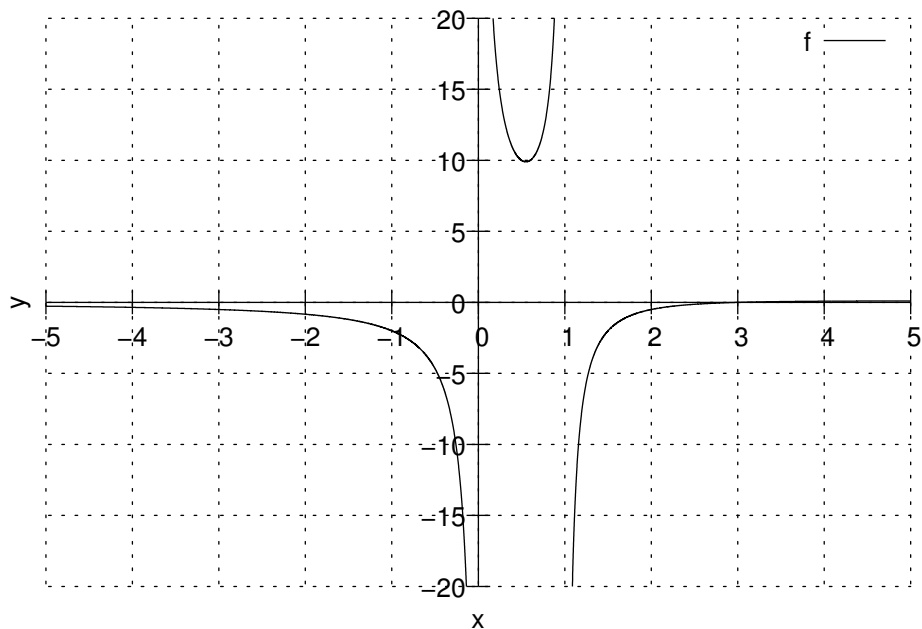
Bei $x = 0$ und $x = 1$ mit VZW;

Asymptoten

$$x = 0; x = 1; y = 0;$$

Symmetrie

$$f(\frac{1}{2} + h) - f(\frac{1}{2} - h) = \dots = -\frac{2h}{\frac{1}{4} - h^2}; \Rightarrow \text{Keine Symmetrie zu } x = \frac{1}{2};$$



Buch Seite 35, Aufgabe 2k

Skizziere im wesentlichen anhand der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen den groben Verlauf des Graphen folgender Funktion:

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 1; D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3\};$$

\Rightarrow Keine Nullstellen, Lochstellen $P_1(1; 1)$, $P_2(2; 1)$, $P_3(3; 1)$, keine Unendlichkeitsstellen;

0.1.19 21. Hausaufgabe**Buch Seite 46, Aufgabe 1**

Gib das ν -te Glied der Folge $\langle a_\nu \rangle$ an für:

a) $a_\nu = 1 + \frac{1}{\nu}; \nu = 7; \implies a_7 = 1 + \frac{1}{7};$

b) $a_\nu = \nu^2 - 5; \nu = 2; \implies a_2 = -1;$

Buch Seite 46, Aufgabe 3

Aus den ersten vier Gliedern dieser Folgen lässt sich jeweils ein Bildungsgesetz erraten. Wie lautet der Term für das allgemeine Glied a_ν ? Beachte, dass es u.U. mehrere Möglichkeiten geben kann (Anmerkung von mir: lol wtf es gibt sogar unendlich viele Möglichkeiten, aber mom, ich schreibe kurz alle auf, bin gleich wieder da SCNR).

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{\nu}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{\nu}{\nu+1}$

(oder z.B. auch: $a_\nu = \frac{1}{5} + \frac{23}{60}\nu - \frac{11}{120}\nu^2 + \frac{1}{120}\nu^3;$)

c) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \dots, \frac{\nu^2}{\nu+1}$

(oder z.B. auch: $a_\nu = -\frac{1}{5} + \frac{37}{60}\nu + \frac{11}{120}\nu^2 - \frac{1}{120}\nu^3;$)

d) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots, \frac{\nu-1}{\nu+1}$

e) $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{\nu+1}$

0.1.20 22. Hausaufgabe**Buch Seite 48, Aufgabe 1**

Berechne das n -te Glied der nachstehenden geometrischen Folgen:

a) $\langle a_\nu \rangle = \left\{ \frac{3}{2}, 3, 6, \dots \right\}; \implies a_\nu = \frac{3}{2} \cdot 2^{\nu-1}; \implies a_{10} = 768;$

b) $\langle a_\nu \rangle = \left\{ 2, \frac{12}{5}, \frac{72}{25}, \dots \right\}; \implies a_\nu = 2 \cdot \left(\frac{6}{5} \right)^{\nu-1}; \implies a_5 = \frac{2592}{625};$

Buch Seite 48, Aufgabe 3

Von einer geometrischen Zahlenfolge $\langle a_\nu \rangle = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ist bekannt: $a_3 = 4$ sowie $a_5 = 8$. Berechne a_1 und a_6 !

$$\begin{aligned} a_\nu &= a_1 \cdot q^{\nu-1}; \implies a_1 = \frac{a_\nu}{q^{\nu-1}}; \\ \implies a_1 &= \frac{4}{q^2} = \frac{8}{q^4}; \\ \implies |q| &= \sqrt{2}; \\ \implies a_1 &= \frac{4}{q^2} = 2; \\ \implies a_\nu &= 2 \cdot (\pm\sqrt{2})^{\nu-1}; \\ \implies a_6 &= 8\sqrt{2}; \quad \vee \quad a_6 = -8\sqrt{2}; \end{aligned}$$

0.1.21 23. Hausaufgabe**Buch Seite 48, Aufgabe 6**

Berechne

a) den Luftdruck in 8km und 12km Meereshöhe.

$$p(8\text{km}) \approx 0,4\text{bar};$$

$$p(12\text{km}) \approx 0,23\text{bar};$$

b) die ungefähre Höhe, in der der mittlere Luftdruck $p_s = 175\text{mbar}$ beträgt.

$$h \approx 14,1\text{km};$$

0.1.22 24. Hausaufgabe**Buch Seite 51, Aufgabe 1**

Eine geometrische Reihe besteht aus zehn Gliedern. Der Anfangswert ist $a_1 = 2$, der Quotient ist $q = 3$. Wie lautet das 10. Glied und wie groß ist die Summe aller Glieder?

$$a_\nu = a_1 \cdot q^{\nu-1} = 2 \cdot 3^{\nu-1};$$

$$a_{10} = 39366;$$

$$s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} = 59048;$$

Buch Seite 51, Aufgabe 2

Berechne folgende Summen:

$$\text{b) } 1 - 4 + 16 - 64 + \dots - 4^9 = 1 \cdot \frac{(-4)^{10}-1}{-4-1} = -209715;$$

$$\text{c) } 4 + 2 + 1 + \dots + \frac{1}{2^{10}} = -4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{13}-1}{\frac{1}{2}} = -8 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{13} - 1\right] = \frac{8191}{1024};$$

0.1.23 25. Hausaufgabe**Buch Seite 51, Aufgabe 2d**

Berechne folgende Summe:

$$3 - \frac{3}{5} + \frac{3}{25} - \dots + \frac{3}{390625} = 3 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^9 - 1}{-\frac{1}{5} - 1} = \frac{976563}{390625};$$

0.1.24 26. Hausaufgabe**Selbstgestellte Aufgabe**

Weise nach: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x^2+1} = 0$;

$$x, \varepsilon \in \mathbb{R}^+;$$

$$\begin{array}{lcl} \frac{4x_s}{x_s^2+1} & < & \varepsilon; \\ 4x_s & < & x_s^2\varepsilon + \varepsilon; \\ x_s^2(-\varepsilon) + 4x_s - \varepsilon & < & 0; \\ x_s & < & \frac{2+\sqrt{4-\varepsilon^2}}{\varepsilon}; \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot (x_s^2 + 1) \\ - (x_s^2\varepsilon + \varepsilon) \\ \text{Lösungsformel...} \end{array} \right.$$

0.1.25 27. Hausaufgabe**Buch Seite 56, Aufgabe 1**

Kennzeichne das Verhalten der Funktion $f : x \mapsto f(x)$ für immer größer werdende x -Werte!

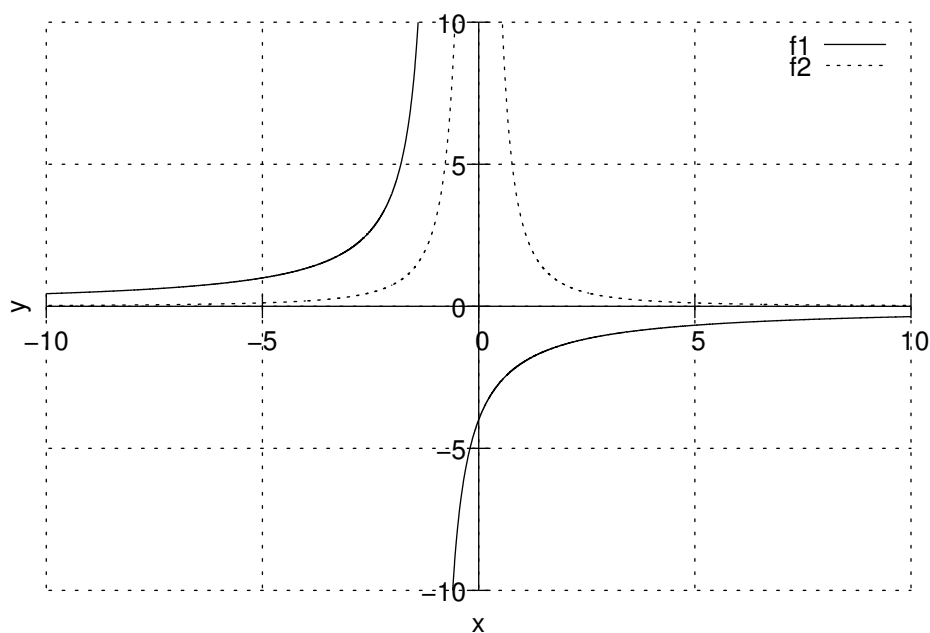
Skizziere den Graphen!

a) $f(x) = -\frac{4}{1+x}; D_f = \mathbb{R}_0^+;$

$$\left| -\frac{4}{1+x_s} \right| < \varepsilon; \Rightarrow -\frac{4}{\varepsilon} - 1 < x_s;$$

b) $f(x) = \frac{3}{x^2}; D_f = \mathbb{R}^+;$

$$\left| \frac{3}{x^2} \right| < \varepsilon; \Rightarrow x_s > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}};$$

**0.1.26 28. Hausaufgabe****Buch Seite 59, Aufgabe 5a**

Bestimme ein x_s so, dass für alle x mit $x > x_s$ gilt:

$$\left| \frac{5}{2} - \frac{5x-6}{2x-2} \right| < \frac{1}{1000};$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow x_s = \frac{2\varepsilon+1}{2\varepsilon} = 501;$$

Buch Seite 59, Aufgabe 6a

Löse die Ungleichung in Aufgabe 5 für $x > 1$ allgemein durch Einsetzen der positiven (als klein zu denkenden) Zahl ε an Stelle von $\frac{1}{1000}$. Bestimme dann:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-6}{2x-2} = \frac{5}{2};$$

Buch Seite 63, Aufgabe 3b

Von welcher Stelle x ab gilt gegebenenfalls $f(x) > 1000 = a$?

$$\begin{aligned} f(x) &> a; \\ \sqrt{x+1} &> a; \\ x+1 &> a^2; \\ x &> 10^6 - 1; \end{aligned}$$

0.1.27 29. Hausaufgabe

Bestimme mit Hilfe der Grenzwertsätze die folgenden Grenzwerte! Es liegt jeweils der Definitionsbereich des Terms zugrunde.

$$\text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3;$$

$$\text{m)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x-x^2-x^3}{x^3} = -1;$$

$$\text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 5;$$

$$\text{n)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-10}{3x+5} = \frac{5}{3};$$

$$\text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{\sqrt{x}} = 0;$$

$$\text{o)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-10}{1+5x} = \frac{3}{5};$$

$$\text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x} = 0;$$

$$\text{p)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6} = 1;$$

$$\text{h)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x} = 0;$$

$$\text{q)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1} \cdot \frac{6x^2-7}{x^2+4}\right) = 4;$$

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 1^x = 1;$$

$$\text{r)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3+1} \cdot \frac{x+1}{x^2-1}\right) = 0;$$

$$\text{k)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 0;$$

$$\text{s)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^5-a^5}{x^5+a^5} \cdot \frac{2 \sin(\frac{1}{2}\pi x)}{x}\right) = 0;$$

$$\text{l)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 0;$$

0.1.28 30. Hausaufgabe**Buch Seite 70, Aufgabe 6**

Bestimme für die Folgen $\langle a_\nu \rangle$ den Grenzwert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu$ nach geeigneter Umformung des Terms:

$$\text{a) } \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{(1+\nu)^2}{1-\nu^2} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1+\nu}{1-\nu} = \frac{0+1}{0-1} = -1;$$

$$\text{b) } \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} 3^{\frac{\sin \frac{\pi}{\nu}}{\sin \frac{\pi}{2\nu}}} = 6;$$

$$\text{c) } \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\nu}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{\nu}}+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0;$$

Buch Seite 70, Aufgabe 9

Bestimme für die Folge $\langle a_\nu \rangle$ den Grenzwert a und ermittle eine natürliche Zahl n so, dass $|a_\nu - a| < 0,001$ wird für alle $\nu > n$:

$$\text{a) } a_\nu = 2 + \frac{1}{\nu+1}; \Rightarrow \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = 2 + 0 = 2;$$

$$\Rightarrow n = 1000;$$

$$\text{b) } a_\nu = -3 + \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu}}; \Rightarrow \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = -3 + 0 = -3;$$

$$\Rightarrow n = 1000001;$$

0.1.29 31. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - x|}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|1 \pm 2h + h^2 - 1 \mp h|}{1 \pm h - 1} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|h^2 \pm h|}{\pm h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \pm |h \pm 1|;$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0+} f(1 \pm h) = \pm |0 \pm 1| = \pm 1 = \lim_{x \rightarrow 1 \pm} f(x);$$

0.1.30 32. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } -1 \leq x \leq 1; \\ x^2 - x & \text{für } x > 1; \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} = \lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} 1 + 2h + h^2 - 1 - h = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 + h = 0 + 0 = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} = \lim_{h \rightarrow 0} f(1-h) = \lim_{h \rightarrow 0} 1 - h = 1 - 0 = 1;$$

0.1.31 33. Hausaufgabe**Selbstgestellte Aufgabe**

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{für } x \leq -1; \\ 1 - x & \text{für } x > -1; \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} 1 - x = 1 - (-1) = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} 1 + x^2 = 1 + (-1)^2 = 2;$$

0.1.32 34. Hausaufgabe**Buch Seite 91, Aufgabe 1**

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto x^2 - x; D_f = \mathbb{R};$

Berechne den Differenzquotienten bzgl. der Stelle $x_0 = 1$ und den zugehörigen Differentialquotienten!

$$m_s = \frac{x^2 - x - x_0^2 + x_0}{x - x_0};$$

$$m_t = 2x - 1;$$

Buch Seite 91, Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{x}{1-x}; D_f = [-3; 1[;$

Berechne $f'(0)!$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1-x} - \frac{0}{1-0}}{x - 0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(1-x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = \\ &= \frac{1}{1} = 1; \end{aligned}$$

0.1.33 35. Hausaufgabe**Buch Seite 118, Aufgabe 7**

Berechne $f'(1) :$

- a)** $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} - \frac{4}{x};$
 $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2};$
 $\Rightarrow f'(1) = 3 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2};$
- b)** $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - 2 + \frac{1}{x};$
 $\Rightarrow f'(x) = 1 - 0 - \frac{1}{x^2};$
 $\Rightarrow f'(1) = 1 - 1 = 0;$
- c)** $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x} = x^2 + x + \frac{1}{x};$
 $\Rightarrow f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x^2};$
 $\Rightarrow f'(1) = 2 + 1 - 1 = 2;$

0.1.34 36. Hausaufgabe**Selbstgestellte Aufgaben**

1. $f(x) = \sqrt{5x}; \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{5x}}{2x};$
2. $f(x) = x \cdot (2x^2 + 3) = 2x^3 + 3x; \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 3;$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^1} = x^{-\frac{1}{2}}; \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^3}}{x^3};$
4. $f(x) = x^m \cdot x^n = x^{m+n}; \Rightarrow f'(x) = (m+n)x^{m+n-1};$

0.1.35 37. Hausaufgabe**Buch Seite 116, Aufgabe 6**

Wie lautet die Gleichung der „Halbtangente“ an den Graphen der Funktion $f : x \mapsto x^3; x \in [-1; \infty[$ im Punkt $P(-1; -1)$? Welche Flächenmaßzahl hat das Dreieck, das die Halbtangente mit den Koordinatenachsen bildet?

$$t : \frac{y - y_P}{x - x_P} = \frac{y + 1}{x + 1} = f'(-1) = 3; \Rightarrow y = 3x + 3 - 1 = 3x + 2;$$

$$t(0) = 2; t\left(-\frac{2}{3}\right) = 0;$$

$$A = \frac{1}{2} 2 \frac{2}{3} = \frac{2}{3};$$

Buch Seite 116, Aufgabe 8

Für den Graphen der Funktion $f : x \mapsto \sqrt{x}; x \in \mathbb{R}_0^+$ ist zu bestimmen:

a) Der Neigungswinkel der Tangente im Punkt $P(\frac{3}{4}; ?)$;

$$t : \frac{y - y_P}{x - x_P} = \frac{y - \sqrt{\frac{3}{4}}}{x - \frac{3}{4}} = f'(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}}; \Rightarrow$$

$$y = \frac{x - \frac{3}{4}}{2\sqrt{\frac{3}{4}}} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{x - \frac{3}{4}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{4}; \Rightarrow$$

$$\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6};$$

b) Die Abszisse jenes Kurvenpunktes Q , für den die Tangente unter $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ gegen die x -Achse geneigt ist.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}; \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{3}; \Rightarrow x = \frac{1}{12};$$

0.1.36 38. Hausaufgabe**Buch Seite 122, Aufgabe 7a**

Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven mit den Gleichungen $y_1 = 2x - 3$ und $y_2 = x^2 + 2x - 7$? Wie lauten die Tangentengleichungen in den Schnittpunkten?

$$y_1 = y_2; \Rightarrow 2x - 3 = x^2 + 2x - 7; 4 = x^2; \Rightarrow |x| = 2;$$

$$S_1(-2, -7), S_2(2, 1)$$

$$f'_1(\pm 2) = 2; f'_2(\pm 2) = 2 \cdot \pm 2 + 2; \Rightarrow f'_2(2) = 6; f'_2(-2) = -2;$$

$$\varphi_1 = \arctan 6 - \arctan 2 \approx 17^\circ;$$

$$\varphi_2 = \arctan -2 - \arctan 2 + 180^\circ \approx 53^\circ;$$

$$t_{1,1} : \frac{y + 7}{x + 2} = 2; \Rightarrow y_{1,1} = 2x - 3;$$

$$t_{1,2} : \frac{y - 1}{x - 2} = 2; \Rightarrow y_{1,2} = 2x - 3;$$

$$t_{2,1} : \frac{y + 7}{x + 2} = -2; \Rightarrow y_{2,1} = -2x - 11;$$

$$t_{2,2} : \frac{y - 1}{x - 2} = 6; \Rightarrow y_{2,2} = 6x - 11;$$

0.1.37 39. Hausaufgabe**Selbstgestellte Aufgabe**

Bestimme zur Kurve $f : f(x) = ax^2 + bx + c$ die Koeffizienten a, b, c so, dass f durch den Punkt $A(2, 1)$ geht und die Gerade $g(x) = 2x + 4$ in $B(1, 6)$ berührt.

$$1 = 4a + 2b + c; \Rightarrow c = 1 - 4a - 2b;$$

$$6 = a + b + c = a + b + 1 - 4a - 2b; \Rightarrow 5 = -3a - b; \Rightarrow b = -3a - 5;$$

$$f'(1) = 2a + b = 2; \Rightarrow b = 2 - 2a;$$

$$-3a - 5 = 2 - 2a; \Rightarrow -7 = a;$$

$$\Rightarrow b = -3(-7) - 5 = 16;$$

$$\Rightarrow c = 1 - 4(-7) - 2 \cdot 16 = -3;$$

$$\Rightarrow f(x) = -7x^2 + 16x - 3;$$

0.1.38 40. Hausaufgabe**Selbstgestellte Aufgabe**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ berührt die Gerade $g(x) = 12x + 13$ in $A(-1, 1)$ und hat in $B(1, 5)$ eine waagrechte Tangente.

$$f(-1) = 1 = -a + b - c + d;$$

$$\Rightarrow d = 1 + a - b + c;$$

$$f(1) = 5 = a + b + c + d = a + b + c + 1 + a - b + c;$$

$$\Rightarrow 4 = 2a + 2c;$$

$$\Rightarrow c = 2 - a;$$

$$f'(-1) = 0 = 3a + 2b + c = 3a + 2b + 2 - a;$$

$$\Rightarrow -2 = 2a + 2b;$$

$$\Rightarrow b = -1 - a;$$

$$f'(-1) = 12 = 3a - 2b + c = 3a + 2 + 2a + 2 - a = 4a + 4;$$

$$\Rightarrow 8 = 4a;$$

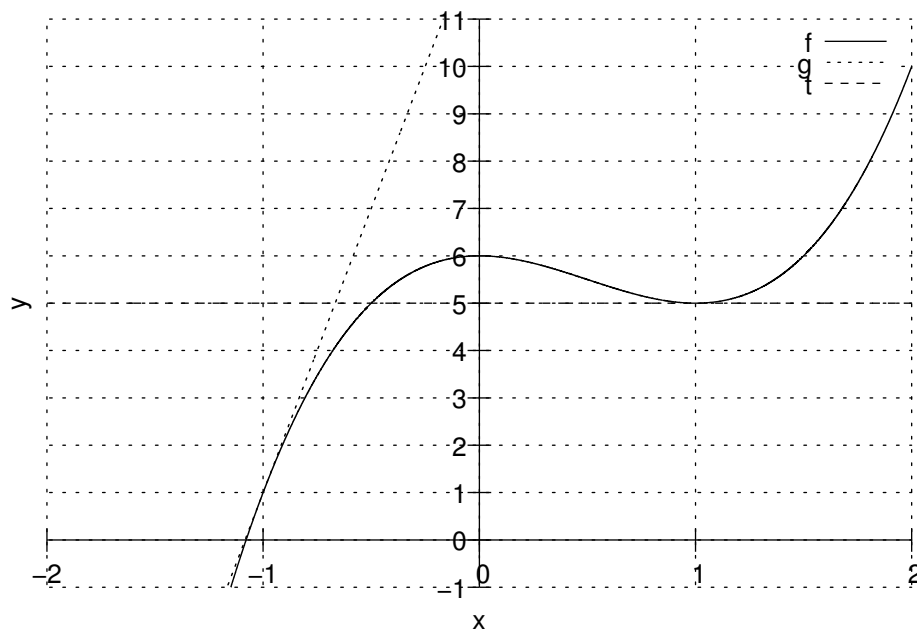
$$\Rightarrow a = 2;$$

$$\Rightarrow b = -1 - 2 = -3;$$

$$\Rightarrow c = 2 - 2 = 0;$$

$$\Rightarrow d = 1 + 2 + 3 = 6;$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6;$$



0.1.39 41. Hausaufgabe

Buch Seite 116, Aufgabe 12

Berechne den Neigungswinkel der Tangente der „Sinuslinie“ mit der Gleichung $y = \sin x$ auf $0,01^\circ$ genau:

a) $P(\frac{1}{2}, ?)$;

$$\alpha = \arctan \cos \frac{1}{2} \approx 41,27^\circ;$$

c) $P(\frac{3}{2}, ?)$;

$$\alpha = \arctan \cos \frac{3}{2} \approx 4,05^\circ;$$

Buch Seite 116, Aufgabe 13

Für den Graphen der Funktion $f : x \mapsto \sin x; x \in [0, 2\pi]$ sollen die Abszissen jener Kurvenpunkte auf eine Dezimale genau berechnet werden, für die

a) die Steigung $\frac{1}{2}$ ist.

$$f'(x) = \frac{1}{2} = \cos x; \Rightarrow x_1 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}; \quad x_2 = \frac{5}{3}\pi;$$

c) die Tangente parallel ist zur Geraden $g : 2x - 3y - 6 = 0$.

$$\Rightarrow g : y = \frac{2}{3}x - 2;$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} = \cos x; \Rightarrow x_1 \approx 0,8 \quad x_2 \approx 5,4;$$

0.1.40 42. Hausaufgabe

Buch Seite 122, Aufgabe 7b

Welchen Punkt haben die Graphen von $f : x \mapsto \cos x + \sin x$ und $g : \sin x - 2 \cos x$ in $[0, \pi]$ gemeinsam? Man berechne den Schnittwinkel in diesem Punkt!

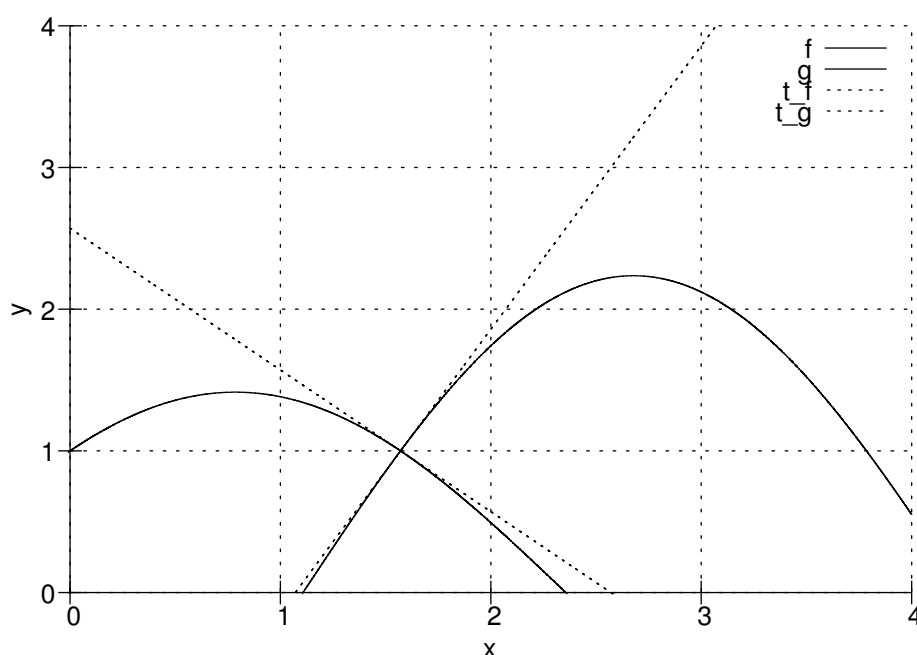
$$\cos x + \sin x = \sin x - 2 \cos x; \Rightarrow 3 \cos x = 0; \Rightarrow \cos x = 0; \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}; \Rightarrow P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right);$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = -1 + 0 = -1;$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{\pi}{2} = 0 + 2 = 2;$$

$$\Rightarrow \varphi^* = \arctan 2 - \arctan(-1) \approx 108^\circ;$$

$$\Rightarrow \varphi = 180^\circ - \varphi^* \approx 72^\circ;$$



0.1.41 43. Hausaufgabe

Buch Seite 123, Aufgabe 15

Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_a : x \mapsto y = ax^2 - 2x + 1$, wobei der Scharparameter a eine beliebige reelle Zahl vertritt.

- a)** Für welche Belegung von a geht die Tangente in $P(1, ?) \in G_{f_a}$ durch den Ursprung des Koordinatensystems?

$$\frac{t_a(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{t_a(x) - a + 2 - 1}{x - 1} = \frac{t_a(x) - a + 1}{x - 1} = f'_a(1) = 2a - 2; \Rightarrow$$

$$t_a : t_a(x) = 2ax - 2x - 2a + 2 + a - 1 = 2(a - 1)x + 1 - a; \Rightarrow$$

$$1 - a = 0; \Rightarrow a = 1;$$

- b)** Wie lautet die Gleichung der Normalen durch P für beliebige Werte von a ?

$$\frac{n_a(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{n_a(x) - a + 1}{x - 1} = -\frac{1}{f'_a(1)} = -\frac{1}{2a - 2}; \Rightarrow$$

$$n_a(x) = -\frac{x - 1}{2a - 2} + a - 1 = \frac{1}{2 - 2a}x - \frac{2a^2 - 4a + 3}{2 - 2a}; \quad a \neq 1;$$

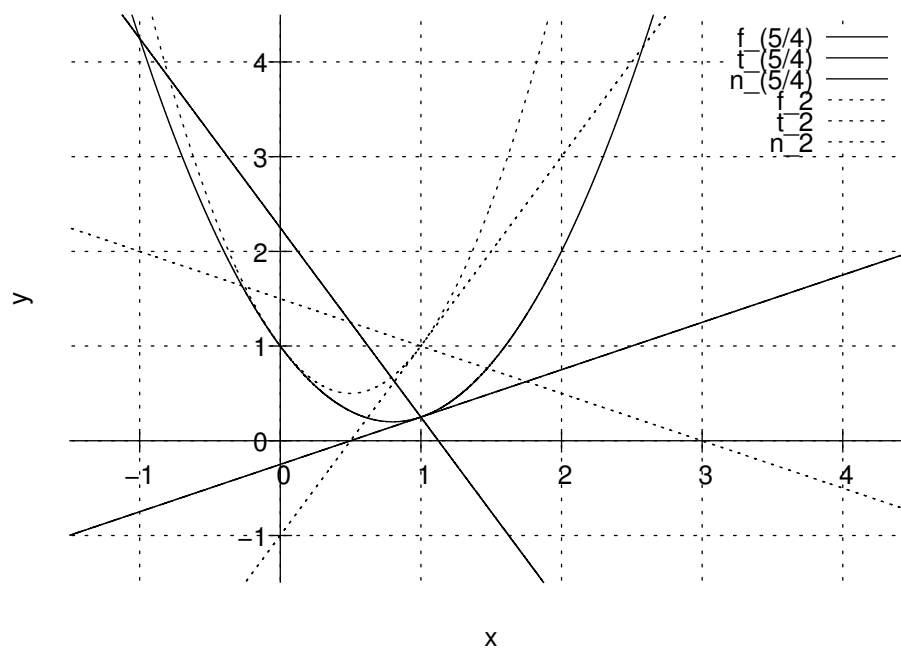
- c)** Für welche a -Werte bilden Tangente und Normale durch P mit der y -Achse ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge $\frac{5}{2}$? (Vier Lösungen)

$$t_a(0) = 1 - a; \quad n_a(0) = -\frac{2a^2 - 4a + 3}{2 - 2a};$$

$$n_a(0) - t_a(0) = \frac{5}{2}; \Rightarrow L_{a_1} = \dots = \left\{\frac{5}{4}, 2\right\};$$

$$t_a(0) - n_a(0) = \frac{5}{2}; \Rightarrow L_{a_2} = \dots = \left\{0, \frac{3}{4}\right\};$$

$$\Rightarrow L_a = L_{a_1} \cup L_{a_2} = \left\{0, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2\right\};$$



0.1.42 44. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$$f(x) = x^3 - 3x; \quad D_f = \mathbb{R};$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1);$$

$$f'(x) > 0; \Rightarrow 3(x+1)(x-1) > 0; \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0; \Rightarrow f \text{ ist sms;} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[; \\ f'(x) < 0; \Rightarrow f \text{ ist smf;} & \text{für } x \in]-1, 1[; \end{cases}$$

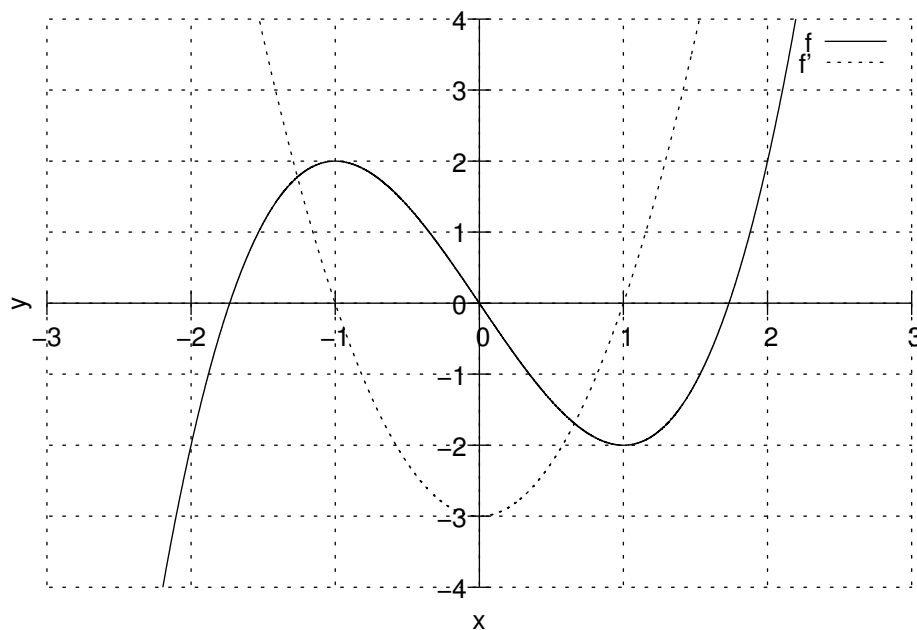
$$f'(x) = 0; \Rightarrow 3(x+1)(x-1) = 0; \Rightarrow$$

$$P_1(-1, 2); P_1(1, -2);$$

$$f'(x) > 0; \Rightarrow f \text{ steigt.}$$

$$f'(x) < 0; \Rightarrow f \text{ fällt.}$$

$$f'(x) = 0; \Rightarrow f \text{ hat eine waagrechte Tangente.}$$



0.1.43 45. Hausaufgabe

Buch Seite 127, Aufgabe 5

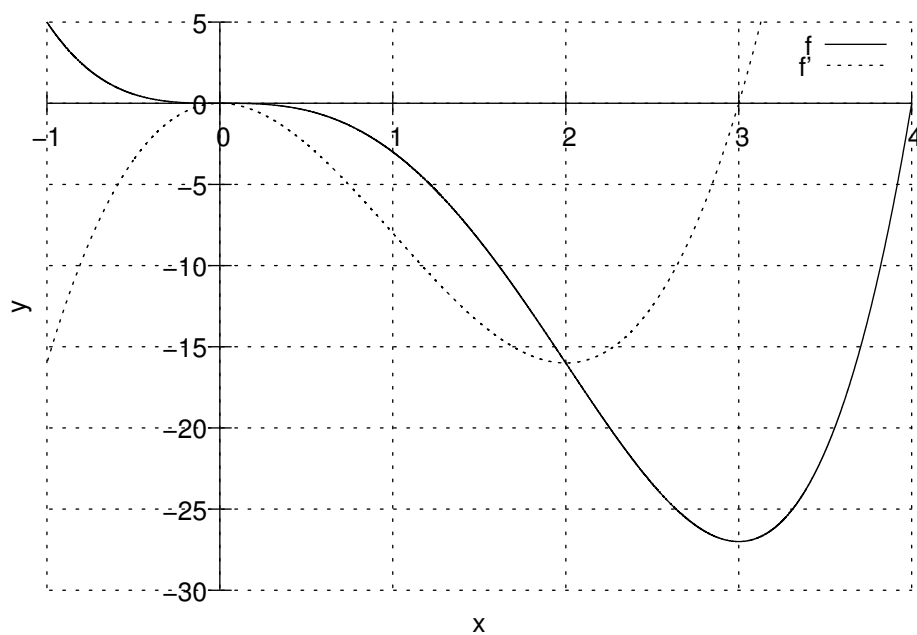
Zeige, dass die Funktion $f : x \mapsto f(x) = x^4 - 4x^3$ an der einen Nullstelle der Ableitung einen Extremwert hat, an der anderen aber nicht.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0; \Rightarrow x_1 = 0; \quad 4x_2 = 12; \Rightarrow x_2 = 3;$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x;$$

$$f''(0) = 0; \quad P_{\text{TEP}}(0, 0);$$

$$f''(3) \neq 0; \quad P_{\text{TIP}}(3, -27);$$



0.1.44 46. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$$f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x + 2)(x - 2);$$

Nullstellen

$$N_1(-2, 0); \quad N_2(0, 0); \quad N_3(2, 0);$$

Symmetrie

$$f(-x) = x^4 - 4x^2 = f(x); \Rightarrow \text{Symmetrie zur } y\text{-Achse}$$

Extrema

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0;$$

$$f''(x) = 12x^2 - 8; \Rightarrow$$

$$x_1 = -\sqrt{2};$$

$$f''(x_1) = f''(-\sqrt{2}) > 0; \Rightarrow P_{\text{TIP}}(-\sqrt{2}, -4);$$

$$x_2 = 0;$$

$$f''(x_2) = f''(0) < 0; \Rightarrow P_{\text{HOP}}(0, 0);$$

$$x_3 = \sqrt{2};$$

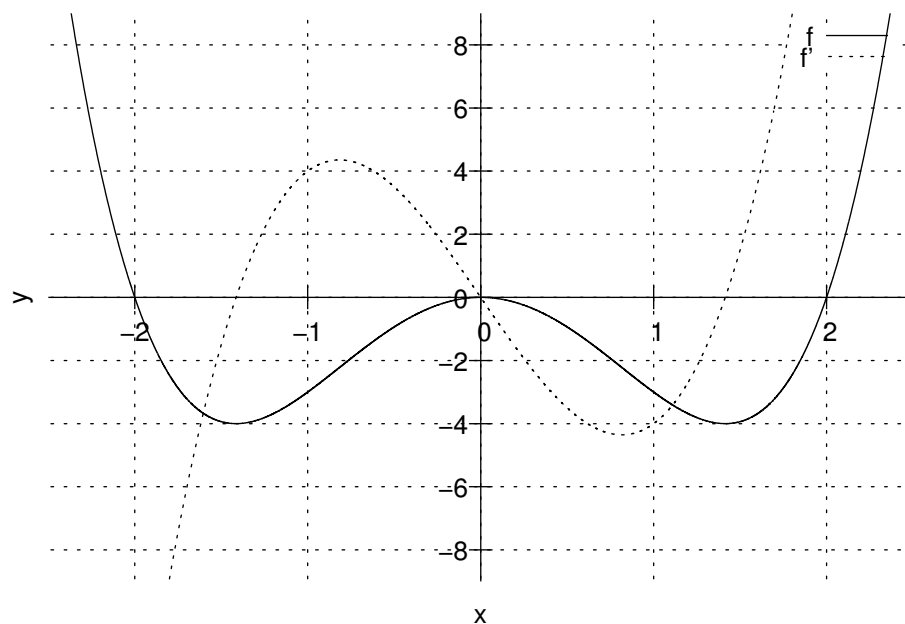
$$f''(x_3) = f''(\sqrt{2}) > 0; \Rightarrow P_{\text{TIP}}(\sqrt{2}, -4);$$

Monotoniebereiche

$$f'(x) = 4x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) > 0; \Rightarrow$$

$$f \text{ ist in sms in }]-\sqrt{2}, 0[\cup]\sqrt{2}, \infty[;$$

$$f \text{ ist in smf in }]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]0, \sqrt{2}[;$$

Graph**0.1.45 47. Hausaufgabe****Selbstgestellte Aufgabe**

$$f(x) = -\frac{4}{5}x^5 + 3x^3 = -\frac{4}{5}x^3 \left(x + \frac{\sqrt{15}}{2}\right) \left(x - \frac{\sqrt{15}}{2}\right);$$

Nullstellen

$$N_1\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\right); \quad N_2(0, 0); \quad N_3\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\right);$$

Symmetrie

$$f(-x) = \frac{4}{5}x^5 - 3x^3 = -f(x); \Rightarrow \text{Symmetrie zum Ursprung};$$

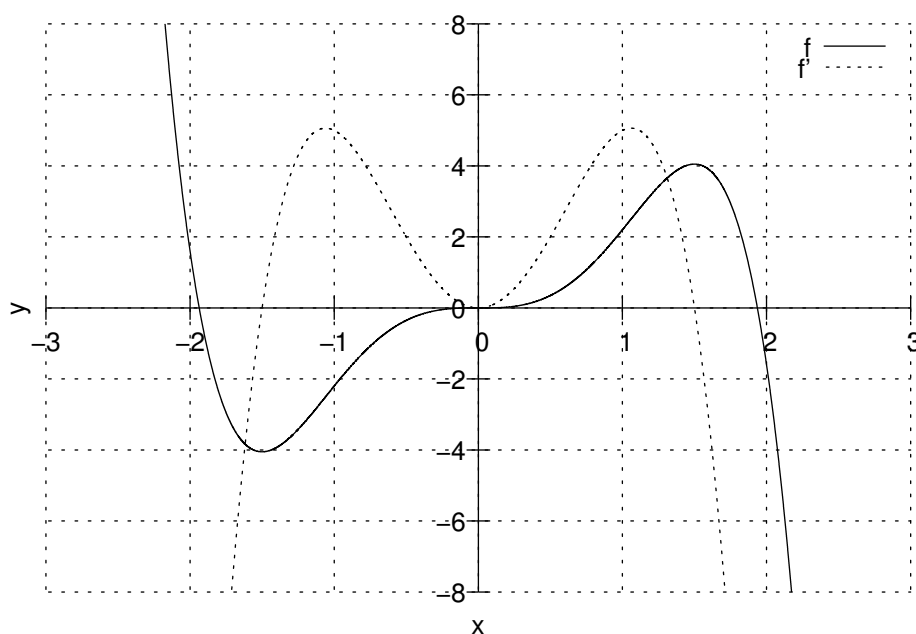
Extrema und Terrassenpunkte

$$f'(x) = -4x^4 + 9x^2 = 0; \Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = \frac{3}{2};$$

$$f''(x) = -16x^3 + 18x;$$

- $f''(x_1) = f''(-\frac{3}{2}) = 27 > 0; \Rightarrow P_{\text{TIP}}(-\frac{3}{2}, -\frac{81}{20});$
- $f''(x_2) = f''(0) = 0; \Rightarrow$ Vorzeichenanalyse notwendig: $f'(x)$ wechselt das Vorzeichen in der Umgebung von x_2 nicht; $\Rightarrow P_{\text{TEP}}(0, 0);$
- $f''(x_3) = f''(\frac{3}{2}) = -27 < 0; \Rightarrow P_{\text{HOP}}(\frac{3}{2}, \frac{81}{20});$



Selbstgestellte Aufgabe

$$f(x) = 2x^2 - \sqrt{x}; \quad D_f = \mathbb{R}_0^+;$$

Nullstellen

$$N_1(0, 0); \quad N_2(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}, 0);$$

Symmetrie

f ist in \mathbb{R}^- nicht definiert; \Rightarrow Keine Symmetrie zur y -Achse oder zum Ursprung;

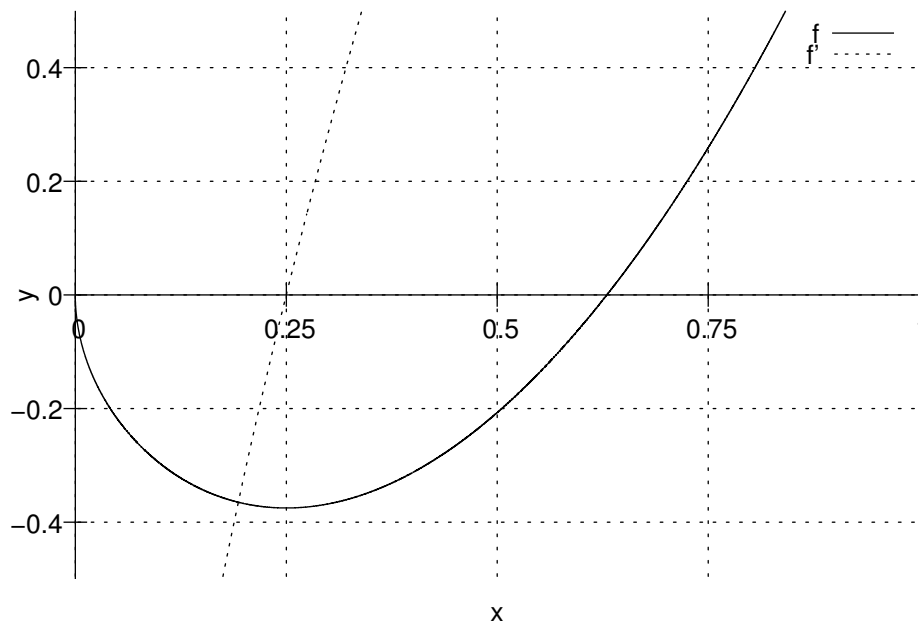
Extremum

$$f'(x_0) = 4x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 0; \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4};$$

$f'(x)$ wechselt in der Umgebung von x_0 das Vorzeichen von $-$ nach $+$; $\Rightarrow P_{\text{TIP}}(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8});$

Monotonie

f ist in $\left[0, \frac{1}{4}\right[$ smf, in $\left[\frac{1}{4}, \infty\right[$ sms.

**0.1.46 48. Hausaufgabe****Selbstgestellte Aufgabe**

$$f(x) = 2x^2 - 8x; \quad D_f = [-2, 5];$$

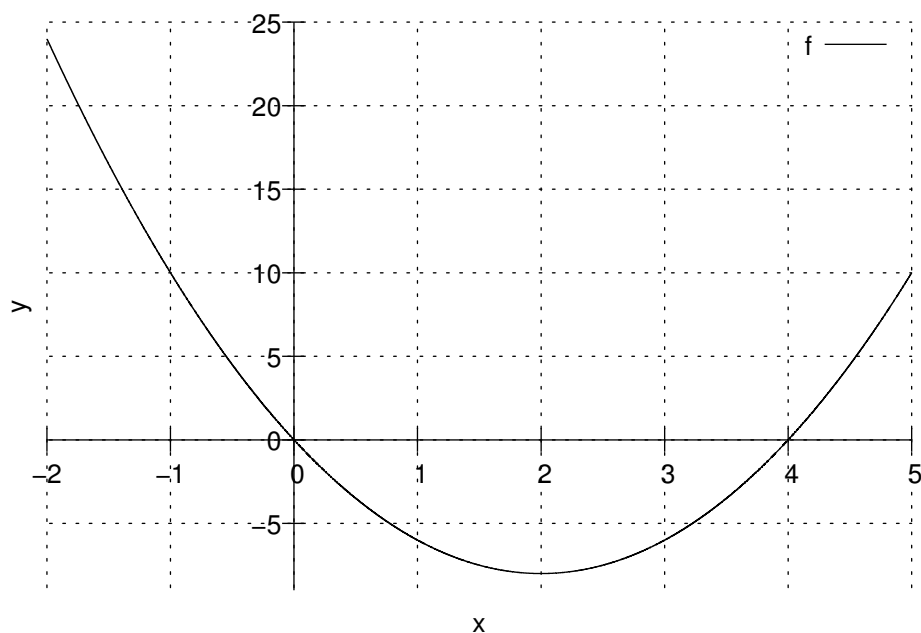
$$f'(x_s) = 4x_s - 8 = 0; \Rightarrow x_s = 2;$$

$$f(x_s) = f(2) = -8;$$

$$f(-2) = 8 - 8(-2) = 24;$$

$$f(5) = 50 - 40 = 10;$$

$$\Rightarrow W_f = [-8, 24];$$

**0.1.47 49. Hausaufgabe****Buch Seite 107, Aufgabe 1**

Für die Funktion $f : x \mapsto f(x) = x^2 + 2$ trifft bezüglich des Intervalls $I = [-1, 2]$ die Aussage des Extremwertsatzes zu. Warum? Gib das Maximum und das Minimum an!

f ist in I stetig \Rightarrow Anwendung des Extremwertsatzes möglich

$$x_s = 0;$$

$$f(-1) = 3;$$

$$f(2) = 6;$$

$$\Rightarrow P_{\text{HOP}}(2, 6); \quad P_{\text{TIP}}(0, 2);$$

Buch Seite 108, Aufgabe 5

Hat f in $I = [-1, 2]$ eine Nullstelle? Begründe, warum man den Nullstellensatz anwenden darf bzw. warum nicht!

a) $f : x \mapsto f(x) = -x^3 + 4x + 1; \quad D_f = \mathbb{R};$

f ist in I stetig \Rightarrow Anwendung des Nullstellensatzes möglich

$$f(-1) = -4;$$

$$f(2) = 17;$$

\Rightarrow Ja, f hat in I eine Nullstelle.

b) $f : x \mapsto f(x) = x^2 - 2; \quad D_f = \mathbb{R};$

f ist in I stetig \Rightarrow Anwendung des Nullstellensatzes möglich

$$f(-1) = -1;$$

$$f(2) = 2;$$

\Rightarrow Ja, f hat in I eine Nullstelle.

0.1.48 50. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

a) $\sqrt{4,1} \approx \sqrt{4} + 0,1 \cdot \frac{1}{4} = 2,025;$

b) $3,9^3 \approx 4^3 - 0,1 \cdot 3 \cdot 4^2 = 59,2;$

c) $\frac{1}{5,9} \approx \frac{1}{6} + 0,1 \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{61}{360} \approx 0,1694;$

0.1.49 51. Hausaufgabe

Buch Seite 159, Aufgabe 2

Welches Krümmungsverhalten zeigt die Funktion f in einer Umgebung der Stelle x_0 ?

a) $f : x \mapsto f(x) = x^4 - 3x^2; \quad x_0 = -1;$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x;$$

$$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 6;$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = f''(-1) = 12 - 6 = 6;$$

$\Rightarrow f$ ist an der Stelle x_0 linksgekrümmt.

b) $f : x \mapsto f(x) = x^3 - 4x; \quad x_0 = 2;$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4;$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6x;$$

$$\Rightarrow f''(x_0) = f''(2) = 12;$$

$\Rightarrow f$ ist an der Stelle x_0 linksgekrümmt.

Buch Seite 159, Aufgabe 1

Bestimme für die folgende Funktion $f : x \mapsto f(x)$; $x \in \mathbb{R}$ die x -Werte der Extrema und die Wendepunkte (soweit vorhanden) des Graphen.

$$f(x) = x^2 - 6x + 5;$$

$$\Rightarrow f'(x_{\text{TIP}}) = 2x_{\text{TIP}} - 6 = 0; \Rightarrow x_{\text{TIP}} = 3;$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2;$$

$\Rightarrow f$ hat in D_f keine Wendepunkte.

0.1.50 52. Hausaufgabe**Buch Seite 162, Aufgabe 3a**

Bestimme Extremwerte und Wendepunkte von G_f ! Wie lauten die Gleichungen der Kurventangenten, die mit der positiven x -Achse einen Winkel von 45° bilden?

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{12}x^3 - 2x^2 + 16x - 42;$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 16 = \frac{1}{4}(x - 8)^2;$$

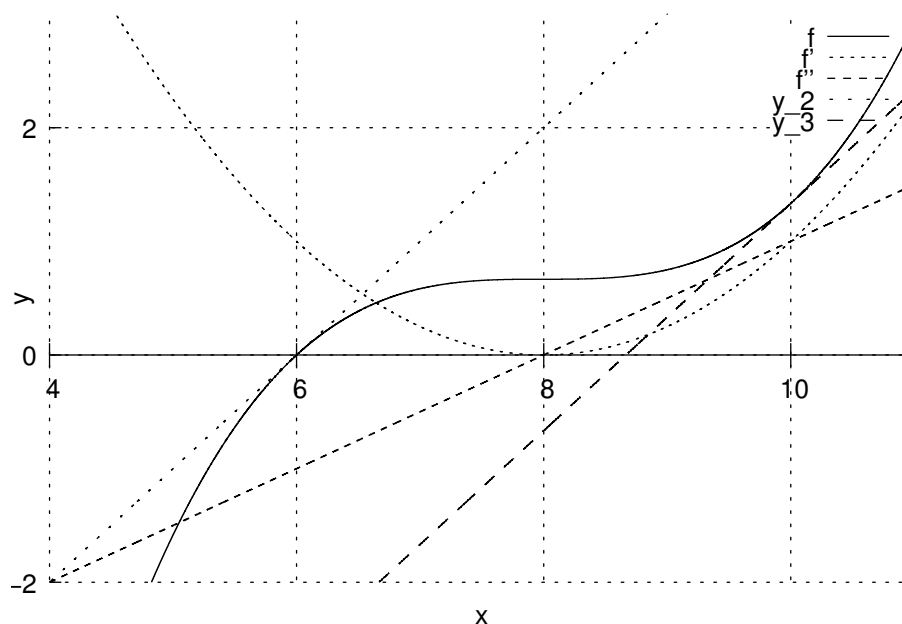
$$\Rightarrow f''(x) = \frac{1}{2}x - 4 = \frac{1}{2}(x - 8);$$

$$x_1 = 8: f'(x_1) = 0 \wedge \text{Kein VZW}; \Rightarrow P_{\text{TEP}}(8, \frac{2}{3});$$

$$f'(x) = 1; \Rightarrow P_2(6, 0); \quad P_3(10, \frac{4}{3});$$

$$\Rightarrow \frac{y_2}{x - 6} = 1; \Rightarrow y_2 = x - 6;$$

$$\Rightarrow \frac{y_3 - \frac{4}{3}}{x - 10} = 1; \Rightarrow y_3 = x - \frac{26}{3};$$



0.1.51 53. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2; \quad P_0(-1, 11);$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 4x_0^3 + 24x_0^2 + 36x_0 = -16;$$

$$\Rightarrow \frac{y - 11}{x + 1} = -16; \Rightarrow y = -16x - 5;$$

$$\Rightarrow -16x - 5 = x^4 + 8x^3 + 18x^2; \Rightarrow x_1 = -5; \quad x_2 = x_0 = -1;$$

0.1.52 55. Hausaufgabe

Buch Seite 163, Aufgabe 14

Gegeben ist $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{7} |x^2 + 3x - 10|$.

Wo ist f nicht differenzierbar? Zeichne G_f und $G_{f'}$ in $[-6, 6]$! Welche sprunghafte Richtungsänderung erfährt die Tangente beim Überschreiten jener Stellen, an denen die Funktion keine Ableitung hat? Wo ist $f(x) < \frac{7}{4}$?

$$x^2 + 3x - 10 = 0; \Rightarrow x_1 = -5; \quad x_2 = 2;$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} (2x + 3) & \text{für } x < -5 \vee x > 2; \\ -\frac{1}{7} (2x + 3) & \text{für } x \in]-5, 2[; \end{cases}$$

Extrema

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}(x^2 - 4) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x & \text{für } x \in]-\infty, -2] \cup [2, \infty[; \\ -\frac{x}{3}(x^2 - 4) = -(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x) & \text{für } x \in]-2, 2[; \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{4}{3} & \text{für } x \in]-\infty, -2[\cup]2, \infty[; \\ -(x^2 - \frac{4}{3}) & \text{für } x \in]-2, 2[; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pm(x_0^2 - \frac{4}{3}) = 0; \Rightarrow x_0^2 = \frac{4}{3};$$

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}; \quad x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3};$$

Vorzeichenanalyse von f' :

$$x_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{3};$$

Vorzeichenwechsel von f' von $-$ nach $+$; $\Rightarrow P_{\text{TIP},1}(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{16}{27}\sqrt{3})$;

$$x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3};$$

Vorzeichenwechsel von f' von $+$ nach $-$; $\Rightarrow P_{\text{HOP},1}(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{16}{27}\sqrt{3})$;

$$x_3 = -2;$$

Vorzeichenwechsel von f' von $+$ nach $-$; $\Rightarrow P_{\text{HOP},2}(-2, 0)$;

$$x_4 = 2;$$

Vorzeichenwechsel von f' von $-$ nach $+$; $\Rightarrow P_{\text{TIP},2}(2, 0)$;

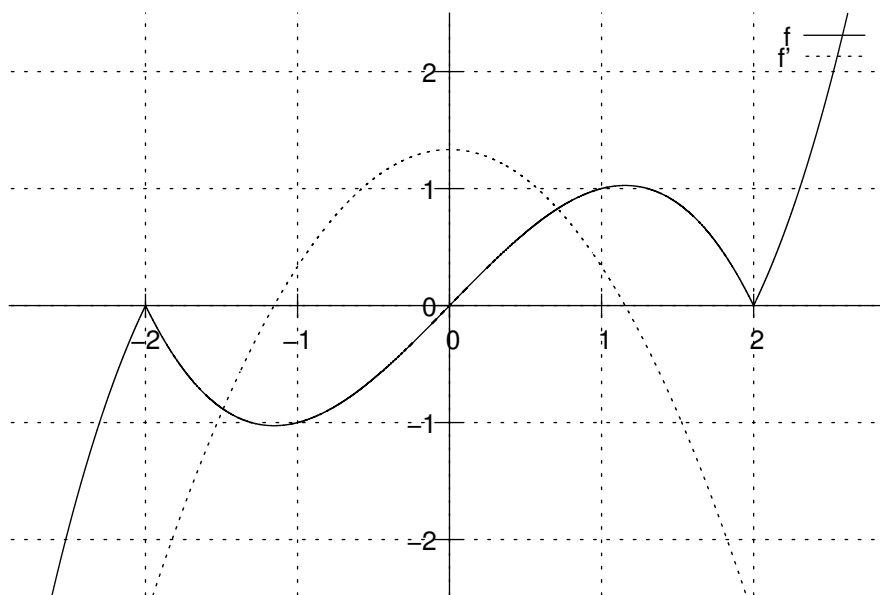
Wendepunkte

$$f''(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \in]-\infty, -2[\cup]2, \infty[; \\ -2x & \text{für } x \in]-2, 2[; \end{cases}$$

$$\pm 2x_5 = 0; \Rightarrow x_5 = 0;$$

$$\Rightarrow P_{\text{WEP},1}(0, 0);$$

Sowie: $P_{\text{WEP},2}(-2, 0); \quad P_{\text{WEP},3}(2, 0);$

**0.1.54 57. Hausaufgabe****Selbstgestellte Aufgabe**

$$f(x) = (x^2 - 2x)^2;$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2(x^2 - 2x) \cdot (2x - 2) = 4x^3 - 8x^2 - 4x^2 + 8x = 4x^3 - 12x^2 + 8x;$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^4 - 4x^3 + 4x^2)' = 4x^3 - 12x^2 + 8x;$$

0.1.55 58. Hausaufgabe

Bilde für den angegebenen Term $f(x)$ der Funktion $f: x \mapsto f(x)$; $x \in D_f$ den Ableitungsterm $f'(x)$! Bei welchen Aufgaben stimmt $D_{f'}$ nicht mit D_f überein?

Buch Seite 144, Aufgabe 1f

$$f(x) = (\sin x + 2 \cos x)^3; \quad D_f = \mathbb{R};$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3(\sin x + 2 \cos x)^2 (\cos x - 2 \sin x); \quad D_{f'} = D_f;$$

Buch Seite 144, Aufgabe 2

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f(x) &= \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}; \quad D_f = \mathbb{R}; \\ \Rightarrow f'(x) &= -\frac{2(x^2 + x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^4}; \quad D_{f'} = D_f; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad f(x) &= \frac{1}{(2 - \sin x)^2}; \quad D_f = \mathbb{R}; \\ \Rightarrow f'(x) &= 2 \frac{(2 - \sin x) \cdot \cos x}{(2 - \sin x)^4}; \quad D_{f'} = D_f; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad f(x) &= \frac{1}{(1 + \sqrt{x})^4}; \quad D_f = \mathbb{R}_0^+; \\ \Rightarrow f'(x) &= -4(1 + \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad D_{f'} = D_f; \end{aligned}$$

Buch Seite 145, Aufgabe 5e

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 2x + 3}; \quad D_f = \mathbb{R}; \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}}; \quad D_{f'} = D_f; \end{aligned}$$

Buch Seite 145, Aufgabe 6b

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \sqrt{x^2 + 1}; \quad D_f = \mathbb{R}; \\ \Rightarrow f'(x) &= \sqrt{x^2 + 1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}x; \quad D_{f'} = D_f; \end{aligned}$$

0.1.56 59. Hausaufgabe**Buch Seite 145, Aufgabe 14**

Gegeben ist die Funktion $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = y = \sqrt{4 - x^2}; \quad x \in D_{\max};$

a) Gib D_{\max} an!

$$\begin{aligned} 4 - x^2 &\geq 0; \Rightarrow 4 \geq x^2; \Rightarrow 2 \geq |x|; \\ \Rightarrow D_{\max} &= [-2, 2]; \end{aligned}$$

- b)** Differenziere φ und bestimme den Differenzierbarkeitsbereich $D_{\varphi'}$!

$$\varphi'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$\Rightarrow D_{\varphi'} = D_{\max} \setminus \{-2, 2\} =]-2, 2[;$$

- c)** Stelle die Gleichung der Normalen in einem beliebigen Punkt $P(x_0, y_0)$ des Funktionsgraphen G_{φ} auf und zeige, dass sie durch den Ursprung geht!

$$\frac{n(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{\varphi'(x_0)} = \frac{\sqrt{4-x_0^2}}{x_0};$$

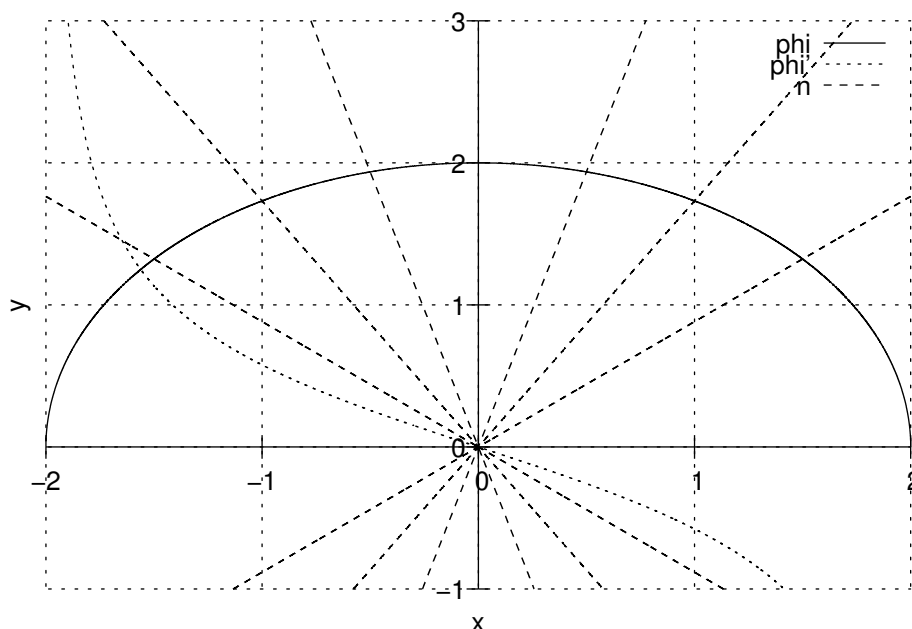
$$\Rightarrow n(x) = \frac{x}{x_0} \sqrt{4-x_0^2};$$

$$n(0) = \frac{0}{x_0} \sqrt{4-x_0^2} = 0; \Rightarrow \text{Die Normale in einem beliebigen Punkt } P(x_0, y_0) \text{ des Funktionsgraphen } G_{\varphi} \text{ geht durch den Ursprung};$$

- d)** Zeichne G_{φ} und erkläre das Ergebnis von Teilaufgabe c) geometrisch! Hinweis: Berechne $x^2 + y^2$!

$$x^2 + n(x)^2 = x^2 + \left(\frac{x}{x_0} \sqrt{4-x_0^2}\right)^2 = x^2 + 4 - x^2 = 2^2;$$

\Rightarrow Bei $\varphi(x)$ handelt es sich um einen Halbkreis mit dem Radius 2;



0.1.57 60. Hausaufgabe**Buch Seite 164, Aufgabe 22c mit W_f und Graph**

Bestimme die Wertemengen der folgenden Funktion mit Hilfe der Extremwerte und des Verhaltens an Unendlichkeitsstellen sowie für $x \rightarrow \pm\infty$!

$$f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}; \quad D_f = \mathbb{R};$$

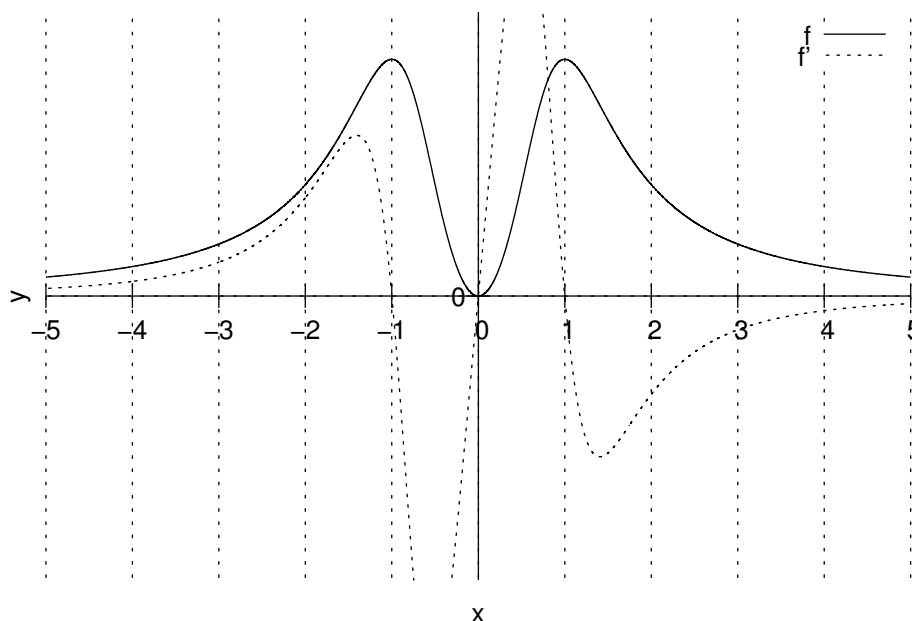
$$f(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty;$$

$$f'(x) = \frac{(x^4 + 1) \cdot 2x - x^2 \cdot 4x^3}{(x^4 + 1)^2} = \frac{2x^5 + 2x - 4x^5}{(x^4 + 1)^2} = \frac{-2x^5 + 2x}{(x^4 + 1)^2} = -2x \frac{x^4 - 1}{(x^4 + 1)^2};$$

Vorzeichenwechselanalyse gibt:

- f ist sms in $]-\infty, -1]$ und $[0, 1]$;
- f ist smf in $]-1, 0[$ und $]1, \infty[$;
- $P_{\text{HOP}}(-1, \frac{1}{2})$;
- $P_{\text{HOP}}(1, \frac{1}{2})$;
- $P_{\text{TIP}}(0, 0)$;

$$\Rightarrow W_f = \left[0, \frac{1}{2}\right];$$



0.1.58 61. Hausaufgabe**Aufgabe 2 der Test-SA**

Bestimme die ganzrationale Funktion f dritten Grades, deren Graph im Ursprung einen Wendepunkt hat. Außerdem hat der Graph im Punkt $P(2, 0)$ eine Tangente, die parallel zur Geraden $y = -8x + 1$ verläuft. (Kontrolle?)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c;$$

$$f''(x) = 6ax + 2b;$$

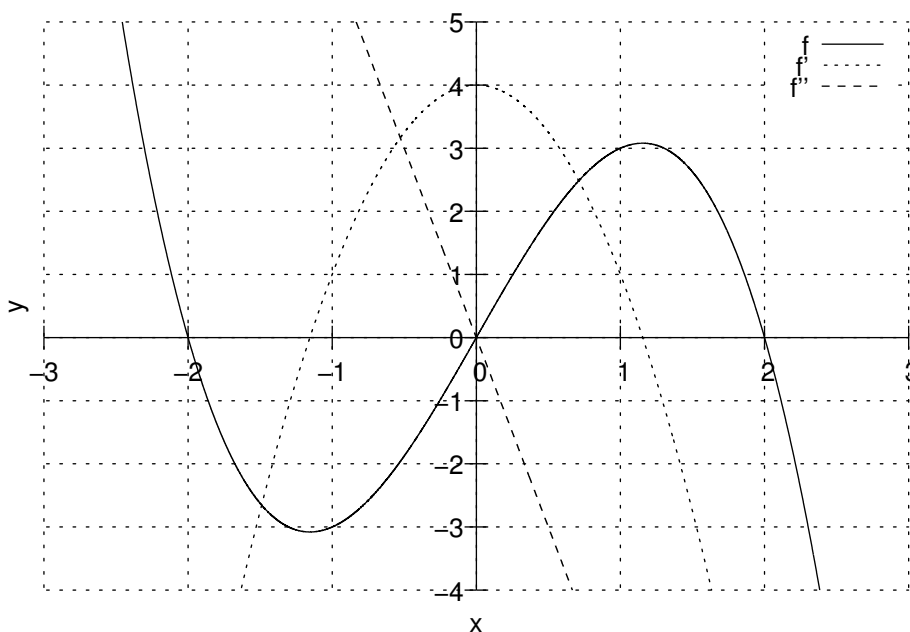
$$\text{I. } f(0) = 0; \quad \Rightarrow \quad d = 0;$$

$$\text{II. } f''(0) = 0; \quad \Rightarrow \quad 2b = 0; \Rightarrow b = 0;$$

$$\text{III. } f(2) = 0; \quad \Rightarrow \quad 8a + 2c = 8a - 16 - 24a = 0; \Rightarrow a = -1;$$

$$\text{IV. } f'(2) = -8; \quad \Rightarrow \quad 12a + c = -8; \Rightarrow c = -8 - 12a; \Rightarrow c = -8 + 12 = 4;$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^3 + 4x;$$

**Aufgabe 4 der Test-SA**

Betrachtet wird die Funktionenschar $f_t(x) = \frac{t}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$ mit $t \neq 0$.

- a) Für welche Werte des Parameters t besitzen die Funktionen f_t keine, genau eine, zwei waagrechte Tangenten?

$$f'_t(x) = tx^2 + 6x - 5 = 0;$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 20t}}{2t};$$

$$\Rightarrow 36 + 20t = 0; \Rightarrow t = -\frac{9}{5};$$

- Für $t < -\frac{9}{5}$: Keine waagrechten Tangenten
- Für $t = -\frac{9}{5}$: Genau eine waagrechte Tangente
- Für $t > -\frac{9}{5}$: Genau zwei waagrechte Tangenten

b) Zeige, dass die Kurven G_{f_t} genau einen Wendepunkt W besitzen und bestimme dessen Koordinaten in Abhängigkeit von t .

$$f''_t(x_W(t)) = 2tx_W(t) + 6 = 0; \Rightarrow x_W(t) = -\frac{3}{t};$$

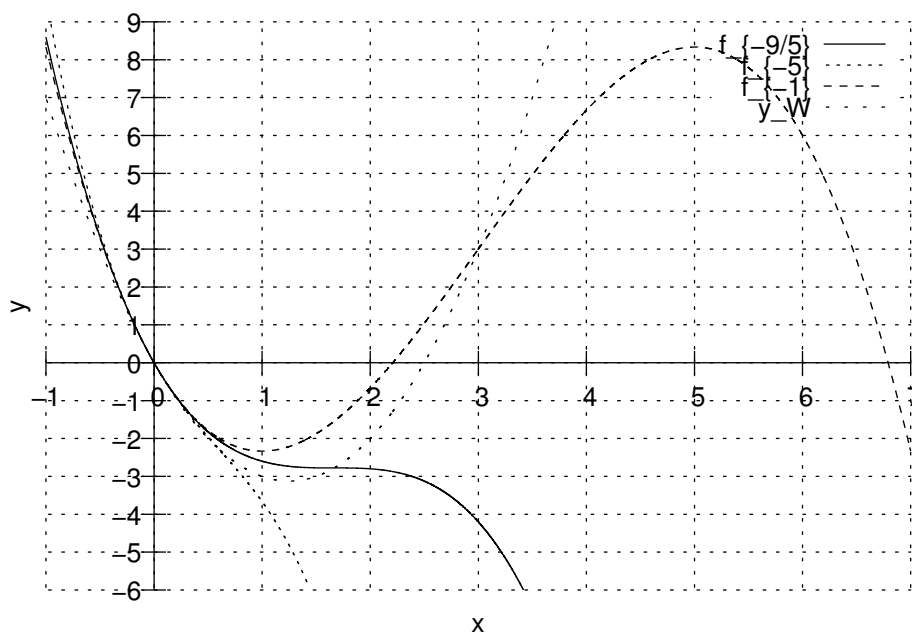
$$y_W(t) = f\left(-\frac{3}{t}\right) = \frac{15}{t} + \frac{18}{t^2} = 2\frac{3}{t} + 5\frac{3}{t};$$

c) Bestimme die Gleichung der Ortslinie, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen. Welcher Punkt dieser Kurve ist kein Wendepunkt der Schar? (Begründung!)

$$x_W(t) = -\frac{3}{t}; \Rightarrow t = -\frac{3}{x_W(t)}; \quad x \neq 0;$$

$$\Rightarrow y_W(x_W(t)) = y_W(x) = 2x^2 - 5x; \quad x \neq 0;$$

$(0, 0)$ ist kein Wendepunkt der Schar f_t .



0.1.59 62. Hausaufgabe**Aufgabe 3 der Test-SA**

Gegeben: $f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{2x-2}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

- a)** Bestimme die Monotoniebereiche von f und schließe damit auf die Art und Lage der Extrema von f .

$$f'(x) = \dots = 2x \frac{x-2}{(2x-2)^2};$$

f ist sms in $]-\infty, 0[$ und $]2, \infty[$;

f ist smf in $]0, 1[$ und $]1, 2[$;

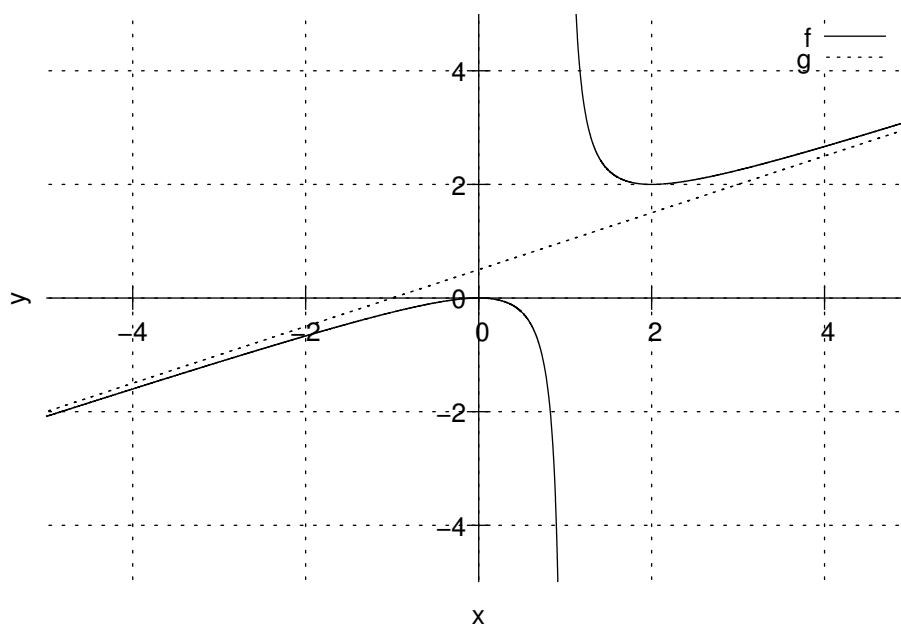
$P_{\text{HOP}}(0, 0)$; $P_{\text{TIP}}(2, 2)$; Uendlichkeitsstelle mit VZW bei $x = 1$;

- b)** Gegeben ist ferner die Funktion $g: x \mapsto g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Berechne $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)]$ und deute dieses Ergebnis geometrisch!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2x-2} - \frac{x+1}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - (x+1)(x-1)}{2(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - x^2 + 1}{2(x-1)} \right];$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty;$$

$g(x)$ ist eine Asymptote von $f(x)$;



0.1.60 63. Hausaufgabe**Selbstgestellte Aufgabe**

Einem Kreis mit Radius r soll das Rechteck mit maximalen Flächeninhalt einbeschrieben werden.

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = r^2; \Rightarrow a = \sqrt{r^2 - b^2}; \\ A(b) = 2a \cdot 2b; \end{array} \right\} \Rightarrow A(b) = 4b\sqrt{r^2 - b^2};$$

$$\Rightarrow A'(b_0) = 4\sqrt{r^2 - b_0^2} + 4b \frac{1}{2\sqrt{r^2 - b_0^2}} (-2b_0) = 4\sqrt{r^2 - b_0^2} - 4b^2 \left(\sqrt{r^2 - b_0^2}\right)^{-1};$$

$$\Rightarrow A'(b_0) = 0; \Rightarrow r^2 - b_0^2 = b_0^2;$$

$$\Rightarrow b_0 = \frac{|r|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} |r|;$$

$$\Rightarrow a_0 = \sqrt{r^2 - b_0^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} |r|;$$

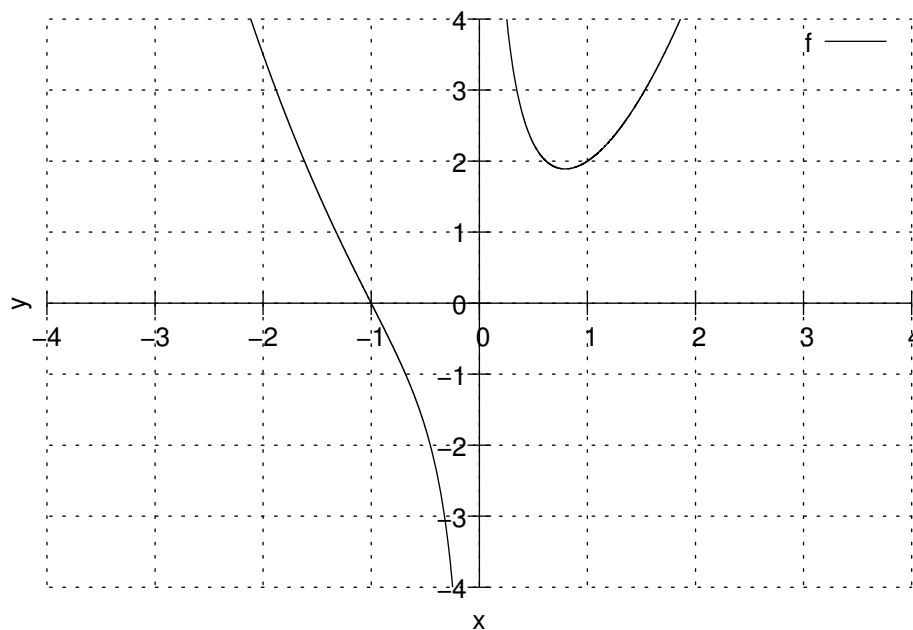
0.1.61 64. Hausaufgabe**Buch Seite 177, Aufgabe 1**

Gesucht ist eine reelle Zahl, für die die Summe aus Quadrat und Kehrwert so klein wie möglich wird.

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x};$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}; \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}};$$

Aber: f hat bei $x = 0$ eine Unendlichkeitsstelle mit VZW!



0.1.62 65. Hausaufgabe

Buch Seite 178, Aufgabe 16

Einem geraden Kreiskegel wird ein gerader Kreiszylinder eingeschrieben. Man zeige, dass das Zylindervolumen nicht größer sein kann als $\frac{4}{9}$ des Kegelvolumens.

$$g(x) = \frac{H}{R}x;$$

$$\Rightarrow h = g(R - r) = H \left(1 - \frac{r}{R}\right);$$

$$\Rightarrow v(r) = \pi r^2 H \left(1 - \frac{r}{R}\right) = \pi r^2 H - \pi r^3 \frac{H}{R};$$

$$\Rightarrow v'(r) = 2\pi r H - 3\pi r^2 \frac{H}{R} = 0; \Rightarrow r = \frac{2}{3}R;$$

$$\Rightarrow v_{\max} = v\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{9}\pi R^2 H \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}\pi R^2 H;$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H;$$

$$\Rightarrow \frac{v_{\max}}{V} = \frac{4}{9};$$