0.0.1 Zusammengesetzte Funktionen und Kettenregel

Sei $\mathrm{f}(x) = \mathrm{h}(\mathrm{g}(x)) = \mathrm{h}(u)$ mit $u = \mathrm{g}(x)$ und $u_0 = \mathrm{g}(x_0)$;

Differenzenquotient an der Stelle x_0:

$$\mathrm{D}(x_0) = \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)}{x - x_0} = \frac{\mathrm{h}(\mathrm{g}(x)) - \mathrm{h}(\mathrm{g}(x_0))}{x - x_0} = \frac{\mathrm{h}(u) - \mathrm{h}(u_0)}{x - x_0} = \frac{\mathrm{h}(u) - \mathrm{h}(u_0)}{u - u_0} \cdot \frac{u - u_0}{x - x_0} = \frac{\mathrm{h}(u) - \mathrm{h}(u_0)}{u - u_0} \frac{\mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(x_0)}{x - x_0};$$

Für $x \to x_0$ folgt:

$$\mathrm{f}'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{h}(u) - \mathrm{h}(u_0)}{u - u_0} \frac{\mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(x_0)}{x - x_0} = \mathrm{h}'(u_0) \cdot \mathrm{g}'(x_0);$$

Die Kettenregel

Ist $\mathrm{g}(x)$ an der Stelle x_0 und $\mathrm{h}(u)$ and der Stelle $u_0 = \mathrm{g}(x_0)$ diffbar, so ist auch die Verkettung $\mathrm{f}(x) = \mathrm{h}(\mathrm{g}(x))$ an der Stelle x_0 diffbar und es gilt:

$$\mathrm{f}'(x_0) = \mathrm{h}'(u_0) \cdot \mathrm{g}'(x_0) = \mathrm{h}'(\mathrm{g}(x_0)) \cdot \mathrm{g}'(x_0);$$

Ableitung von Quotienten

$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{v(x)}; \Rightarrow \mathrm{f}'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2};$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \left[u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}\right] = \frac{u'(x)}{v(x)} + \frac{-u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2};$$

Kurz: $\left(\frac{u}{v}\right)'$ „=“ $\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$; (Quotientenregel)

Merkregel: „Z/W = (N*AZ - Z*AN)/N^2“

Die Regel von L´Hospital

Mittelwertsatz: In $]a, b[$ gibt es mindestens eine Stelle x_0 mit $\mathrm{f}'(x_0) = \dfrac{\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)}{b - a}$.

$\Rightarrow \mathrm{f}(b) = \mathrm{f}(a) + (b - a)\,\mathrm{f}'(x_0);$

Mit $b = a + h$;

$\Rightarrow \mathrm{f}(a + h) = \mathrm{f}(a) + h\mathrm{f}'(x_0);$

$x_0 = a + \vartheta h; \quad (0 < \vartheta < 1)$

$\Rightarrow \mathrm{f}(a+h) = \mathrm{f}(a) + h\mathrm{f}'(a+\vartheta h);$

Regel von L´Hospital: $\mathrm{f}(x) = \dfrac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)};$

Gesucht: $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{f}(x)$, wobei $\mathrm{u}(a) = \mathrm{v}(a) = 0;$

Falls $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{u}'(x)}{\mathrm{v}'(x)}$ existiert, so gilt

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)} = \dfrac{\mathrm{u}'(x)}{\mathrm{v}'(x)};$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{u}(a+h)}{\mathrm{v}(a+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{u}(x) + h\mathrm{u}'(x)(a+\vartheta_1 h)}{\mathrm{v}(x) + h\mathrm{v}'(x)(a+\vartheta_2 h)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\mathrm{u}'(x)(a+\vartheta_1 h)}{h\mathrm{v}'(x)(a+\vartheta_2 h)} =$
$\dfrac{\mathrm{u}'(x)}{\mathrm{v}'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)};$