Mathematik: Infinitesimalrechnung

Ingo Blechschmidt

11. Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik: Infinitesimalrechnung

1.1 Schulheft

1.1.1 Funktion

Unter dem Begriff „Funktion“ versteht man eine eindeutige Zuordnung einer Ausgangsmenge (Definitionsmenge $\mathbb{D}$) auf eine Bildmenge (Wertemenge $\mathbb{W}$):

$$x \in \mathbb{D} \longmapsto y \in \mathbb{W}$$

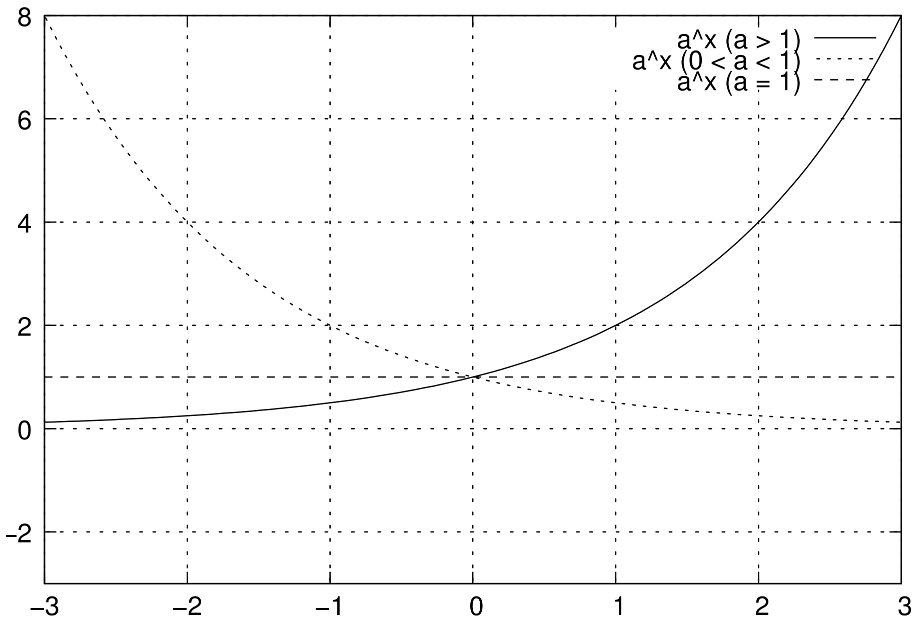
1.1.2 Typen von mathematischen Funktionen

Polynomfunktionen:

- Konstante Funktion: $f(x) = c$
- Lineare Funktion: $f(x) = mx + t$
- Quadratische Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Kubische Funktion: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Exponentialfunktion:

$f(x) = a^x (a > 0)$



Logarithmusfunktion:

$f(x) = \log_b x$ ($b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Wurzelfunktion:

$f(x) = \sqrt{x}$ ($\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{W}$)

Trigonometrische Funktionen:

- $\sin x, \mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $\cos x, \mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $\tan x, \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Gebrochenrationale Funktionen:

Z.B.: $\frac{1}{x}$, $\frac{2x}{x^2-1}$, $\frac{3x^5-7x}{5x^3+2x+1}$

Lineare Funktionen: $f(x) = mx + t$

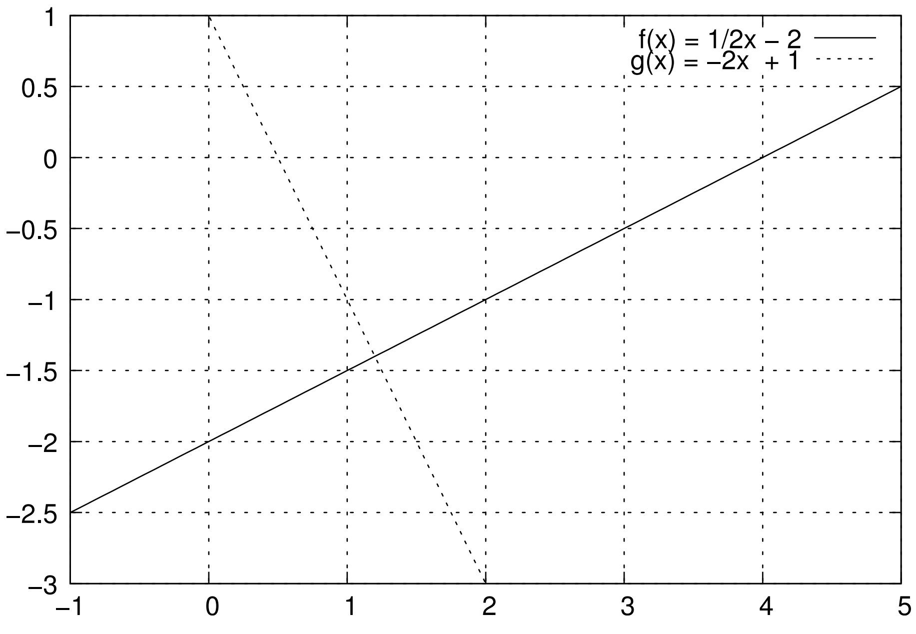
m**:**

Steigung

t**:**

y-Abschnitt

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$



m**:**

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Longrightarrow x = 4 \Longrightarrow N(4;0)$

Schnittpunkt mit y-Achse:

$T(0;-2)$

Aufgabe: Schnittpunkts- und Winkelberechnung zwischen f und $g(x) = -2x+1$

Schnittpunkt:

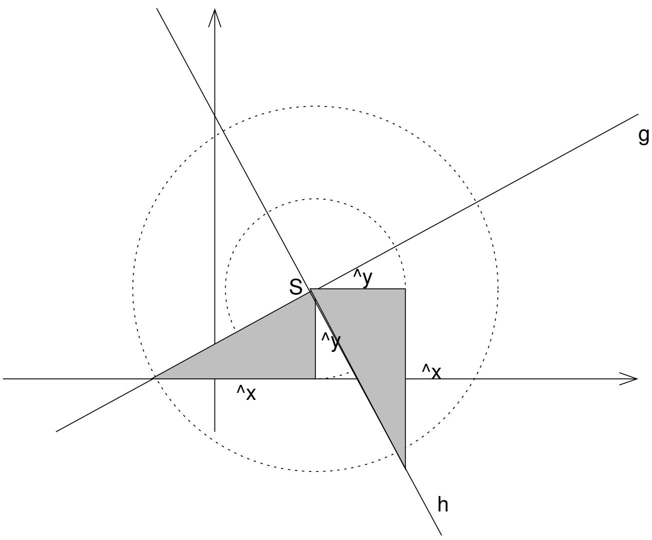
$f(x) = g(x) \Longrightarrow x = \frac{6}{5}$

Winkel:

$\tan(\arctan m_g - \arctan m_f) = \tan -\frac{\pi}{2} =$ undefiniert

$\Rightarrow f$ steht senkrecht auf g (auch wegen $m_g = -\frac{1}{m_f}$).

Senkrechte Geraden

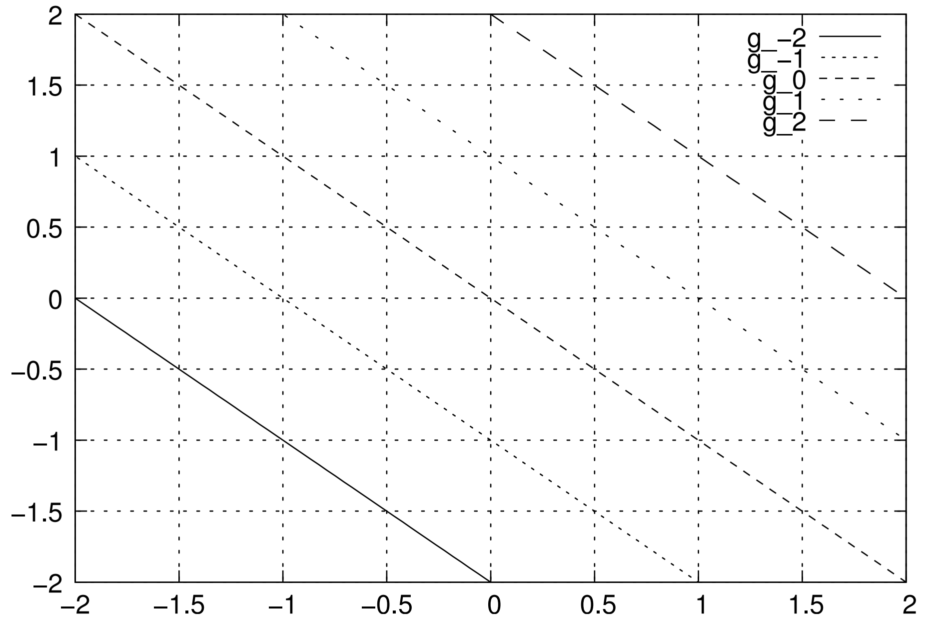


$m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$m_h = -\frac{\Delta x}{\Delta y}$

$\Rightarrow m_g \cdot m_h = -1$ (Kennzeichen für senkrechte Geraden)

Geradenscharen

Beispiel: $g_k : x + y - k = 0; k \in \mathbb{R}; \Longrightarrow y = -x + k;$ (Parallelenschar)



Zusatzaufgabe zur 2. Hausaufgabe:

Nimmt der Flächeninhalt $A(t)$ beliebige Werte aus $\mathbb{R}_0^+$ an?

Untersuchung für $t \geq 0$:

$A(t) = \frac{t^2+1}{t}, t \neq 0;$

Untersuchung der Wertemenge von $A(t)$:

Gibt es zu jedem Wert $A \in \mathbb{R}^+$ einen t-Wert?

$A = \frac{t^2+1}{t}; \Longrightarrow 0 = t^2 - 2At + 1; \Longrightarrow t = \frac{2A \pm 2\sqrt{A^2-1}}{2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1};$

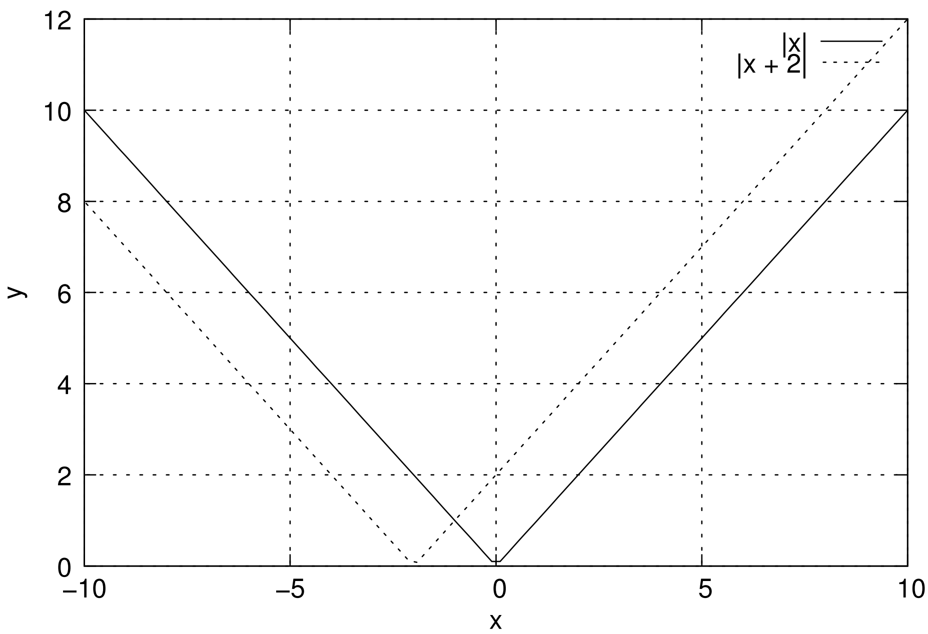
$A^2 - 1 \geq 0; \Longrightarrow A \geq 1; \Longrightarrow \mathbb{W}_A = [1; \infty[$

$\Rightarrow$ Bei $A = 1$: $t = 1 \Rightarrow$ Neigungswinkel $45°$;

Stückweise lineare Funktionen

Die Betragsfunktion $x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0; \\ -x & \text{falls } x < 0; \end{cases}$

Graph:



Abwandlungen:

1. $f(x) = |x+2| = \begin{cases} -(x+2) & \text{für } x \leq -2; \\ x+2 & \text{für } x > 2; \end{cases}$

Die Signum-Funktion

$$x \mapsto \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0; \\ 0 & \text{wenn } x = 0; \\ -1 & \text{wenn } x < 0; \end{cases}$$

Zusammenhang: $x \cdot \operatorname{sgn} x = |x|$, $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$;

Quadratische Funktionen

Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0$;

Bestimme die Gleichung der Parabel durch die Punkte $P\left(-2; -\frac{5}{4}\right)$, $Q\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ und $R\left(1; \frac{7}{4}\right)$.

$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - \frac{5}{4}$; $\Rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet;

1.1.3 Monotonie von Funktionen

f heißt in einem Berech $[a;b]$ monoton steigend (fallend), wenn für alle $x_1, x_2 \in [a;b]$ mit $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) folgt.

Gilt außerdem $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), so liegt **strenge** Monotonie vor.

Methode zur Untersuchung: Man betrachtet die Vorzeichen von $f(x_2) - f(x_1)$.

1.1.4 Einschub zur Symmetrie

- $f(-x) = f(x)$; $\Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse
- $f(-x) = -f(x)$; $\Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung

1.1.5 Infimum und Supremum

Die größte untere Schranke einer Menge heißt Infimum.

Die kleinste obere Schranke einer Menge heißt Supremum.

1.1.6 Umkehrfunktion

Ziel: Abbildung rückgänig machen, d.h.: $f^{-1}\Big(f(x)\Big) = x$;

$x \in \mathbb{D}_f \xrightarrow{f} y \in \mathbb{W}_f = \mathbb{D}_{f^{-1}} \xrightarrow{f^{-1}} x \in \mathbb{D}_f = \mathbb{W}_{f^{-1}}$;
Schritte:

1. Auflösen nach x
2. Vertauschen von x mit y

G_f und $G_{f^{-1}}$ sind spiegelbildlich bezüglich der Geraden $y = x$.

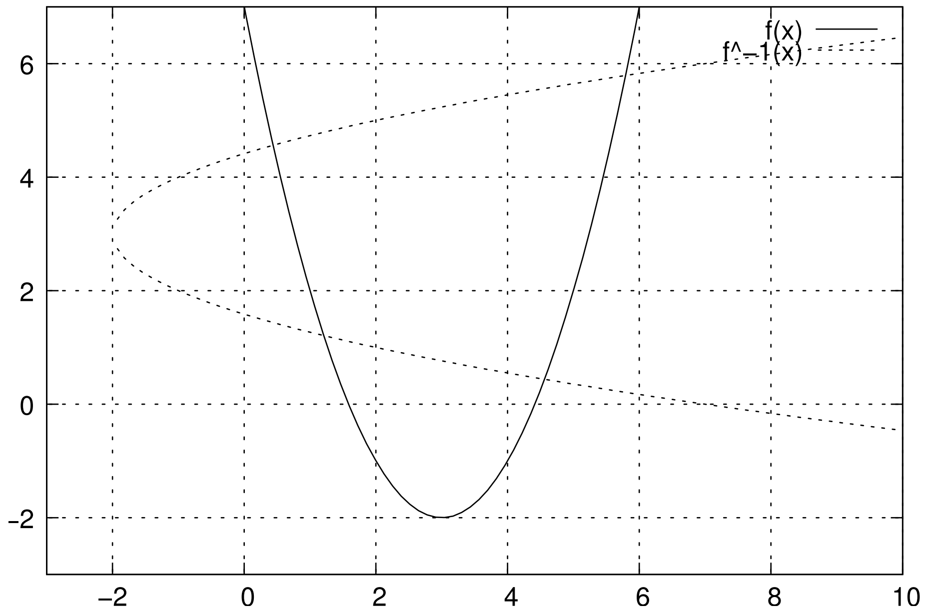
f ist **umkehrbar**.

Umkehrung einer quadratischen Funktion

Beispiel: $f(x) = (x-3)^2 - 2; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}; \mathbb{W}_f = [-2; \infty[\,;$

Auflösen nach x: $x = 3 \pm \sqrt{y+2}$;

$\Rightarrow$ f ist nicht umkehrbar.



Monotoniekriterium für Umkehrbarkeit:

> Eine Funktion ist dann umkehrbar, wenn sie streng monoton ist.

Zerlegung von f in zwei streng monotone Teile:

- $f_1(x) = (x-3)^2 - 2;$
  $\mathbb{D}_{f_1} =]-\infty; 3]\,;$
  $\mathbb{W}_{f_1} = [-2; \infty[\,;$
- $f_2(x) = (x-3)^2 - 2;$
  $\mathbb{D}_{f_2} =]3; \infty]\,;$
  $\mathbb{W}_{f_2} =]-2; \infty[\,;$

Umkehrung: $y = 3 \pm \sqrt{2+x}$;

- $f_1^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+2};$
  $\mathbb{D}_{f_1^{-1}} = \mathbb{W}_{f_1} = [-2; \infty[\,;$
  $\mathbb{W}_{f_1^{-1}} = \mathbb{D}_{f_1} =]-\infty; 3]\,;$
- $f_2^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+2};$
  $\mathbb{D}_{f_2^{-1}} = \mathbb{W}_{f_2} =]-2; \infty[\,;$
  $\mathbb{W}_{f_2^{-1}} = \mathbb{D}_{f_2} =]3; \infty]\,;$

1.1.7 Erweiterte Symmetriebetrachtung

Symmetrie zur Achse $x = x_0$

$$f(x_0 - h) = f(x_0 + h); h \in \mathbb{R}^+;$$

Ansatz: $f(x_0 - h) - f(x_0 + h) = \ldots = 0;$

Symmetrie zu $P(x_0; y_0)$

$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2} = \ldots = y_0;$$

1.1.8 Rationale Funktionen

Rationale Funktionen haben die Form $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ wobei $Z(x)$ und $N(x)$ Polynome sind.

$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x|N(x) = 0\}\,;$

Einteilung der Definitionslücken

- Unendlichkeitsstellen (Polstellen)

  mit VZW:
  Linearfaktor mit ungerader Potenz

  ohne VZW:
  Linearfaktor mit gerader Potenz

- „Lochstellen“: Linearfaktor des Nenners kommt im Zähler mindestens mit gleicher Vielfachheit vor.

1.1.9 Folgen

1. Natürliche Zahlen: $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$
2. Ungerade Zahlen: $1, 3, 5, 7, \ldots, 2\nu + 1$ mit $\nu \in \mathbb{N}_0$
3. $7, 14, 21, \ldots, 7\nu$ mit $\nu \in \mathbb{N}$
4. $9, 16, 23, 30, \ldots, 7\nu + 2$ mit $\nu \in \mathbb{N}$
5. $1, 3, 9, 25, \ldots, 3^{\nu-1}$ mit $\nu \in \mathbb{N}$

Zahlenfolgen sind Funktionen mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$.

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} f:\quad & \nu \mapsto f(\nu) = (-1)^\nu \cdot \tfrac{1}{\nu}; \nu \in \mathbb{N}; \\ & 1 \mapsto a_1 = -1; \\ & 2 \mapsto a_2 = \tfrac{1}{2}; \\ & 3 \mapsto a_3 = -\tfrac{1}{3}; \\ & 4 \mapsto a_4 = \tfrac{1}{4}; \end{aligned}$$

$\langle a_\nu \rangle$ ist eine alternierende Folge.

- Bei arithmetischen Folgen gilt:

  $a_{\nu+1} = a_\nu + d; d \in \mathbb{R};$

- Bei geometrischen Folgen gilt:

  $a_{\nu+1} = a_\nu \cdot q; q \in \mathbb{R};$

Geometrische Folgen

$a_{\nu+1} = a_\nu \cdot q; q \in \mathbb{R}; \Rightarrow \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = q;$

$\Rightarrow$ Allgemeines Glied der geometrischen Folge: $a_\nu = a_1 \cdot q^{\nu-1};$

Für $q > 1$ ($0 < q < 1$) und $a_1 > 0$ ist $\langle a_\nu \rangle = \{a_1 \cdot q^{\nu-1} | v \in \mathbb{N}\}$ sms und nach oben nicht beschränkt (smf).

Der Luftdruck als geometrische Folge

$p(h) = p_0 \cdot 0{,}882^{\frac{h}{\mathrm{km}}};$

1.1.10 Reihen

Die Glieder einer (endl.) Folge werden aufsummiert:

$$a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu; \qquad n \in \mathbb{N};$$

Geometrische Reihen

$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_1 q^{\nu-1} = a_1 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} q^{\nu-1} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}; \qquad q \neq 1;$

1.1.11 Grenzwerte

Grenzwerte von Funktionen für $|x| \to \infty$

Allgemein: $f(x)$ hat für $x \to \infty$ den Grenzwert 0, wenn $|x|$ jede noch so kleine positive Zahl (meist stellvertretend mit ε bezeichnet) unterschreitet, wenn man nur x genügen groß macht.

x_s bezeichnet man auch als „Schwellenwert".

$f(x)$ hat für $x \to -\infty$ den Grenzwert 0, wenn es zu jedem noch so kleinen positiven ε einen Schwellenwert x_s gibt, so dass **für alle** $x < x_s$ gilt: $|f(x)| < \varepsilon$;

Def.: $f(x)$ hat für $x \to \infty$ ($x \to -\infty$) den Grenzwert a, wenn es zu jedem noch so kleinen positiven ε einen Schwellenwert x_s gibt, so dass für alle $x > x_s$ ($x < x_s$) gilt: $|f(x) - a| < \varepsilon$;

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0; \qquad a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N};$

Regeln für Grenzwerte

Sind f und g Funktionen mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = b$, dann gilt:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = a \pm b;$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = a \cdot b;$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)} = \frac{a}{b}; \qquad b \neq 0; \qquad g(x) \neq 0$ für „hinreichend" große x;

Zusatz für Funktionen mit **bestimmter** Divergenz:

Aus $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ folgt: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$;

Analoge Sätze gelten für $x \to -\infty$.

Es gibt drei Fälle bei gebrochen rationalen Funktionen:

- Zählergrad $<$ Nennergrad $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$;
- Zählergrad = Nennergrad $\Rightarrow$ f ist konvergent;
- Zählergrad $>$ Nennergrad $\Rightarrow$ f ist divergent;

Schrankenfunktion (Majoranten)

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x$;

Vermutung: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$;

$|f(x)| = \left|\frac{1}{x} \cdot \sin x\right| = \frac{1}{2} \cdot |\sin x| \leq \frac{1}{x} \to 0$ für $x \to \infty$;

$\Rightarrow f(x) \to 0$ für $x \to \infty$; ($\frac{1}{x}$ ist Majorante für $|f(x)|$.)

f hat für $x \to \infty$ die Asymptote $y = g(x)$, wenn gilt: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0$;

Grenzwerte von Zahlenfolgen

Allgemein gilt: Die geometrische Folge $a_\nu = a \cdot q^{\nu-1}$ ist für $|q| < 1$ konvergent mit dem Grenzwert Null.

Grenzwert der unendlichen geometrischen Reihe

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{a}{q-1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(q^n - 1) = \frac{a}{1-q}$; für $|q| < 1$;

Ergebnis: Für $|q| < 1$ hat die geometrische Reihe $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} aq^{\nu-1}$ für $n \to \infty$ den Grenzwert $\frac{a}{1-q}$.

Grenzwert bei Funktionen für $x \to x_0$

Def.: f hat für $x \to x_0$ den Grenzwert a, wenn f in einer Umgebung von x_0 definiert ist und wenn gilt: $|f(x) - a| < \varepsilon$ (mit $\varepsilon > 0$) falls nur x „genügend" nahe bei x_0 gewählt wird.

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$;

Methoden zur Berechnung:

„Kürzen"

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+1) = 2+1 = 3;$

„h-Methode"

Untersuchung in der „Nähe" von x_0 durch die Substitution $x = x_0 \pm h$ (mit $h > 0$).

Im Beispiel: $\lim\limits_{x \to 2+} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{4+4h+h^2-2-h-2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{3h+h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(3+h) = 3+0 = 3;$

Zusammenfassung: Beim $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

$x_0 \in D_f$

a) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$;
Grenzwert existiert nicht, Divergenz, Sprungstelle

b) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq f(x_0)$;
Grenzwert existiert (Konvergenz), f ist an der Stelle x_0 **nicht stetig**.

c) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$;
Grenzwert existiert, f ist an der Stelle x_0 **stetig**.

$x_0 \notin D_f$

a) $|f(x)| \to \infty$ für $x \to x_0+$ oder $x \to x_0-$;
Unendlichkeitsstelle (mit bzw. ohne VZW), Divergenz

b) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x);$
Konvergenz, „Lochstelle“ (stetig ergänzbare Definitionslücke)

c) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x);$ (aber beide Grenzwerte endlich)
Divergenz, gelochte Sprungstelle

Ergänzungen:

- Eine Funktion f ist an der Stelle $x_0 \in D_f$ **stetig**, wenn gilt:
  $\lim\limits_{x \to x_0-} = \lim\limits_{x \to x_0+} = f(x_0);$
- Für die Grenzwerte $x \to x_0$ gelten die bekannten Grenzwertsätze in analoger Weise.

1.1.12 Differentialrechnung

Einführung

Steigung einer Kurve im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ – Tangente:

Wir wählen einen benachbarten Punkt $P(x; y)$ und bestimmen die Steigung m_s der Sekante P_0P.

$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0};$ (Differenzenquotient)

Wander der Punkt P auf der Kurve gegen den festen Punkt P_0, so strebt die zugehörige Sekante einer Grenzlage zu, mit der Steigung m_t (Tangentensteigung).

$$P \to P_0; \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & \to & x_0; \\ y & \to & y_0; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & \to & x_0; \\ f(x) & \to & f(x_0); \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

(Differentialquotient von f an der Stelle x_0)

Def.: Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ heißt an der Stelle $x_0 \in D_f$ differenzierbar, wenn die zugehörige Differenzenquotientenfunktion $m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ mit $x \in D_f \setminus \{x_0\}$ an der Stelle x_0 stetig ergänzbar ist, d.h. wenn $m_t = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (Differentialquotient) existiert. Der Grenzwert wird auch als **Ableitung** von f an der Stelle x_0 bezeichnet und man schreibt dafür $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$

Beispiele: Ableitung an der Stelle x_0:

- Quadratfunktion:
  $f(x) = x^2;$
  $\Rightarrow f'(x_0) = 2x_0;$
- Identische Funktion:
  $f(x) = x;$
  $\Rightarrow f'(x_0) = 1;$
- Konstante Funktion:
  $f(x) = c;$
  $\Rightarrow f'(x_0) = 0;$
- Kubische Funktion:
  $f(x) = x^3;$
  $\Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2;$
- Betragsfunktion an der Stelle $x_0 = 0$:
  $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0; \\ x & \text{für } x > 0; \end{cases}$
  Rechtsseitige Ableitung: $f_r'(0) = \ldots = 1;$
  Linksseitige Ableitung: $f_l'(0) = \ldots = -1;$
  $|x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht diffbar (Knickstelle).
- Wurzelfunktion:
  $f(x) = \sqrt{x};$
  $f'(x_0) = \ldots = \frac{1}{2\sqrt{x_0}};$
- Reziproke Funktion:
  $f(x) = \frac{1}{x};$
  $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x_0 - x}{x x_0 \left(x - x_0\right)} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2};$$

Die Ableitungsfunktion

Def.: Ist die Funktion f für alle $x \in D_f$ diffbar, so heißt f **in** $\mathrm{D_f}$ **diffbar**. Man nennt dann die Funktion $f' : x \mapsto f'(x); \quad x \in D_f$ die Ableitungsfunktion (kurz die Ableitung) von f. Die Rechenoperation, die f überführt in f', nennt man **Ableiten** oder **Differenzieren**.

Andere Schreibweisen für f': y', $f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; („$\mathrm{d}y$ nach $\mathrm{d}x$“), $f'(x) = \dot{f}(t)$;

Merke: Ist f an der Stelle x_0 diffbar, so ist f dort auch stetig. (Notwendig für die Diffbarkeit ist Stetigkeit.)

f diffbar; $\Rightarrow$ f stetig;

f nicht stetig; $\Rightarrow$ f nicht diffbar;

Ableitungsregeln

- Ableitung einer Summe: $f(x) = u(x) + v(x)$;

  $$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)+v(x)-u(x_0)-v(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} + \frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right] = \\ &= u'(x_0)+v'(x_0); \end{aligned}$$

  (Summenregel)

- Konstanter Faktor: $f(x) = k \cdot u(x)$;

  $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{ku(x)-ku(x_0)}{x-x_0} = k \cdot u'(x_0)$; (Faktorregel)

  Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten!

- Ableitung eines Produkts: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$;

  $$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x)+u(x_0)v(x)+u(x_0)v(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0}\left[v(x)\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} + u(x_0)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right] = \\ &= u'(x_0)v(x_0)+v'(x_0)u(x_0); \end{aligned}$$

  (Produktregel)

  Kurz: $(uv)' = u'v + v'u$;

Tangente und Normale in einem Kurvenpunkt

Die Ableitung der Sinusfunktion

a) Im Ursprung

$f(x) = \sin x; \quad \sin(-x) = \sin x;$ ⇒ Symmetrie zum Ursprung

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \varphi(x);$$

$\varphi(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin(x)}{x} = \varphi(x);$ ⇒ Symmetrie zur y-Achse

Abschätzung für $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

Flächenvergleich:

[Abbildung: $\sin x$, x und $\tan x$ am Einheitskreis]

$$\begin{array}{ccccc} A_{\triangle OPQ} & < & A_{\sphericalangle OPQ} & < & A_{\triangle ORQ}; \\ \frac{1}{2}\sin x & < & \pi r^2 \frac{x}{2\pi} & < & \frac{1}{2}\tan x; \\ \sin x & < & x & < & \tan x; \\ 1 & < & \frac{x}{\sin x} & < & \frac{1}{\cos x}; \\ 1 & > & \frac{\sin x}{x} & > & \cos x; \end{array}$$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$ (Wichtiger Grenzwert!)

Zusatz: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1;$

Beispiel: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x \cdot \frac{2}{3}}{\sin 3x} = \frac{2}{3};$

b) Ableitung von $f(x) = \sin ax$ an der Stelle x_0

$$x \to x_0:\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin ax - \sin ax_0}{x - x_0} = \frac{2\cos\frac{ac+ax_0}{2}\sin\frac{ax-ax_0}{2}}{x - x_0} = \frac{2\cos\left[\frac{a}{2}(x+x_0)\right]\sin\left[\frac{1}{2}(x-x_0)\right]}{(x-x_0)\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a}};$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\left\{a\cdot\cos\left[\frac{a}{2}(x-x_0)\right]\frac{\sin\left[\frac{a}{2}(x-x_0)\right]}{\frac{a}{2}(x-x_0)}\right\} = a\cdot\cos ax_0;$$

Ergebnis: $(\sin ax)' = a\cdot\cos ax;$

analog: $(\cos ax)' = -a\cdot\sin ax;$

speziell: $(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$

Ableitung von Bewegungsgleichungen

Momentangeschwindigkeit aus der Weg-Zeit-Gleichung

$x(t) = \frac{1}{2}at^2;$

$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t};$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 - \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \dot{x}(t_0);$$

Allgemein: $v(t) = \dot{x}(t) = at;$

Momentanbeschleunigung aus der Zeit-Geschwindigkeits-Gleichung

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = \dot{v}(t_0) = \ddot{x}(t_0);$$

$\Rightarrow a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = \text{const.};$

Bestimmung von Parabelscheiteln

Der Scheitel liegt dort, wo die Tangente die Steigung $m_t = f'(x) = 0$ hat.

Monotoniebereiche – relative Extrema

Merke: Ist $f'(x)$ im Intervall $I =]a, b[$ positiv (negativ), so ist $f(x)$ ist I streng monoton steigend (fallend).

Mögliche Kurvenverläufe:

a) $f'(x_0) > 0;$

b) $f'(x_0) < 0;$

c) $f'(x_0) = 0;$

$f'(x_0)$ wechselt das Vorzeichen von $-$ nach $+$: Rel. Minimum (TIP)

$f'(x_0)$ wechselt das Vorzeichen von $+$ nach $-$: Rel. Maximum (HOP)

$f'(x_0)$ wechselt das Vorzeichen nicht: Terassenpunkt (TEP)

Notwendige Bedingung für ein relatives Extremum an der Stelle x_0: $f'(x_0) = 0;$

Hinreichende Bedingung für ein Extremum ist ein VZW von $f'(x_0)$.

Alternativ: Die Ableitung von f hat ein Extremum, d.h. $f''(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung). Hinreichend für einen TEP ist, wenn gilt: $f''(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$ hat einen VZW.

Ergänzung: Hinreichendes Kriterium für ein Extremum an der Stelle x_0 ist, wenn gilt: $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$, und zwar Minimum für $f''(x_0) > 0$ und Maximum für $f''(x_0) < 0$.

[Stetigkeit: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} = f(x_0)$;]

[Diffbarkeit an der Stelle x_0 $\Rightarrow$ Stetigkeit an der Stelle x_0]

[Grenzwert des Diffquotienten an der Stelle x_0 existiert $\Rightarrow$ Diffbarkeit an der Stelle x_0]

1.1.13 Eigenschaften von intervallweise stetigen Funktionen

Extremwertsatz

Ist f im **abgeschlossenen** Intervall $[a, b]$ stetig, so ist f dort **beschränkt** und besitzt ein absolutes Maximum und Minimum.

Zwischenwertsatz

Ist f im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und ist $\mathrm{f}(a) \neq \mathrm{f}(b)$, so nimmt die Funktion jeden Zwischenwert y_0 zwischen $\mathrm{f}(a)$ und $\mathrm{f}(b)$ mindestens einmal an. D.h., es gibt zu jedem $y_0 \in [\mathrm{f}(a), \mathrm{f}(b)]$ mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $\mathrm{f}(x_0) = y_0$.

„Von f wird kein Wert zwischen $\mathrm{f}(a)$ und $\mathrm{f}(b)$ ausgelassen.“

Nullstellensatz

Ist f in $[a, b]$ stetig und sind die Vorzeichen von $\mathrm{f}(a)$ und $\mathrm{f}(b)$ verschieden, so gibt es in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle x_0 mit $\mathrm{f}(x_0) = 0$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist f im **abgeschlossenen** Intervall $[a, b]$ stetig und im offenen Intervall $]a, b[$ diffbar, so gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in\,]a, b[$, für die gilt: $\mathrm{f}'(x_0) = \dfrac{\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)}{b - a}$;

Geometrische Deutung: Es gibt in $]a, b[$ eine Stelle x_0, an der die Tangente an G_f parallel ist zur Sekante $(a, \mathrm{f}(a))$ und $(b, \mathrm{f}(b))$.

Anwendung zur linearen Approximation:

Sei $I = [x_0, x_0 + h]$. Dann gilt mit $d \in\,]0, 1[$:

$\mathrm{f}'(x_0 + d \cdot h) = \dfrac{\mathrm{f}(x_0 + h) - \mathrm{f}(x_0)}{x_0 + h - x_0}; \Rightarrow$

$\mathrm{f}(x_0 + h) = \mathrm{f}(x_0) + h \cdot \mathrm{f}'(x_0 + d \cdot h); \Rightarrow$

$\mathrm{f}(x_0 + h) \approx \mathrm{f}(x_0) + h \cdot \mathrm{f}'(x_0)$;

1.1.14 Näherung des Sinus für kleine Winkel

$\sin h \approx \sin 0 + h \cdot \cos 0 = h$; ($h$ klein)

Ergebis: Für Winkel $\lessapprox 10^\circ$ gilt die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ (Bogenmaß).

1.1.15 Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Die Steigung von f wird durch f' beschrieben, also ist das Abnahme- bzw. Zunahmeverhalten von von f' zu beurteilen $\rightarrow$ Untersuchung von $(\mathrm{f}')' = \mathrm{f}''$

- $\mathrm{f}''(x_0) < 0; \Rightarrow \mathrm{f}'(x_0)$ ist smf; $\Rightarrow \mathrm{f}$ ist rechtsgekrümmt;
- $\mathrm{f}''(x_0) > 0; \Rightarrow \mathrm{f}'(x_0)$ ist sms; $\Rightarrow \mathrm{f}$ ist linksgekrümmt;

Merke:

- f ist r**e**chtsgekrümmt; $\Leftrightarrow$ „f''“ ist n**e**gativ;
- f ist **li**nksgekrümmt; $\Leftrightarrow$ „f''“ ist pos**iti**v;

Eine Stelle $x_0 \in D_\mathrm{f}$ heißt Wendepunkt von f, wenn der Graph an der Stelle x_0 sein Krümmungsverhalten wechselt. f'' wechselt damit an der Stelle x_0 das Vorzeichen. An der Stelle x_0 selbst gilt: $\mathrm{f}''(x_0) = 0$, falls f dort zweimal diffbar ist.

1.1.16 Zusammengesetzte Funktionen und Kettenregel

Sei $\mathrm{f}(x) = \mathrm{h}(\mathrm{g}(x)) = \mathrm{h}(u)$ mit $u = \mathrm{g}(x)$ und $u_0 = \mathrm{g}(x_0)$;

Differenzenquotient an der Stelle x_0:

$\mathrm{D}(x_0) = \dfrac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\mathrm{h}(\mathrm{g}(x)) - \mathrm{h}(\mathrm{g}(x_0))}{x - x_0} = \dfrac{\mathrm{h}(u) - \mathrm{h}(u_0)}{x - x_0} = \dfrac{\mathrm{h}(u) - \mathrm{h}(u_0)}{u - u_0} \cdot$
$\dfrac{u - u_0}{x - x_0} = \dfrac{\mathrm{h}(u) - \mathrm{h}(u_0)}{u - u_0} \dfrac{\mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(x_0)}{x - x_0};$

Für $x \to x_0$ folgt:

$\mathrm{f}'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\mathrm{h}(u) - \mathrm{h}(u_0)}{u - u_0} \dfrac{\mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(x_0)}{x - x_0} = \mathrm{h}'(u_0) \cdot \mathrm{g}'(x_0);$

Die Kettenregel

Ist $\mathrm{g}(x)$ an der Stelle x_0 und $\mathrm{h}(u)$ and der Stelle $u_0 = \mathrm{g}(x_0)$ diffbar, so ist auch die Verkettung $\mathrm{f}(x) = \mathrm{h}(\mathrm{g}(x))$ an der Stelle x_0 diffbar und es gilt:

$\mathrm{f}'(x_0) = \mathrm{h}'(u_0) \cdot \mathrm{g}'(x_0) = \mathrm{h}'(\mathrm{g}(x_0)) \cdot \mathrm{g}'(x_0);$

Ableitung von Quotienten

$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{v(x)}; \Rightarrow \mathrm{f}'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2};$

$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \left[u(x) \cdot \dfrac{1}{v(x)}\right] = \dfrac{u'(x)}{v(x)} + \dfrac{-u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2};$

Kurz: $\left(\frac{u}{v}\right)'$ „=“ $\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$; (Quotientenregel)

Merkregel: „Z/W = (N*AZ - Z*AN)/N^2“

Die Regel von L´Hospital

Mittelwertsatz: In $]a, b[$ gibt es mindestens eine Stelle x_0 mit $\mathrm{f}'(x_0) = \dfrac{\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)}{b - a}$.

$\Rightarrow \mathrm{f}(b) = \mathrm{f}(a) + (b - a)\,\mathrm{f}'(x_0);$

Mit $b = a + h$;

$\Rightarrow \mathrm{f}(a + h) = \mathrm{f}(a) + h\mathrm{f}'(x_0);$

$x_0 = a + \vartheta h; \quad (0 < \vartheta < 1)$

$\Rightarrow \mathrm{f}(a+h) = \mathrm{f}(a) + h\mathrm{f}'(a+\vartheta h);$

Regel von L´Hospital: $\mathrm{f}(x) = \frac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)};$

Gesucht: $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{f}(x)$, wobei $\mathrm{u}(a) = \mathrm{v}(a) = 0;$

Falls $\lim\limits_{x\to a} \frac{\mathrm{u}'(x)}{\mathrm{v}'(x)}$ existiert, so gilt

$\lim\limits_{x\to a} \frac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)} = \frac{\mathrm{u}'(x)}{\mathrm{v}'(x)};$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$\lim\limits_{x\to a} \frac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\mathrm{u}(a+h)}{\mathrm{v}(a+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\mathrm{u}(x) + h\mathrm{u}'(x)(a+\vartheta_1 h)}{\mathrm{v}(x) + h\mathrm{v}'(x)(a+\vartheta_2 h)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h\mathrm{u}'(x)(a+\vartheta_1 h)}{h\mathrm{v}'(x)(a+\vartheta_2 h)} = \frac{\mathrm{u}'(x)}{\mathrm{v}'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)};$