0.0.1 1. Schulaufgabe

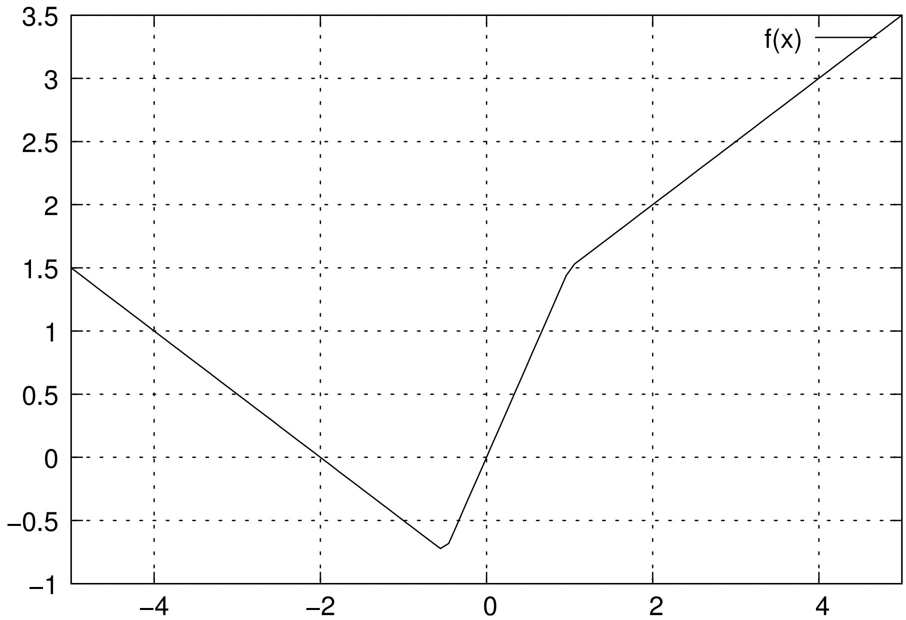
Geschrieben am 21.10.2004

1. (4 Punkte für die Rechnung, 4 auf den Graph)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \left|x + \frac{1}{2}\right| - \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right|$ mit $\mathbb{D}_f = [-5; 5]$.

Bestimme eine betragsfreie Darstellung von $f(x)$ und zeichne den Graphen für $x \in \mathbb{D}_f$.

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{für } \mathbb{D}_f \ni x \leq -\frac{1}{2}; \\ \frac{3}{2}x & \text{für } -\frac{1}{2} < x \leq 1; \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } \mathbb{D}_f \ni x > 1; \end{cases}$$



2.

$f : x \mapsto y = -x^2 + 2x + 6; \mathbb{D}_f = \mathbb{R};$

a) (3 Punkte)

Bestimme einen möglichst großen Teilbereich $\mathbb{D}_{f_1}$ von $\mathbb{D}_f$ so, dass f in $\mathbb{D}_{f_1}$ umkehrbar ist und die Null in $\mathbb{D}_{f_1}$ liegt. (Scheitel bestimmen!)

$f'(x) = -2x + 2 = 0; \Longrightarrow x = 1; \Longrightarrow S(1; 7);$

$\Rightarrow \mathbb{D}_{f_1} = \left]-\infty; 1\right];$

b) (6 Punkte)

Bestimme Term, Definitionsbereich und Wertemenge der Umkehrfunktion $f_1^{-1}(x)$ von f in diesem Teilbereich $\mathbb{D}_{f_1}$.

$0 = -x^2 + 2x + 6 - y; \Longrightarrow x = 1 \pm \frac{7-y}{;}$

$\Rightarrow f_1^{-1}(x) = 1 - \sqrt{7-x};$

$\mathbb{D}_{f_1^{-1}} = \mathbb{W}_{f_1} =]-\infty; 7]\,;$

$\mathbb{W}_{f_1^{-1}} = \mathbb{D}_{f_1} =]-\infty; 1]\,;$

c) (7 Punkte)

Gegeben ist zusätzlich die Geradenschar $g_a : y = ax + 7$.

Zeige, dass genau zwei Geraden aus der Schar den Graphen von f (mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$) berühren! Bestimme dazu die Gleichungen der Berührgeraden.

$ax + 7 = -x^2 + 2x + 6; \Longrightarrow 0 = -x^2 + x\,(2-a) - 1; \Longrightarrow D = 4 - 4a + a^2 - 4 \cdot -1 \cdot -1 = a^2 - 4a = 0;$

$\Rightarrow a_1 = 0; a_2 = 4;$

$\Rightarrow g_0 : y = 7; g_4 : y = 4x + 7;$

3.

$f : x \mapsto y = \frac{2x}{2|x|+3}; \mathbb{D}_f = \mathbb{R};$

a) (3 Punkte)

Zeige: f ist symmetrisch. (Nachweis und Bestimmung der Symmetrieart!)

$f(-x) = -\frac{2x}{2|-x|+3} = -f(x);$ $\Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung;

b) (6 Punkte)

Untersuche f für $x \geq 0$ auf Monotonie. Welche Monotonieeigenschaft hat f demnach im ganzen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$? (Symmetrie!)

$x_1, x_2 \geq 0; x_1 < x_2; \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2}{2x_2+3} - \frac{2x_1}{2x_1+3} = \frac{4x_1x_2+6x_2-4x_1x_2-6x_1}{\text{HN}} = 6\frac{x_2-x_1}{\text{HN}}gt0;$ $\Rightarrow$ f ist für $x \geq 0$ streng monoton steigend.

Symmetrie; $\Rightarrow$ f ist in ganz $\mathbb{D}_f$ streng monoton steigend.

c) (3 Punkte)

Begründe, dass f in $\mathbb{D}_f$ beschränkt ist.

[Ergebnisse aus a) und b) sollen hier verwendet werden!]

$y = \frac{2x}{2x+3}; \Longrightarrow 2xy + 3y = 2x; \Longrightarrow x\,(2y-2) = -3y; \Longrightarrow x = -\frac{3y}{2y-2}gt0; \Longrightarrow y \neq 1; -\frac{3y}{2y-2} \geq 0; \Longrightarrow y \leq 0; \Longrightarrow (y \leq 0 \cap y \geq 0) \cup (y \geq 0 \cap y \leq 1)\,;$

$\Rightarrow \mathbb{W}_f =]-1; 1[\,;$