(no title)

Ingo Blechschmidt

14. März 2005

Inhaltsverzeichnis

0.1 Tests

0.1.1 1. Extemporale aus der Mathematik

Gruppe A, geschrieben am 30.9.2004.

$f_t\left(x\right) = \frac{t}{4}x - \left(2t + 1\right); t \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R};$

1a) (4 Punkte)

Welche Schargerade steht auf der Schargeraden mit dem Parameterwert $t = 1$ senkrecht? Funktionsgleichung und zugehörigen Parameterwert bestimmen!

$m = \frac{1}{4}; \overline{m} = -4;$

$\frac{t}{4} = -4; \Longrightarrow t = -16;$

$f_{-16}\left(x\right) = -4x - \left(2 \cdot -16 + 1\right) = -4x + 31;$

1b) (3 Punkte)

In welchem Punkt S schneiden sich diese beiden zueinander senkrechten Geraden? Rechnung!

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{1}{4}x-3 & = & -4x+31 & +4x+3 \\ \frac{17}{4}x & = & 34 & \cdot\frac{4}{17} \\ x & = & 8 & \end{array}$$

$y=\frac{1}{4}\cdot 8-3=-1;$

$S\,(8;-1)\,;$

2) (3 Punkte)

Bestimme die Achsenschnittpunkte S_x und S_y der Schargeraden in Abhängigkeit von t.

$S_y\,(0;-2t-1)\,;$

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{t}{4}x-(2t+1) & = & 0 & +(2t+1) \\ \frac{t}{4}x & = & 2t+1 & \cdot\frac{4}{t} \\ x & = & \frac{8t+4}{t} & \end{array}$$

$S_x\left(\frac{8t+4}{t};0\right);$

3) (5 Punkte)

Bei welchem Parameterwert sind die Nullstellen 2 Längeneinheiten vom Ursprung entfernt?

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{8t+4}{t} & = & \pm 2 & \cdot t \\ 8t+4 & = & t\cdot\pm 2 & -t\cdot\pm 2-4 \\ t\,(8-\pm 2) & = & -4 & :(...) \\ t & = & -\frac{4}{8-\pm 2} & \end{array}$$

$t_1=-\frac{2}{3}; t_2=-\frac{2}{5};$

4) (4 Punkte)

Untersuche, ob alle Stellen der x-Achse Nullstellen von Schargeraden sind!

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{8t+4}{t} & = & x & \cdot t \\ 8t+4 & = & tx & -tx-4 \\ t\,(8-x) & = & -4 & :(...) \\ t & = & -\frac{4}{8-x} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|l} 8-x & \neq & 0 & +x \\ 8 & \neq & x & \end{array}$$

$x=8$ kann keine Nullstelle sein.

0.1.2 Übungen zur 1. Schulaufgabe von 1337Ingo

Gegeben sei die Parabelschar $f_k(x) = 4x^2 - 4kx + k^2 - 3$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Gib den Scheitel S in Abhängigkeit von k an!

$S(\frac{k}{2}; -3)$;

b) Gib die Definitions- und Wertemenge an!

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$;
$\mathbb{W} = [-3; \infty[$;

c) Gib, wenn vorhanden, Maxima und Minima an!

$P_{min} = S$;

d) Gib die Nullstellen N_1, N_2 in Abhängigkeit von k an!

$N_1(\frac{k-\sqrt{3}}{2})$;
$N_2(\frac{k+\sqrt{3}}{2})$;

e) Gib den Negativbereich $\mathbb{D}_n$ und den Positivbereich $\mathbb{D}_p$ in Abhängigkeit von k an!

$\mathbb{D}_n = \left]\frac{k-\sqrt{3}}{2}; \frac{k+\sqrt{3}}{2}\right[$;
$\mathbb{D}_p = \mathbb{R} \setminus \left[\frac{k-\sqrt{3}}{2}; \frac{k+\sqrt{3}}{2}\right]$;

f) Gib die Geradengleichung $g(x)$ an, die eine Tangente durch die Parabel für $k = 3$ und $x = \frac{1}{2}$ beschreibt!

$f_3(x) = 4x^2 - 12x + 6$;
$f_3(\frac{1}{2}) = 1$;
$g(x) = -8x + 5$;

g) f_k wird mit der Geraden $h : x \mapsto h(x) = x - 3$ geschnitten. Welche Werte sind für k möglich, damit es mindestens einen Schnittpunkt gibt?

$k \in \left[-\frac{1}{8}; \infty\right[$;

h) Was ist dann der „am weitesten links“ gelegende Schnittpunkt S_{fh}, der möglich ist?

$S_{fh}(0; -3)$;

i) Gib das Geradenbüschel i_m durch den Scheitel von f in Abhängigkeit von k an!

$i_m(x) = mx - 3 - \frac{k}{2}m;$

j) Eine Gerade wird durch dieses Büschel nicht erfasst. Wie lautet ihre Geradengleichung und wieso ist das so?

$x = \frac{k}{2};$

0.1.3 1. Schulaufgabe

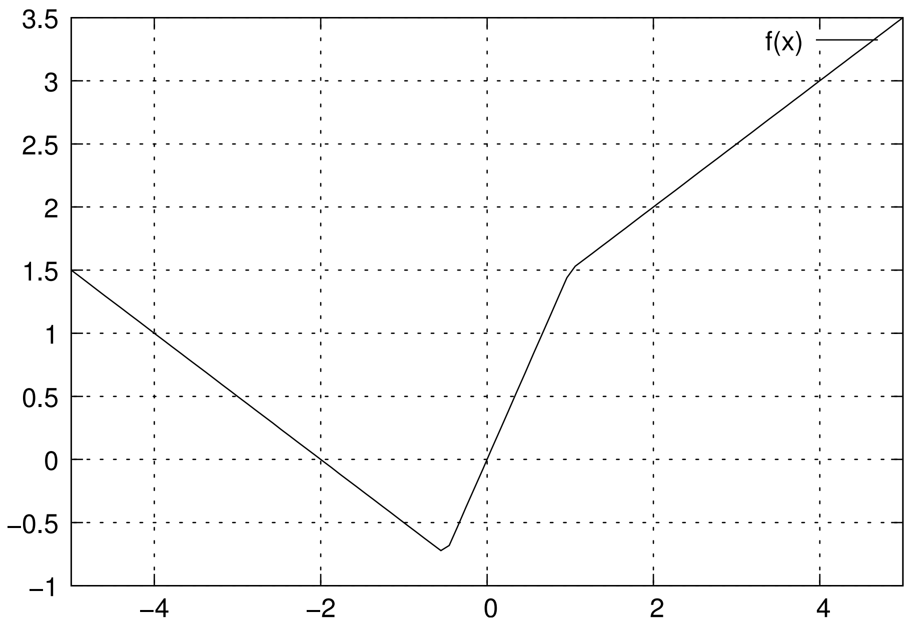
Geschrieben am 21.10.2004

1. (4 Punkte für die Rechnung, 4 auf den Graph)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \left|x + \frac{1}{2}\right| - \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right|$ mit $\mathbb{D}_f = [-5; 5]$.

Bestimme eine betragsfreie Darstellung von $f(x)$ und zeichne den Graphen für $x \in \mathbb{D}_f$.

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{für } \mathbb{D}_f \ni x \leq -\frac{1}{2}; \\ \frac{3}{2}x & \text{für } -\frac{1}{2} < x \leq 1; \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } \mathbb{D}_f \ni x > 1; \end{cases}$$



2.

$f : x \mapsto y = -x^2 + 2x + 6; \mathbb{D}_f = \mathbb{R};$

a) (3 Punkte)

Bestimme einen möglichst großen Teilbereich $\mathbb{D}_{f_1}$ von $\mathbb{D}_f$ so, dass f in $\mathbb{D}_{f_1}$ umkehrbar ist und die Null in $\mathbb{D}_{f_1}$ liegt. (Scheitel bestimmen!)

$f'(x) = -2x + 2 = 0; \Longrightarrow x = 1; \Longrightarrow S(1; 7);$

$\Rightarrow \mathbb{D}_{f_1} = \left]-\infty; 1\right];$

b) (6 Punkte)

Bestimme Term, Definitionsbereich und Wertemenge der Umkehrfunktion $f_1^{-1}(x)$ von f in diesem Teilbereich $\mathbb{D}_{f_1}$.

$0 = -x^2 + 2x + 6 - y; \Longrightarrow x = 1 \pm \frac{7-y}{;}$

$\Rightarrow f_1^{-1}(x) = 1 - \sqrt{7-x};$

$\mathbb{D}_{f_1^{-1}} = \mathbb{W}_{f_1} = \left]-\infty; 7\right];$

$\mathbb{W}_{f_1^{-1}} = \mathbb{D}_{f_1} = \left]-\infty; 1\right];$

c) (7 Punkte)

Gegeben ist zusätzlich die Geradenschar $g_a : y = ax + 7$.

Zeige, dass genau zwei Geraden aus der Schar den Graphen von f (mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$) berühren! Bestimme dazu die Gleichungen der Berührgeraden.

$ax + 7 = -x^2 + 2x + 6; \Longrightarrow 0 = -x^2 + x\,(2-a) - 1; \Longrightarrow D = 4 - 4a + a^2 - 4 \cdot -1 \cdot -1 = a^2 - 4a = 0;$

$\Rightarrow a_1 = 0; a_2 = 4;$

$\Rightarrow g_0 : y = 7; g_4 : y = 4x + 7;$

3.

$f : x \mapsto y = \frac{2x}{2|x|+3}; \mathbb{D}_f = \mathbb{R};$

a) (3 Punkte)

Zeige: f ist symmetrisch. (Nachweis und Bestimmung der Symmetrieart!)

$f(-x) = -\frac{2x}{2|-x|+3} = -f(x);$ $\Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung;

b) (6 Punkte)

Untersuche f für $x \geq 0$ auf Monotonie. Welche Monotonieeigenschaft hat f demnach im ganzen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$? (Symmetrie!)

$x_1, x_2 \geq 0; x_1 < x_2; \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2}{2x_2+3} - \frac{2x_1}{2x_1+3} = \frac{4x_1x_2+6x_2-4x_1x_2-6x_1}{\mathrm{HN}} = 6\frac{x_2-x_1}{\mathrm{HN}} gt0; \Rightarrow f$ ist für $x \geq 0$ streng monoton steigend.

Symmetrie; $\Rightarrow f$ ist in ganz $\mathbb{D}_f$ streng monoton steigend.

c) (3 Punkte)

Begründe, dass f in $\mathbb{D}_f$ beschränkt ist.

[Ergebnisse aus a) und b) sollen hier verwendet werden!]

$y = \frac{2x}{2x+3}; \Longrightarrow 2xy + 3y = 2x; \Longrightarrow x(2y-2) = -3y; \Longrightarrow x = -\frac{3y}{2y-2} gt0; \Longrightarrow y \neq 1; -\frac{3y}{2y-2} \geq 0; \Longrightarrow y \leq 0; \Longrightarrow (y \leq 0 \cap y \geq 0) \cup (y \geq 0 \cap y \leq 1);$

$\Rightarrow \mathbb{W}_f =]-1; 1[;$

0.1.4 Estels Problem

$$\begin{array}{rcl|l} -\frac{y}{2y-1} & \geq & 0; & \cdot(-1) \\ \frac{y}{2y-1} & \leq & 0; & \cdot(2y-1) \\ y & \leq & 0; & \cdot(2y-1) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(y \leq 0 \wedge y \geq \tfrac{1}{2}\right) \vee \left(y \geq 0 \wedge y < \tfrac{1}{2}\right);$$

0.1.5 Estels 2. Problem

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt{h+1}-1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{\left(\sqrt{h+1}-1\right)\left(\sqrt{h+1}+1\right)}{h\left(\sqrt{h+1}+1\right)} = \lim_{h\to 0+} \frac{h+1-1}{h\left(\sqrt{h+1}+1\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{\sqrt{h+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2};$$