Mathematik: Infinitesimalrechnung

Ingo Blechschmidt

12. Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik: Infinitesimalrechnung

1.1 Schulheft

1.1.1 Funktion

Unter dem Begriff „Funktion“ versteht man eine eindeutige Zuordnung einer Ausgangsmenge (Definitionsmenge $\mathbb{D}$) auf eine Bildmenge (Wertemenge $\mathbb{W}$):

$$x \in \mathbb{D} \longmapsto y \in \mathbb{W}$$

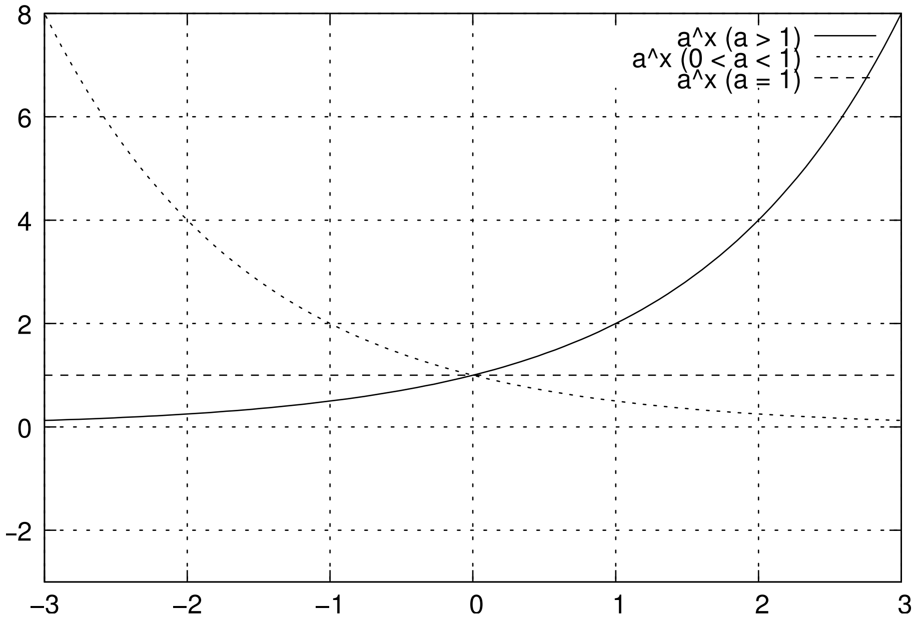
1.1.2 Typen von mathematischen Funktionen

Polynomfunktionen:

- Konstante Funktion: $f(x) = c$
- Lineare Funktion: $f(x) = mx + t$
- Quadratische Funktion: $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Kubische Funktion: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Exponentialfunktion:

$f(x) = a^x (a > 0)$



Logarithmusfunktion:

$f(x) = \log_b x$ ($b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Wurzelfunktion:

$f(x) = \sqrt{x}$ ($\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{W}$)

Trigonometrische Funktionen:

- $\sin x, \mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $\cos x, \mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $\tan x, \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Gebrochenrationale Funktionen:

Z.B.: $\frac{1}{x}$, $\frac{2x}{x^2-1}$, $\frac{3x^5-7x}{5x^3+2x+1}$

Lineare Funktionen: $f(x) = mx + t$

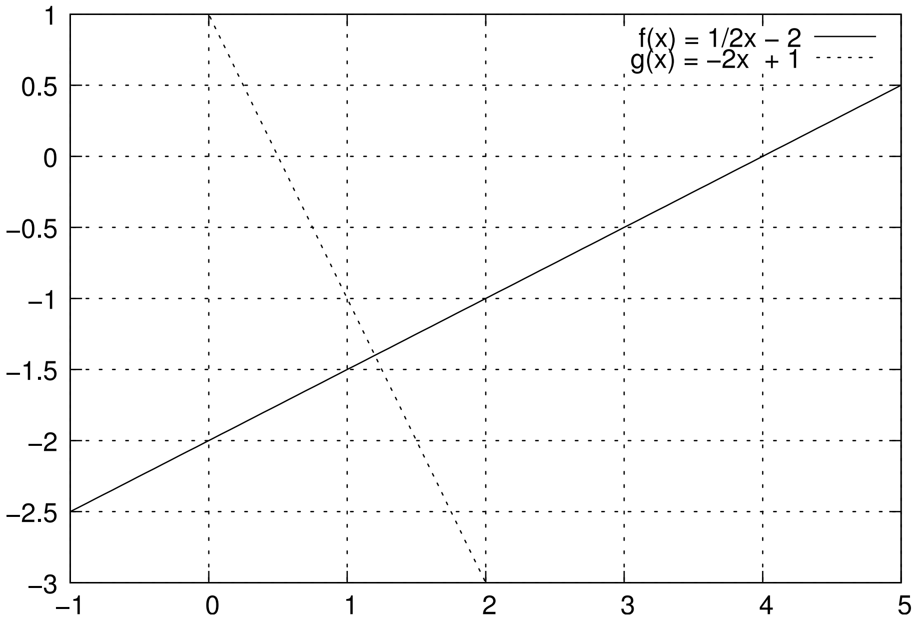
m**:**

Steigung

t**:**

y-Abschnitt

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$



m**:**

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Longrightarrow x = 4 \Longrightarrow N(4;0)$

Schnittpunkt mit y-Achse:

$T(0;-2)$

Aufgabe: Schnittpunkts- und Winkelberechnung zwischen f und $g(x) = -2x + 1$

Schnittpunkt:

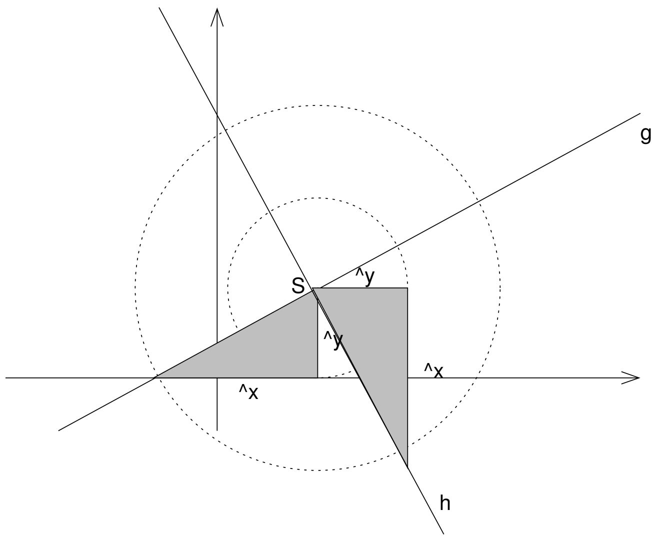
$f(x) = g(x) \Longrightarrow x = \frac{6}{5}$

Winkel:

$\tan(\arctan m_g - \arctan m_f) = \tan -\frac{\pi}{2} =$ undefiniert

$\Rightarrow f$ steht senkrecht auf g (auch wegen $m_g = -\frac{1}{m_f}$).

Senkrechte Geraden

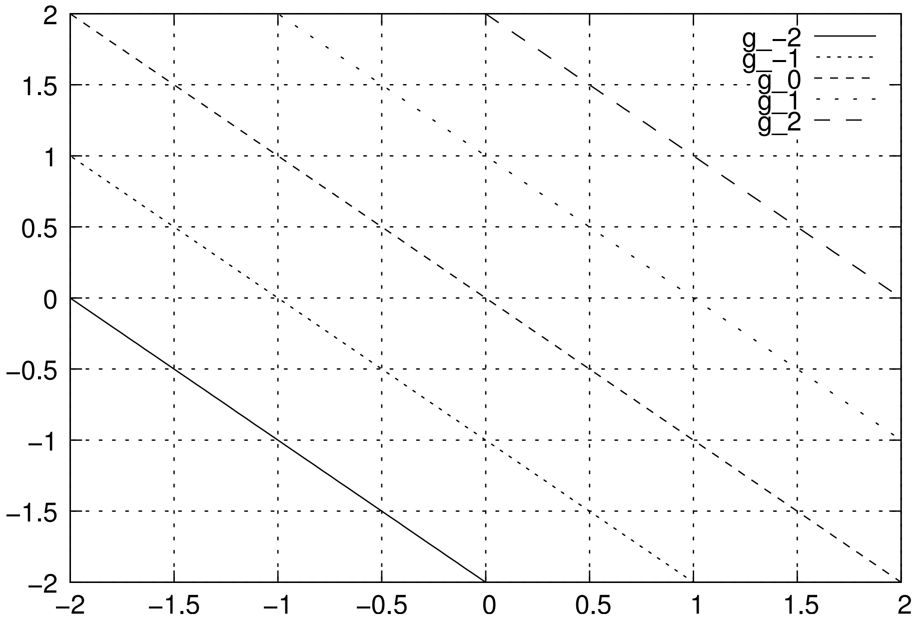


$m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$m_h = -\frac{\Delta x}{\Delta y}$

$\Rightarrow m_g \cdot m_h = -1$ (Kennzeichen für senkrechte Geraden)

Geradenscharen

Beispiel: $g_k : x + y - k = 0; k \in \mathbb{R}; \Longrightarrow y = -x + k;$ (Parallelenschar)



Zusatzaufgabe zur 2. Hausaufgabe:

Nimmt der Flächeninhalt $A(t)$ beliebige Werte aus $\mathbb{R}_0^+$ an?

Untersuchung für $t \geq 0$:

$A(t) = \frac{t^2+1}{t}, t \neq 0;$

Untersuchung der Wertemenge von $A(t)$:

Gibt es zu jedem Wert $A \in \mathbb{R}^+$ einen t-Wert?

$A = \frac{t^2+1}{t}; \Longrightarrow 0 = t^2 - 2At + 1; \Longrightarrow t = \frac{2A \pm 2\sqrt{A^2-1}}{2} = A \pm \sqrt{A^2-1};$

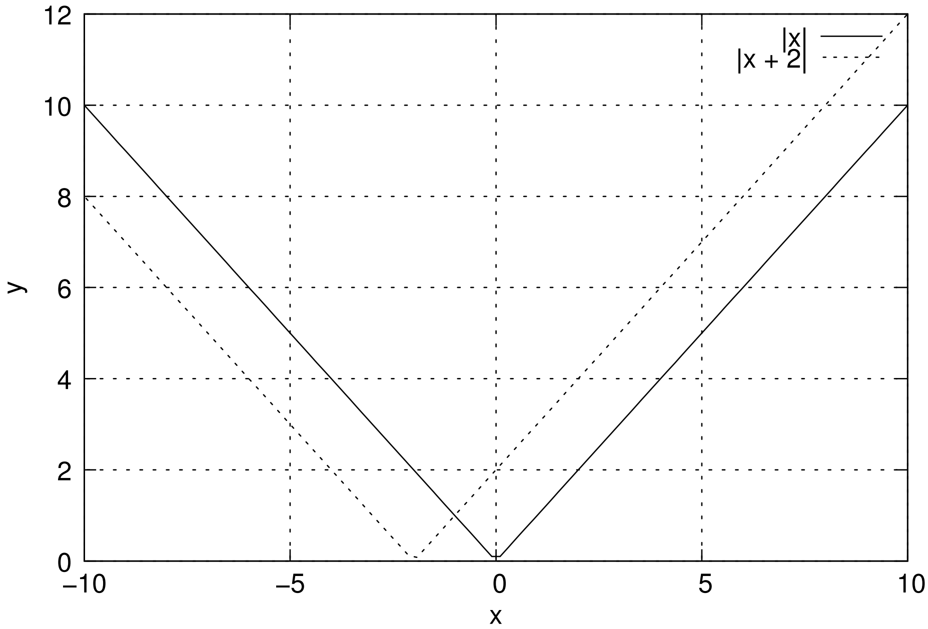
$A^2 - 1 \geq 0; \Longrightarrow A \geq 1; \Longrightarrow \mathbb{W}_A = [1; \infty[$

$\Rightarrow$ Bei $A = 1$: $t = 1 \Rightarrow$ Neigungswinkel $45°$;

Stückweise lineare Funktionen

Die Betragsfunktion $x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0; \\ -x & \text{falls } x < 0; \end{cases}$

Graph:



Abwandlungen:

1. $f(x) = |x+2| = \begin{cases} -(x+2) & \text{für } x \leq -2; \\ x+2 & \text{für } x > 2; \end{cases}$

Die Signum-Funktion

$$x \mapsto \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0; \\ 0 & \text{wenn } x = 0; \\ -1 & \text{wenn } x < 0; \end{cases}$$

Zusammenhang: $x \cdot \operatorname{sgn} x = |x|$, $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$;

Quadratische Funktionen

Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0;$

Bestimme die Gleichung der Parabel durch die Punkte $P\left(-2; -\frac{5}{4}\right)$, $Q\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ und $R\left(1; \frac{7}{4}\right)$.

$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - \frac{5}{4}$; $\Rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet;

1.1.3 Monotonie von Funktionen

f heißt in einem Berech $[a;b]$ monoton steigend (fallend), wenn für alle $x_1, x_2 \in [a;b]$ mit $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) folgt.

Gilt außerdem $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), so liegt **strenge** Monotonie vor.

Methode zur Untersuchung: Man betrachtet die Vorzeichen von $f(x_2) - f(x_1)$.

1.1.4 Einschub zur Symmetrie

- $f(-x) = f(x)$; $\Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse
- $f(-x) = -f(x)$; $\Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung

1.1.5 Infimum und Supremum

Die größte untere Schranke einer Menge heißt Infimum.

Die kleinste obere Schranke einer Menge heißt Supremum.

1.1.6 Umkehrfunktion

Ziel: Abbildung rückgänig machen, d.h.: $f^{-1}\Big(f(x)\Big) = x$;

$x \in \mathbb{D}_f \xrightarrow{f} y \in \mathbb{W}_f = \mathbb{D}_{f^{-1}} \xrightarrow{f^{-1}} x \in \mathbb{D}_f = \mathbb{W}_{f^{-1}}$;
Schritte:

1. Auflösen nach x
2. Vertauschen von x mit y

G_f und $G_{f^{-1}}$ sind spiegelbildlich bezüglich der Geraden $y = x$.

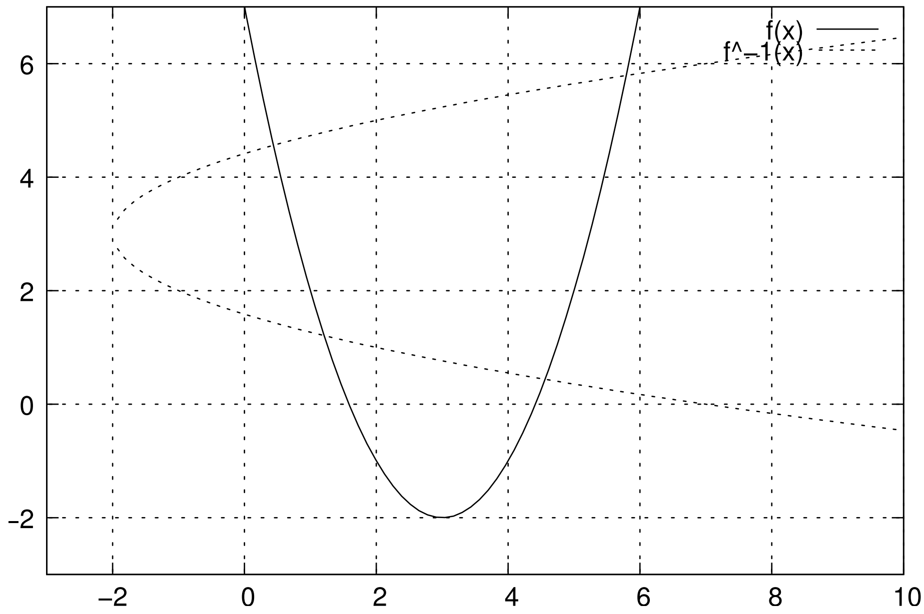
f ist **umkehrbar**.

Umkehrung einer quadratischen Funktion

Beispiel: $f(x) = (x-3)^2 - 2; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}; \mathbb{W}_f = [-2; \infty[\,;$

Auflösen nach x: $x = 3 \pm \sqrt{y+2}$;

$\Rightarrow f$ ist nicht umkehrbar.



Monotoniekriterium für Umkehrbarkeit:

> Eine Funktion ist dann umkehrbar, wenn sie streng monoton ist.

Zerlegung von f in zwei streng monotone Teile:

- $f_1(x) = (x-3)^2 - 2;$
  $\mathbb{D}_{f_1} =]-\infty; 3]\,;$
  $\mathbb{W}_{f_1} = [-2; \infty[\,;$

- $f_2(x) = (x-3)^2 - 2;$
  $\mathbb{D}_{f_2} =]3; \infty]\,;$
  $\mathbb{W}_{f_2} =]-2; \infty[\,;$

Umkehrung: $y = 3 \pm \sqrt{2+x}$;

- $f_1^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+2}$;
  $\mathbb{D}_{f_1^{-1}} = \mathbb{W}_{f_1} = [-2; \infty[$;
  $\mathbb{W}_{f_1^{-1}} = \mathbb{D}_{f_1} =]-\infty; 3]$;
- $f_2^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+2}$;
  $\mathbb{D}_{f_2^{-1}} = \mathbb{W}_{f_2} =]-2; \infty[$;
  $\mathbb{W}_{f_2^{-1}} = \mathbb{D}_{f_2} =]3; \infty]$;

1.1.7 Erweiterte Symmetriebetrachtung

Symmetrie zur Achse $x = x_0$

$$f(x_0 - h) = f(x_0 + h); h \in \mathbb{R}^+;$$

Ansatz: $f(x_0 - h) - f(x_0 + h) = \ldots = 0$;

Symmetrie zu $P(x_0; y_0)$

$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)}{2} = \ldots = y_0;$$

1.1.8 Rationale Funktionen

Rationale Funktionen haben die Form $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ wobei $Z(x)$ und $N(x)$ Polynome sind.
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x | N(x) = 0\}$;

Einteilung der Definitionslücken

- Unendlichkeitsstellen (Polstellen)

  mit VZW:
  Linearfaktor mit ungerader Potenz

  ohne VZW:
  Linearfaktor mit gerader Potenz

- „Lochstellen“: Linearfaktor des Nenners kommt im Zähler mindestens mit gleicher Vielfachheit vor.

1.1.9 Folgen

1. Natürliche Zahlen: $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$
2. Ungerade Zahlen: $1, 3, 5, 7, \dots, 2\nu + 1$ mit $\nu \in \mathbb{N}_0$
3. $7, 14, 21, \dots, 7\nu$ mit $\nu \in \mathbb{N}$
4. $9, 16, 23, 30, \dots, 7\nu + 2$ mit $\nu \in \mathbb{N}$
5. $1, 3, 9, 25, \dots, 3^{\nu-1}$ mit $\nu \in \mathbb{N}$

Zahlenfolgen sind Funktionen mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$.

Zum Beispiel:

$$\begin{array}{ll} f: & \nu \mapsto f(\nu) = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu}; \nu \in \mathbb{N}; \\ & 1 \mapsto a_1 = -1; \\ & 2 \mapsto a_2 = \frac{1}{2}; \\ & 3 \mapsto a_3 = -\frac{1}{3}; \\ & 4 \mapsto a_4 = \frac{1}{4}; \end{array}$$

$\langle a_\nu \rangle$ ist eine alternierende Folge.

- Bei arithmetischen Folgen gilt:

  $a_{\nu+1} = a_\nu + d; d \in \mathbb{R};$

- Bei geometrischen Folgen gilt:

  $a_{\nu+1} = a_\nu \cdot q; q \in \mathbb{R};$

Geometrische Folgen

$a_{\nu+1} = a_\nu \cdot q; q \in \mathbb{R}; \Rightarrow \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = q;$

$\Rightarrow$ Allgemeines Glied der geometrischen Folge: $a_\nu = a_1 \cdot q^{\nu-1};$

Für $q > 1$ ($0 < q < 1$) und $a_1 > 0$ ist $\langle a_\nu \rangle = \{a_1 \cdot q^{\nu-1} | v \in \mathbb{N}\}$ sms und nach oben nicht beschränkt (smf).

Der Luftdruck als geometrische Folge

$p(h) = p_0 \cdot 0{,}882^{\frac{h}{\mathrm{km}}};$

1.1.10 Reihen

Die Glieder einer (endl.) Folge werden aufsummiert:

$$a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu; \qquad n \in \mathbb{N};$$

Geometrische Reihen

$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_1 q^{\nu-1} = a_1 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} q^{\nu-1} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}; \qquad q \neq 1;$

1.1.11 Grenzwerte

Grenzwerte von Funktionen für $|x| \to \infty$

Allgemein: $f(x)$ hat für $x \to \infty$ den Grenzwert 0, wenn $|x|$ jede noch so kleine positive Zahl (meist stellvertretend mit ε bezeichnet) unterschreitet, wenn man nur x genügen groß macht.

x_s bezeichnet man auch als „Schwellenwert".

$f(x)$ hat für $x \to -\infty$ den Grenzwert 0, wenn es zu jedem noch so kleinen positiven ε einen Schwellenwert x_s gibt, so dass **für alle** $x < x_s$ gilt: $|f(x)| < \varepsilon$;

Def.: $f(x)$ hat für $x \to \infty$ ($x \to -\infty$) den Grenzwert a, wenn es zu jedem noch so kleinen positiven ε einen Schwellenwert x_s gibt, so dass für alle $x > x_s$ ($x < x_s$) gilt: $|f(x) - a| < \varepsilon$;

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0; \qquad a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N};$

Regeln für Grenzwerte

Sind f und g Funktionen mit $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b$, dann gilt:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) \pm \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = a \pm b;$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = a \cdot b;$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to \infty} g(x)} = \frac{a}{b}; \qquad b \neq 0; \qquad g(x) \neq 0$ für „hinreichend" große x;

Zusatz für Funktionen mit **bestimmter** Divergenz:

Aus $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ folgt: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0;$

Analoge Sätze gelten für $x \to -\infty$.

Es gibt drei Fälle bei gebrochen rationalen Funktionen:

- Zählergrad $<$ Nennergrad $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0;$
- Zählergrad = Nennergrad $\Rightarrow f$ ist konvergent;
- Zählergrad $>$ Nennergrad $\Rightarrow f$ ist divergent;

Schrankenfunktion (Majoranten)

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x;$

Vermutung: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0;$

$|f(x)| = \left|\frac{1}{x} \cdot \sin x\right| = \frac{1}{2} \cdot |\sin x| \leq \frac{1}{x} \to 0$ für $x \to \infty;$

$\Rightarrow f(x) \to 0$ für $x \to \infty$; ($\frac{1}{x}$ ist Majorante für $|f(x)|$.)

f hat für $x \to \infty$ die Asymptote $y = g(x)$, wenn gilt: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = 0;$

Grenzwerte von Zahlenfolgen

Allgemein gilt: Die geometrische Folge $a_\nu = a \cdot q^{\nu-1}$ ist für $|q| < 1$ konvergent mit dem Grenzwert Null.

Grenzwert der unendlichen geometrischen Reihe

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{a}{q-1} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (q^n - 1) = \frac{a}{1-q}; \qquad$ für $|q| < 1;$

Ergebnis: Für $|q| < 1$ hat die geometrische Reihe $s_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} aq^{\nu-1}$ für $n \to \infty$ den Grenzwert $\frac{a}{1-q}$.

Grenzwert bei Funktionen für $x \to x_0$

Def.: f hat für $x \to x_0$ den Grenzwert a, wenn f in einer Umgebung von x_0 definiert ist und wenn gilt: $|f(x) - a| < \varepsilon$ (mit $\varepsilon > 0$) falls nur x „genügend" nahe bei x_0 gewählt wird.

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$;

Methoden zur Berechnung:

„Kürzen"

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+1) = 2+1 = 3;$

„h-Methode"

Untersuchung in der „Nähe" von x_0 durch die Substitution $x = x_0 \pm h$ (mit $h > 0$).

Im Beispiel: $\lim\limits_{x \to 2+} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{4+4h+h^2-2-h-2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{3h+h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(3+h) = 3+0 = 3;$

Zusammenfassung: Beim $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

$x_0 \in D_f$

a) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$;
Grenzwert existiert nicht, Divergenz, Sprungstelle

b) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq f(x_0)$;
Grenzwert existiert (Konvergenz), f ist an der Stelle x_0 **nicht stetig**.

c) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$;
Grenzwert existiert, f ist an der Stelle x_0 **stetig**.

$x_0 \notin D_f$

a) $|f(x)| \to \infty$ für $x \to x_0+$ oder $x \to x_0-$;
Unendlichkeitsstelle (mit bzw. ohne VZW), Divergenz

b) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$;
Konvergenz, „Lochstelle“ (stetig ergänzbare Definitionslücke)

c) $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$; (aber beide Grenzwerte endlich)
Divergenz, gelochte Sprungstelle

Ergänzungen:

- Eine Funktion f ist an der Stelle $x_0 \in D_f$ **stetig**, wenn gilt:
  $\lim\limits_{x \to x_0-} = \lim\limits_{x \to x_0+} = f(x_0)$;
- Für die Grenzwerte $x \to x_0$ gelten die bekannten Grenzwertsätze in analoger Weise.

1.1.12 Differentialrechnung

Einführung

Steigung einer Kurve im Punkt $P_0(x_0; y_0)$ – Tangente:

Wir wählen einen benachbarten Punkt $P(x; y)$ und bestimmen die Steigung m_s der Sekante P_0P.

$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$; (Differenzenquotient)

Wander der Punkt P auf der Kurve gegen den festen Punkt P_0, so strebt die zugehörige Sekante einer Grenzlage zu, mit der Steigung m_t (Tangentensteigung).

$$P \to P_0; \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & \to & x_0; \\ y & \to & y_0; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & \to & x_0; \\ f(x) & \to & f(x_0); \end{array} \right\} \Rightarrow m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

(Differentialquotient von f an der Stelle x_0)

Def.: Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ heißt an der Stelle $x_0 \in D_f$ differenzierbar, wenn die zugehörige Differenzenquotientenfunktion $m_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ mit $x \in D_f \setminus \{x_0\}$ an der Stelle x_0 stetig ergänzbar ist, d.h. wenn $m_t = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (Differentialquotient) existiert. Der Grenzwert wird auch als **Ableitung** von f an der Stelle x_0 bezeichnet und man schreibt dafür $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

Beispiele: Ableitung an der Stelle x_0:

- Quadratfunktion:
  $f(x) = x^2;$
  $\Rightarrow f'(x_0) = 2x_0;$
- Identische Funktion:
  $f(x) = x;$
  $\Rightarrow f'(x_0) = 1;$
- Konstante Funktion:
  $f(x) = c;$
  $\Rightarrow f'(x_0) = 0;$
- Kubische Funktion:
  $f(x) = x^3;$
  $\Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2;$
- Betragsfunktion an der Stelle $x_0 = 0$:
  $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \textbf{für } x < 0; \\ x & \textbf{für } x > 0; \end{cases}$
  Rechtsseitige Ableitung: $f_r'(0) = \ldots = 1;$
  Linksseitige Ableitung: $f_l'(0) = \ldots = -1;$
  $|x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht diffbar (Knickstelle).
- Wurzelfunktion:
  $f(x) = \sqrt{x};$
  $f'(x_0) = \ldots = \frac{1}{2\sqrt{x_0}};$
- Reziproke Funktion:
  $f(x) = \frac{1}{x};$
  $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x_0 - x}{x x_0 \left(x - x_0\right)} = \lim\limits_{x \to x_0} -\dfrac{1}{x x_0} = -\dfrac{1}{x_0^2};$

Die Ableitungsfunktion

Def.: Ist die Funktion f für alle $x \in D_f$ diffbar, so heißt f **in** $\mathrm{D_f}$ **diffbar**. Man nennt dann die Funktion $f' : x \mapsto f'(x); \quad x \in D_f$ die Ableitungsfunktion (kurz die Ableitung) von f. Die Rechenoperation, die f überführt in f', nennt man **Ableiten** oder **Differenzieren**.

Andere Schreibweisen für f': y', $f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; („$\mathrm{d}y$ nach $\mathrm{d}x$"), $f'(x) = \dot{f}(t)$;

Merke: Ist f an der Stelle x_0 diffbar, so ist f dort auch stetig. (Notwendig für die Diffbarkeit ist Stetigkeit.)

f diffbar; $\Rightarrow$ f stetig;

f nicht stetig; $\Rightarrow$ f nicht diffbar;

Ableitungsregeln

- Ableitung einer Summe: $f(x) = u(x) + v(x)$;

  $$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)+v(x)-u(x_0)-v(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} + \frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right] = \\ &= u'(x_0) + v'(x_0); \end{aligned}$$

  (Summenregel)

- Konstanter Faktor: $f(x) = k \cdot u(x)$;

  $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{ku(x)-ku(x_0)}{x-x_0} = k \cdot u'(x_0)$; (Faktorregel)

  Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten!

- Ableitung eines Produkts: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$;

  $$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x)+u(x_0)v(x)+u(x_0)v(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left[v(x)\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} + u(x_0)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right] = \\ &= u'(x_0)v(x_0) + v'(x_0)u(x_0); \end{aligned}$$

  (Produktregel)

  Kurz: $(uv)' = u'v + v'u$;

Tangente und Normale in einem Kurvenpunkt

Die Ableitung der Sinusfunktion

a) Im Ursprung

$f(x) = \sin x; \quad \sin(-x) = \sin x;$ $\Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \varphi(x);$$

$$\varphi(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = \varphi(x);$$ $\Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse

Abschätzung für $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

Flächenvergleich:

[Abbildung: $\sin x$, x und $\tan x$ am Einheitskreis]

$$\begin{array}{rcccl} A_{\triangle OPQ} & < & A_{\sphericalangle OPQ} & < & A_{\triangle ORQ}; \\ \frac{1}{2}\sin x & < & \pi r^2 \frac{x}{2\pi} & < & \frac{1}{2}\tan x; \\ \sin x & < & x & < & \tan x; \\ 1 & < & \frac{x}{\sin x} & < & \frac{1}{\cos x}; \\ 1 & > & \frac{\sin x}{x} & > & \cos x; \end{array}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1;$ (Wichtiger Grenzwert!)

Zusatz: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1;$

Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x \cdot \frac{2}{3}}{\sin 3x} = \frac{2}{3};$

b) Ableitung von $f(x) = \sin ax$ an der Stelle x_0

$$x \to x_0\text{:} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin ax - \sin ax_0}{x - x_0} = \frac{2\cos\frac{ac+ax_0}{2}\sin\frac{ax-ax_0}{2}}{x - x_0} = \frac{2\cos\left[\frac{a}{2}(x+x_0)\right]\sin\left[\frac{1}{2}(x-x_0)\right]}{(x-x_0)\,\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a}};$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \left\{ a \cdot \cos\left[\frac{a}{2}(x-x_0)\right] \frac{\sin\left[\frac{a}{2}(x-x_0)\right]}{\frac{a}{2}(x-x_0)} \right\} = a \cdot \cos ax_0;$$

Ergebnis: $(\sin ax)' = a \cdot \cos ax;$

analog: $(\cos ax)' = -a \cdot \sin ax;$

speziell: $(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$

Ableitung von Bewegungsgleichungen

Momentangeschwindigkeit aus der Weg-Zeit-Gleichung

$x(t) = \frac{1}{2}at^2;$

$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t};$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 - \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \dot{x}(t_0);$$

Allgemein: $v(t) = \dot{x}(t) = at;$

Momentanbeschleunigung aus der Zeit-Geschwindigkeits-Gleichung

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = \dot{v}(t_0) = \ddot{x}(t_0);$$

$\Rightarrow a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = \text{const.};$

Bestimmung von Parabelscheiteln

Der Scheitel liegt dort, wo die Tangente die Steigung $m_t = f'(x) = 0$ hat.

Monotoniebereiche – relative Extrema

Merke: Ist $f'(x)$ im Intervall $I =]a, b[$ positiv (negativ), so ist $f(x)$ ist I streng monoton steigend (fallend).

Mögliche Kurvenverläufe:

a) $f'(x_0) > 0;$

b) $f'(x_0) < 0;$

c) $f'(x_0) = 0;$

$f'(x_0)$ wechselt das Vorzeichen von $-$ nach $+$: Rel. Minimum (TIP)

$f'(x_0)$ wechselt das Vorzeichen von $+$ nach $-$: Rel. Maximum (HOP)

$f'(x_0)$ wechselt das Vorzeichen nicht: Terassenpunkt (TEP)

Notwendige Bedingung für ein relatives Extremum an der Stelle x_0: $f'(x_0) = 0;$

Hinreichende Bedingung für ein Extremum ist ein VZW von $f'(x_0)$.

Alternativ: Die Ableitung von f hat ein Extremum, d.h. $f''(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung). Hinreichend für einen TEP ist, wenn gilt: $f''(x_0) = 0$ und $f''(x_0)$ hat einen VZW.

Ergänzung: Hinreichendes Kriterium für ein Extremum an der Stelle x_0 ist, wenn gilt: $f'(x_0) = 0$ **und** $f''(x_0) \neq 0$, und zwar Minimum für $f''(x_0) > 0$ und Maximum für $f''(x_0) < 0$.

[Stetigkeit: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+} = f(x_0)$;]

[Diffbarkeit an der Stelle $x_0 \Rightarrow$ Stetigkeit an der Stelle x_0]

[Grenzwert des Diffquotienten an der Stelle x_0 existiert $\Rightarrow$ Diffbarkeit an der Stelle x_0]

1.1.13 Eigenschaften von intervallweise stetigen Funktionen

Extremwertsatz

Ist f im **abgeschlossenen** Intervall $[a, b]$ stetig, so ist f dort **beschränkt** und besitzt ein absolutes Maximum und Minimum.

Zwischenwertsatz

Ist f im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und ist $\mathrm{f}(a) \neq \mathrm{f}(b)$, so nimmt die Funktion jeden Zwischenwert y_0 zwischen $\mathrm{f}(a)$ und $\mathrm{f}(b)$ mindestens einmal an. D.h., es gibt zu jedem $y_0 \in [\mathrm{f}(a), \mathrm{f}(b)]$ mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $\mathrm{f}(x_0) = y_0$.

„Von f wird kein Wert zwischen $\mathrm{f}(a)$ und $\mathrm{f}(b)$ ausgelassen.“

Nullstellensatz

Ist f in $[a, b]$ stetig und sind die Vorzeichen von $\mathrm{f}(a)$ und $\mathrm{f}(b)$ verschieden, so gibt es in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle x_0 mit $\mathrm{f}(x_0) = 0$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist f im **abgeschlossenen** Intervall $[a, b]$ stetig und im offenen Intervall $]a, b[$ diffbar, so gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in]a, b[$, für die gilt: $\mathrm{f}'(x_0) = \frac{\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)}{b - a}$;

Geometrische Deutung: Es gibt in $]a, b[$ eine Stelle x_0, an der die Tangente an G_f parallel ist zur Sekante $(a, \mathrm{f}(a))$ und $(b, \mathrm{f}(b))$.

Anwendung zur linearen Approximation:

Sei $I = [x_0, x_0 + h]$. Dann gilt mit $d \in]0, 1[$:
$\mathrm{f}'(x_0 + d \cdot h) = \frac{\mathrm{f}(x_0 + h) - \mathrm{f}(x_0)}{x_0 + h - x_0}; \Rightarrow$
$\mathrm{f}(x_0 + h) = \mathrm{f}(x_0) + h \cdot \mathrm{f}'(x_0 + d \cdot h); \Rightarrow$
$\mathrm{f}(x_0 + h) \approx \mathrm{f}(x_0) + h \cdot \mathrm{f}'(x_0)$;

1.1.14 Näherung des Sinus für kleine Winkel

$\sin h \approx \sin 0 + h \cdot \cos 0 = h$; ($h$ klein)

Ergebis: Für Winkel $\lessapprox 10°$ gilt die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ (Bogenmaß).

1.1.15 Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Die Steigung von f wird durch f' beschrieben, also ist das Abnahme- bzw. Zunahmeverhalten von von f' zu beurteilen $\rightarrow$ Untersuchung von $(\mathrm{f}')' = \mathrm{f}''$

- $\mathrm{f}''(x_0) < 0; \Rightarrow \mathrm{f}'(x_0)$ ist smf; $\Rightarrow \mathrm{f}$ ist rechtsgekrümmt;
- $\mathrm{f}''(x_0) > 0; \Rightarrow \mathrm{f}'(x_0)$ ist sms; $\Rightarrow \mathrm{f}$ ist linksgekrümmt;

Merke:

- f ist r**e**chtsgekrümmt; $\Leftrightarrow$ „f''“ ist n**e**gativ;
- f ist l**i**nksgekrümmt; $\Leftrightarrow$ „f''“ ist pos**iti**v;

Eine Stelle $x_0 \in D_\mathrm{f}$ heißt Wendepunkt von f, wenn der Graph an der Stelle x_0 sein Krümmungsverhalten wechselt. f'' wechselt damit an der Stelle x_0 das Vorzeichen. An der Stelle x_0 selbst gilt: $\mathrm{f}''(x_0) = 0$, falls f dort zweimal diffbar ist.

1.1.16 Zusammengesetzte Funktionen und Kettenregel

Sei $\mathrm{f}(x) = \mathrm{h}(\mathrm{g}(x)) = \mathrm{h}(u)$ mit $u = \mathrm{g}(x)$ und $u_0 = \mathrm{g}(x_0)$;

Differenzenquotient an der Stelle x_0:

$\mathrm{D}(x_0) = \dfrac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\mathrm{h}(\mathrm{g}(x)) - \mathrm{h}(\mathrm{g}(x_0))}{x - x_0} = \dfrac{\mathrm{h}(u) - \mathrm{h}(u_0)}{x - x_0} = \dfrac{\mathrm{h}(u) - \mathrm{h}(u_0)}{u - u_0} \cdot$
$\dfrac{u - u_0}{x - x_0} = \dfrac{\mathrm{h}(u) - \mathrm{h}(u_0)}{u - u_0} \dfrac{\mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(x_0)}{x - x_0};$

Für $x \to x_0$ folgt:

$\mathrm{f}'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\mathrm{h}(u) - \mathrm{h}(u_0)}{u - u_0} \dfrac{\mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(x_0)}{x - x_0} = \mathrm{h}'(u_0) \cdot \mathrm{g}'(x_0);$

Die Kettenregel

Ist $\mathrm{g}(x)$ an der Stelle x_0 und $\mathrm{h}(u)$ and der Stelle $u_0 = \mathrm{g}(x_0)$ diffbar, so ist auch die Verkettung $\mathrm{f}(x) = \mathrm{h}(\mathrm{g}(x))$ an der Stelle x_0 diffbar und es gilt:

$\mathrm{f}'(x_0) = \mathrm{h}'(u_0) \cdot \mathrm{g}'(x_0) = \mathrm{h}'(\mathrm{g}(x_0)) \cdot \mathrm{g}'(x_0);$

Ableitung von Quotienten

$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{v(x)}; \Rightarrow \mathrm{f}'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2};$

$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \left[u(x) \cdot \dfrac{1}{v(x)}\right] = \dfrac{u'(x)}{v(x)} + \dfrac{-u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2};$

Kurz: $\left(\frac{u}{v}\right)'$ „=“ $\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$; (Quotientenregel)

Merkregel: „Z/W = (N*AZ - Z*AN)/N^2“

Die Regel von L´Hospital

Mittelwertsatz: In $]a, b[$ gibt es mindestens eine Stelle x_0 mit $\mathrm{f}'(x_0) = \dfrac{\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)}{b - a}$.

$\Rightarrow \mathrm{f}(b) = \mathrm{f}(a) + (b - a)\,\mathrm{f}'(x_0);$

Mit $b = a + h$;

$\Rightarrow \mathrm{f}(a + h) = \mathrm{f}(a) + h\mathrm{f}'(x_0);$

$x_0 = a + \vartheta h; \quad (0 < \vartheta < 1)$

$\Rightarrow \mathrm{f}(a+h) = \mathrm{f}(a) + h\mathrm{f}'(a+\vartheta h);$

Regel von L´Hospital: $\mathrm{f}(x) = \dfrac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)};$

Gesucht: $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{f}(x)$, wobei $\mathrm{u}(a) = \mathrm{v}(a) = 0;$

Falls $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\mathrm{u}'(x)}{\mathrm{v}'(x)}$ existiert, so gilt

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)} = \dfrac{\mathrm{u}'(x)}{\mathrm{v}'(x)};$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\mathrm{u}(a+h)}{\mathrm{v}(a+h)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{u}(x) + h\mathrm{u}'(x)(a+\vartheta_1 h)}{\mathrm{v}(x) + h\mathrm{v}'(x)(a+\vartheta_2 h)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h\mathrm{u}'(x)(a+\vartheta_1 h)}{h\mathrm{v}'(x)(a+\vartheta_2 h)} =$
$\dfrac{\mathrm{u}'(x)}{\mathrm{v}'(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\mathrm{u}(x)}{\mathrm{v}(x)};$

1.2 Hausaufgaben

1.2.1 1. Hausaufgabe

Buch Seite 20, Aufgabe 3a

Bestimme die Steigung und die Geradengleichung, wenn der Abschnitt t auf der y-Achse und ein Punkt P gegeben sind!

$t = -1; P\,(-2; 5)\,;$

$5 = -2m - 1;$
$\Longrightarrow 2m = -6; \Longrightarrow m = -3;$
$\Longrightarrow f : x \mapsto y = -3x - 1;$

Buch Seite 20, Aufgabe 4a

Wie lautet die Gleichung der Geraden PQ? Welche Steigung hat sie? Berechne den Neigungswinkel auf $0{,}01^\circ$ genau!

$P\,(2; 2)\,; Q\,(4; 6)\,;$

$\left.\begin{array}{l} 2 = 2m + t; \Longrightarrow t = 2 - 2m; \\ 6 = 4m + t; \Longrightarrow t = 6 - 4m; \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 - 2m = 6 - 4m; \Longrightarrow 2m = 4; \Longrightarrow$
$m = 2;$

$\Longrightarrow t = 2 - 2 \cdot 2 = -2;$
$\Longrightarrow f : x \mapsto y = 2x - 2;$

$\arctan 2 \approx 63,43°$

Buch Seite 20, Aufgabe 7a

Zeige, dass g_1 und g_2 aufeinander senkrecht stehen!

$$\left.\begin{array}{l} g_1 : x \mapsto y = 2x + 3; \Longrightarrow m_1 = 2; \\ g_2 : x \mapsto y = -\frac{1}{2}x - 7; \Longrightarrow m_2 = -\frac{1}{2}; \end{array}\right\} \Longrightarrow m_1 \cdot m_2 = 2 \cdot -\tfrac{1}{2} = -1;$$

1.2.2 2. Hausaufgabe

Zettel, Aufgabe 52

$h_t(x) = -tx + t; t \in \mathbb{R}; \mathbb{D}_{h_t} = \mathbb{R};$

a) Zeige, dass alle Graphen der Schar eine gemeinsame Nullstelle haben.

$$\begin{aligned} -tx + t &= 0 \\ t \cdot (1 - x) &= 0 \\ 1 - x &= 0 \\ 1 &= x \end{aligned}$$

$\Rightarrow N(1; 0)$

b) Bestimme den Inhalt der Dreiecksfläche, die von der y-Achse und zwei zueinander senkrechten Schargeraden begrenzt ist.

$l_t(x) = \frac{1}{t}x - \frac{1}{t};$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow A(t) &= \tfrac{1}{2} \cdot |h_t(0) - l_t(0)| \cdot 1 = \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \left|t + \tfrac{1}{t}\right| = \left|\tfrac{t^2+1}{2t}\right|; \end{aligned}$$

c) Für welches t schließt die Schargerade mit der y-Achse einen Winkel von $30°$ ein?

$$\begin{aligned} m_{h_t} &= \tan \tfrac{\pi}{3} \\ -t &= \tan \tfrac{\pi}{3} \\ t &= -\tan \tfrac{\pi}{3} \\ t &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

1.2.3 3. Hausaufgabe

Zettel, Aufgabe 58

$f_t\left(x\right) = tx + 2\sqrt{t^2+1}; \mathbb{D}_{f_t} = \mathbb{R}; t \in \mathbb{R};$

a) Für welches t ist der Graph parallel zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten? Zeichne den Graphen!

$$\begin{aligned} tx &= x \\ t &= 1 \end{aligned}$$

b) Für welches t ist der Graph senkrecht zu einer Geraden mit der Gleichung $y = 2x + 333$?

$$\begin{aligned} tx &= -\tfrac{1}{2}x \\ t &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

c) Welche Graphen der Schar schließen mit der x-Achse einen Winkel von $60°$ ein?

$$\begin{aligned} tx &= \tan\tfrac{\pi}{3} \cdot x \\ t &= \sqrt{3} \text{ sowie } -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_{\pm\sqrt{3}}\left(x\right) = \pm\sqrt{3}x + 4;$

d) Bei welchen t-Werten sind die Nullstellen vom Ursprung $2\sqrt{2}$ entfernt?

$d = \pm 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 0 &= td + 2\sqrt{t^2+1} \\ -td &= 2\sqrt{t^2+1} \\ t^2d^2 &= 4t^2 + 4 \\ t^2\left(d^2-4\right) &= 4 \\ t^2 &= \tfrac{4}{d^2-4} \\ t &= 2\tfrac{\sqrt{d^2-4}}{d^2-4} \\ t &= \pm 1 \end{aligned}$$

e) Welche Stellen der x-Achse sind keine Nullstellen von Schargeraden?

Nullstelle: $tx + 2\sqrt{t^2+1} = 0; \Longrightarrow x\left(t\right) = -2\frac{\sqrt{t^2+1}}{t};$

Auflösen nach t:

$t = \frac{4}{\sqrt{x^2-4}}; \Longrightarrow \mathbb{D}_t = \mathbb{W}_x = \mathbb{R} \setminus \left[-2; 2\right];$

f) Bestimme die Entfernung d, die die beiden Achsenabschnittpunkte der Geraden zum Parameterwert $t = 5$ haben.

$P\left(-2\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}; 0\right)$;

$Q\left(0; f_t\left(0\right)\right) = Q\left(0; 2\sqrt{t^2+1}\right)$;

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{P_x^2 + Q_y^2} = \\ &= \sqrt{4\frac{t^2+1}{t^2} + 4t^2 + 4} = \\ &= 2\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2} + t^2 + 1} = \\ &= \sqrt{4\frac{26}{25} + 104} = 2\sqrt{\frac{26}{25} + 26} = 2\sqrt{\frac{676}{25}} = 2\frac{26}{5} = \frac{52}{5}; \end{aligned}$$

g) Bestimme die Entfernung der Achsenabschnittpunkte einer Schargeraden allgemein.

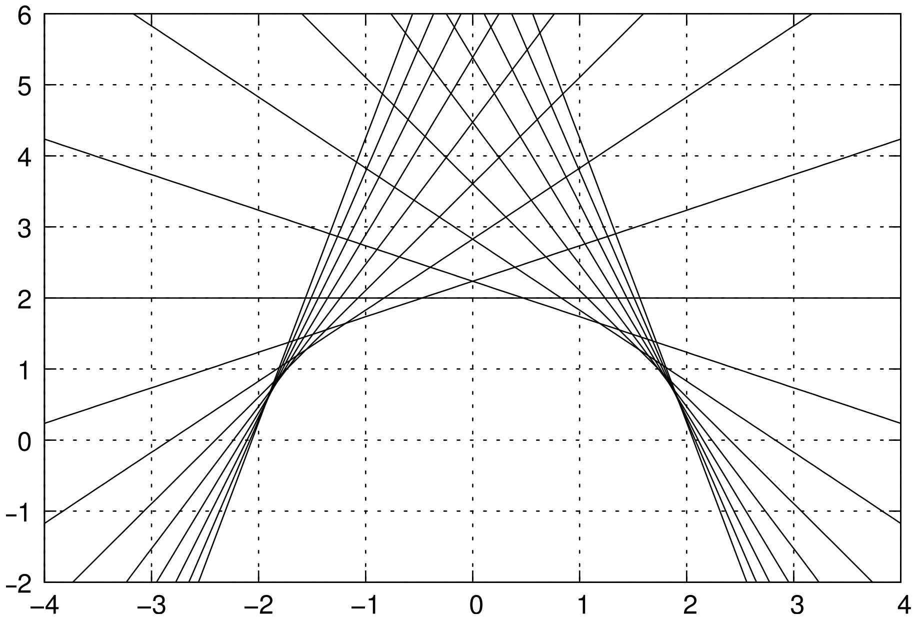
Siehe f)

h) Für welches t beträgt die Entfernung der Achsenschnittpunkte genau 4?

$$\begin{aligned} 4 &= \sqrt{4\frac{t^2+1}{t^2} + 4t^2 + 4} \\ 16 &= 4\frac{t^2+1}{t^2} + 4t^2 + 4 \\ 10 &= 4\frac{t^2+1}{t^2} + 4t^2 \\ 10t^2 &= 4t^2 + 4 + 4t^4 \\ 0 &= 4t^4 - 6t^2 + 4 \\ 0 &= 4u^2 - 6u + 4 \end{aligned}$$

$D_u = 36 - 4 \cdot 4 \cdot 4 < 0 \Longrightarrow \mathbb{L}_t = \{\}$

i) Zeichne die zu $t \in \left\{0; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{1}{2}; \pm 1; \pm 2; \pm 4\right\}$ gehörenden Graphen (Anm.: Ich habe für t Werte von -2 bis $+2$ mit einer Schrittweite von $0,1$ genommen).



1.2.4 4. Hausaufgabe

Zettel, Aufgabe 58g

Siehe 3. Hausaufgabe.

1.2.5 5. Hausaufgabe

Zettel, Aufgabe 58i

Siehe 3. Hausaufgabe.

Zettel, Aufgabe 56

Die Geraden einer Schar haben folgende Eigenschaft:

Die Koordinatenachsen und eine Schargerade bestimmen jeweils ein rechtwinkliges Dreieck im ersten Quadranten mit dem Flächeninhalt $A = 8$.

a) Bestimme die Scharfunktionen f_t.

$f_t : x \mapsto -tx + td;$

$a : x \mapsto td;$

$-tx + td = 0; \Longrightarrow d = x; \Longrightarrow b : x \mapsto d;$

$\frac{1}{2}tdd = A; \Longrightarrow d^2 = \frac{2A}{t}; \Longrightarrow d = \frac{\sqrt{2At}}{t};$

$f_t : x \mapsto -tx + \sqrt{2At};$

b) Welche Nullstelle hat f_t?

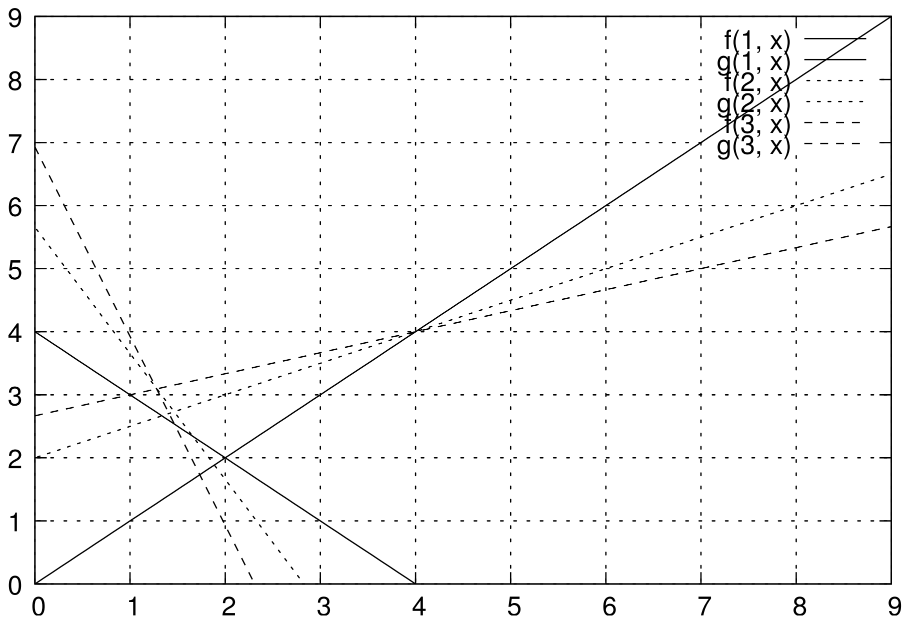
Siehe a) (Variable d)

c) Bestimme die Schar der Funktionen g_t, deren Graphen durch $(4;4)$ verlaufende Geraden sind; dabei soll G_{g_t} auf G_{f_t} senkrecht stehen.

$g_t : x \mapsto \frac{1}{t}x + c;$

$\frac{1}{t} \cdot 4 + c = 4; \Longrightarrow c = 4 - \frac{4}{t};$

$g_t : x \mapsto \frac{1}{t}x + 4 - \frac{4}{t};$



1.2.6 6. Hausaufgabe

Buch Seite 20, Aufgabe 9

Gegeben ist die Geradenschar $g_k : kx - y + 3 - k = 0; k \in \mathbb{R};$

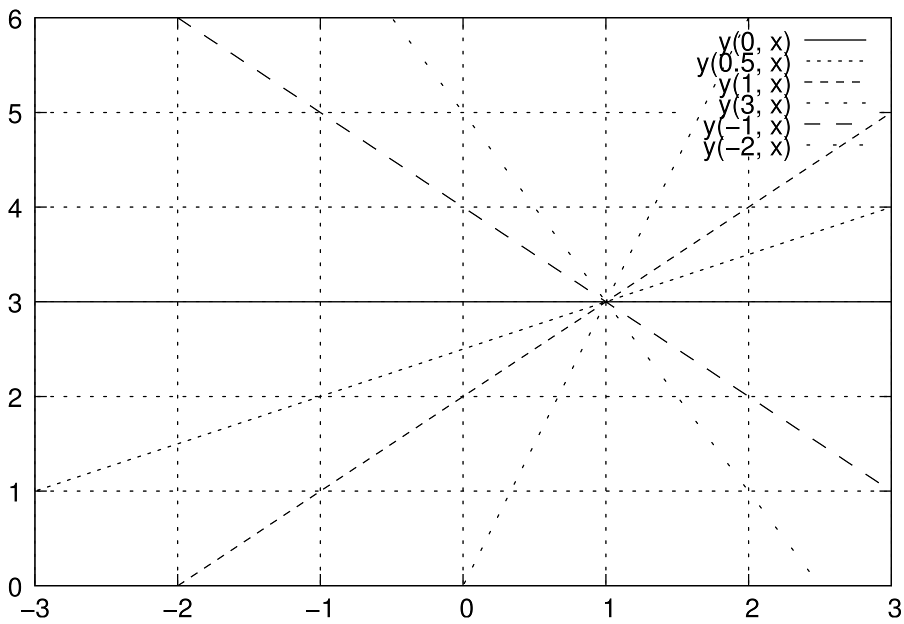
(1)

Zeige, dass der Punkt $P\,(1;3)$ allen Geraden der Schar gemeinsam ist und daher ein **Geradenbüschel** vorliegt!

$$\begin{aligned} kx - y + 3 - k &= 0 \\ k - 3 + 3 - k &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

(2)

Zeichne g_0, $g_{0,5}$, g_1, g_3, g_{-1} und g_{-2}!



(3)

Welche Gerade durch P wird von der Gleichung g_k nicht erfasst?

$x = 1;$

1.2.7 7. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

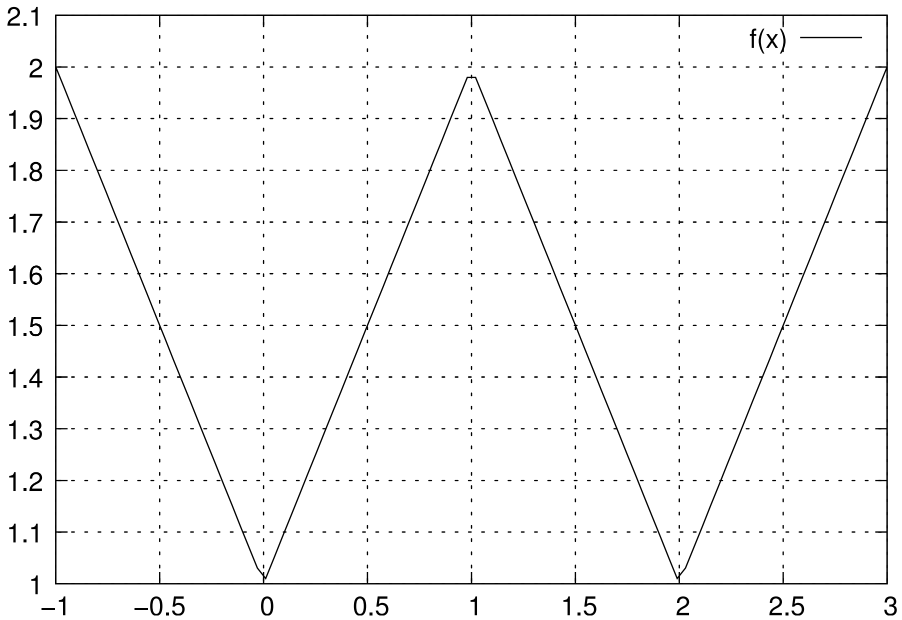
Gib die betragsfreie Form der Funktion $f\,(x) = |x+1| + |x-1|$ an!

$$
\begin{aligned}
f(x) &= |x+1| + |x-1| = \\
&= \begin{cases} -2x & \text{für } x < -1; \\ 2 & \text{für } -1 \leq x < 1; \\ 2x & \text{für } x \geq 1; \end{cases}
\end{aligned}
$$

1.2.8 8. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

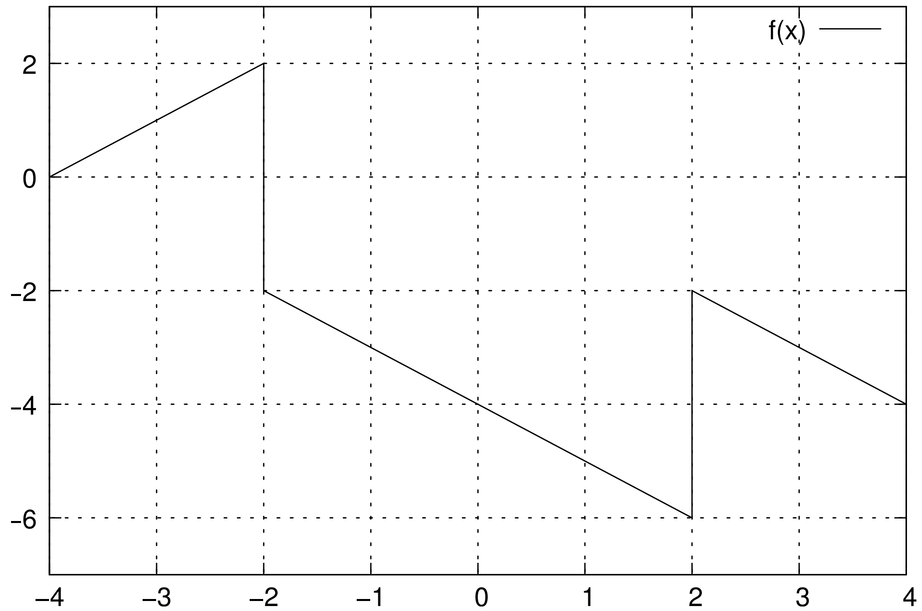
$$
\begin{aligned}
f(x) &= |x| - |x-1| + |x-2| = \\
&= \begin{cases} -x + x - 1 - x + 2 = -x + 1 & \text{für } x \leq 0; \\ +x + x - 1 - x + 2 = x + 1 & \text{für } 0 < x \leq 1; \\ +x - x + 1 - x + 2 = -x + 3 & \text{für } 1 < x \leq 2; \\ +x - x + 1 + x - 2 = x - 1 & \text{für } x > 2; \end{cases}
\end{aligned}
$$



1.2.9 9. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2\cdot\operatorname{sgn}\left(x^2-4\right)-|x+2| = \\
&= \begin{cases} 4+x & \text{für } x<-2; \\ 0 & \text{für } x=-2; \\ -4-x & \text{für } -2<x<2; \\ -4 & \text{für } x=2; \\ -x & \text{für } x>2; \end{cases}
\end{aligned}
$$



1.2.10 10. Hausaufgabe

Buch Seite 22, Aufgabe 2

Bestimme die Nullstellen folgender Funktionen:

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x = x\cdot\left(x^2-3x^2+1\right) = x\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2};\ x_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2};$

c) $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^4 - 5x^2 + 4; \\ x^2 = u; \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) = u^2 - 5u + 4; \Longrightarrow u_1 = 1; u_2 = 4;$

$\Longrightarrow x_1 = -2;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1;\ x_4 = 2;$

Buch Seite 22, Aufgabe 6

Wo liegt der Scheitel der Parabel, wo sind die Funktionswerte negativ?

e) $f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2;$
$\Longrightarrow f'(x) = 2x + 1 = 0;$
$\Longrightarrow x = -\frac{1}{2};$
$\Longrightarrow y = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4};$
$\Longrightarrow S\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right);$

$\mathbb{D}_N = \left]-2; 1\right[;$

f) $f(x) = -x^2 + 2x + 1 =$
$\Longrightarrow f'(x) = -2x + 2;$
$\Longrightarrow x = 1;$
$\Longrightarrow y = 2;$
$\Longrightarrow S(1; 2);$

$x_1 = 1 - \sqrt{2};\ x_2 = 1 + \sqrt{2};$

$\mathbb{D}_N = \mathbb{R} \setminus \left[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right];$

1.2.11 11. Hausaufgabe

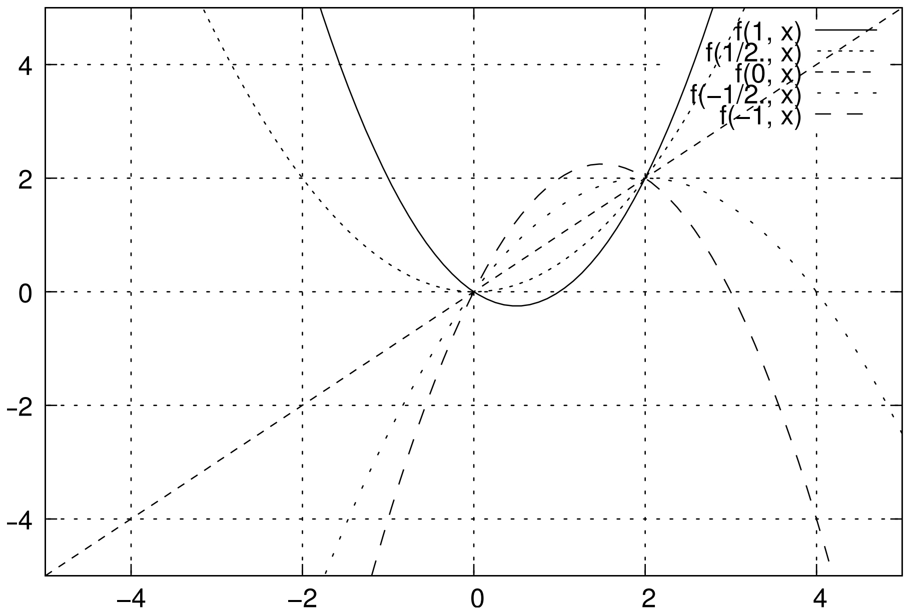
Blatt, Aufgabe 10

Gegeben ist die Schar der Funktionen

$$f_a : x \mapsto f_a(x) = ax^2 + (1 - 2a)\,x; x \in \mathbb{R};$$

mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ und den zugehörigen Graphen G_a.

a) Zeichne die Graphen G_1, G_0 und G_{-1}.



b) Zeige, dass genau zwei Punkte allen Graphen der Schar angehören.

$$\begin{array}{rcl|l} f_{a_1}(x) & = & f_{a_2}(x) & \\ a_1x^2 + (1-2a_1)\,x & = & a_2x^2 + (1-2a_2)\,x & :x \Longrightarrow x_1 = 0; \\ a_1x + 1 - 2a_1 & = & a_2x + 1 - 2a_2 & -a_2x - (1-2a_1) \\ x\,(a_1 - a_2) & = & 1 - 2a_2 - 1 + 2a_1 & :(...) \\ x & = & 2\frac{a_1-a_2}{a_1-a_2} & \\ x & = & 2 & \end{array}$$

$\Rightarrow P_1(0;0); P_2(2;2);$

c) Wie muss a gewählt werden, damit G_a durch den Punkt $P(4;0)$ geht? Zeichne den zugehörigen Graphen.

$$\begin{array}{rcl} y_P & = & f_a(x_P) \\ 0 & = & 8a + 4 \\ -\frac{1}{2} & = & a \end{array}$$

d) Bestimme allgemein für $a \neq 0$ die Nullstellen von f_a.

$f_a(x) = 0; \Longrightarrow ax + 1 - 2a = 0; \Longrightarrow x = \frac{2a-1}{a};$

$\Rightarrow N(\frac{2a-1}{a}; 0);$

e) Für welchen Wert von a berührt G_a die x-Achse?

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{2a-1}{2a}; \\ f_a(x)=ax^2+(1-2a)\,x=ax+1-2a=0; \end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl|l} a\frac{2a-1}{2a}+1-2a &=& 0 & \cdot 2 \\ 2a-1+2-4a &=& 0 & \\ -2a+1 &=& 0 & +2a:2 \\ \frac{1}{2} &=& a & \end{array}$$

1.2.12 12. Hausaufgabe

Buch Seite 26, Aufgabe 2e

Untersuche, ohne den Graphen zu zeichnen, die folgenden Funktion auf ihr Monotonieverhalten:

$f:x\mapsto\frac{1}{x};x\in\mathbb{R}^-;$

$x_1<x_2;x_1,x_2\in\mathbb{R}^-;\Longrightarrow f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0;$

$\Rightarrow f$ ist streng monoton fallend.

1.2.13 13. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$f(x)=\frac{4+x}{2+x};x\in\mathbb{R}^-;$

$x_1,x_2\in\mathbb{R};x_1<x_2;\Longrightarrow$
$f(x_2)-f(x_1)=\frac{4+x_2}{2+x_2}-\frac{4+x_1}{2+x_1}=2\frac{x_1x_2+3x_2+3x_1+8}{x_1x_2+2x_2+2x_1+4};$

1.2.14 14. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$f(x)=\frac{2x}{x^2+1};$

$y=\frac{2x}{x^2+1};$
$\Longrightarrow x^2y-2x+y=0;$
$\Longrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y};$
$\Longrightarrow y\neq 0;1-y^2\geq 0;$
$\Longrightarrow \mathbb{W}=[-1;1];$

Infimum ist $y=-1$, Supremum ist $y=1$. Maximum ist $(1;1)$, Minimum ist $(-1;-1)$.

1.2.15 15. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

Untersuche f auf Symmetrie, Monotonie für $x \geq 0$ und Beschränktheit (Wertemenge)!

$f(x) = \frac{4+|x|}{2+|x|};$

Symmetrie

$f(-x) = \frac{4+|x|}{2+|x|} = f(x);$ $\Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse

Monotonie

$x_1, x_2 \geq 0; x_1 < x_2;$

$\Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{4+x_2}{2+x_2} - \frac{4+x_1}{2+x_1} = \frac{8+4x_1+2x_2+x_1x_2-8-4x_2-2x_1-x_1x_2}{\text{HN}} = \frac{(x_1-x_2)(4-2)}{\text{HN}} < 0;$

$\Rightarrow$ smf für $x \geq 0;$

Beschränktheit

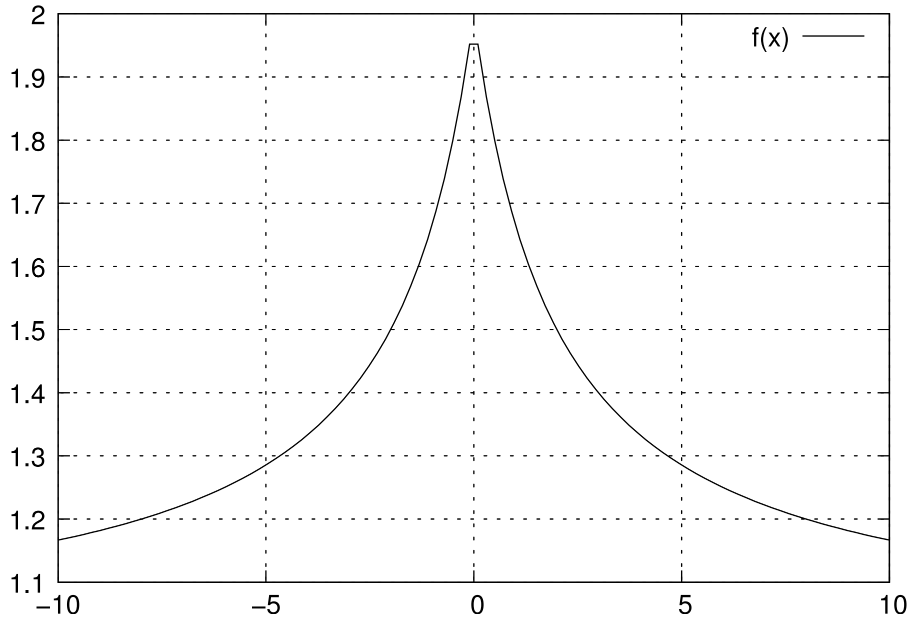
$$\begin{array}{rcl|l} y &=& \frac{4+|x|}{2+|x|} & \cdot (...) \\ 2y + |x|\,y &=& 4 + |x| & -|x| - 2y \\ |x|\,(y-1) &=& 4 - 2y & : (...) \\ |x| &=& \frac{4-2y}{y-1} & \end{array}$$

$\Longrightarrow y \neq 1;$

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{4-2y}{y-1} &\geq& 0 & \cdot (...) \\ 4 - 2y &\geq& 0 & +2x : 2 \\ 2 &\geq& y & \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \text{ und } y \leq 2 & \text{oder} \\ y \leq 1 \text{ und } y \geq 2; \end{cases}$$

$\Longrightarrow \mathbb{W} = \left]1; 2\right];$



1.2.16 18. Hausaufgabe

Zettel, Aufgabe 1

Errate eine Nullstelle und berechne die übrigen:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9; \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = -1; x_3 = 3;$

b) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2; \Rightarrow x_1 = 1;$

Zettel, Aufgabe 2c

Faktorisiere:

$f(x) = -x^5 + 13x^3 - 36x; \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = -2; x_3 = 0; x_4 = 2; x_5 = 3; \Rightarrow$
$f(x) = -x\,(x-3)\,(x-2)\,(x+2)\,(x+3)\,;$

Zettel, Aufgabe 3a

Die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 schneiden sich an der Stelle $x_1 = 2$. Bestimme die übrigen Schnittpunkte!

In welchem Bereich gilt $f_1(x) \geq f_2(x)$?

$f_1(x) = x^2 + 14;$
$f_2(x) = ax;$

$f_1(x_1) = f_2(x_1); \Longrightarrow a = 9; \Longrightarrow f_2(x) = 9x;$
$f_1(x) = f_2(x); \Longrightarrow x_2 = 7;$

$\Rightarrow f_1(x) \geq f_2(x); \Longrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus]2;7[\,;$

Zettel, Aufgabe 4a

Wo gilt $f(x) > g(x)$?

$f(x) = x^2; g(x) = x^4;$
$f(x) > g(x); \Longrightarrow x^2 > x^4; \Longrightarrow 1 > x^2; x \neq 0; \Longrightarrow |x| < 1;$

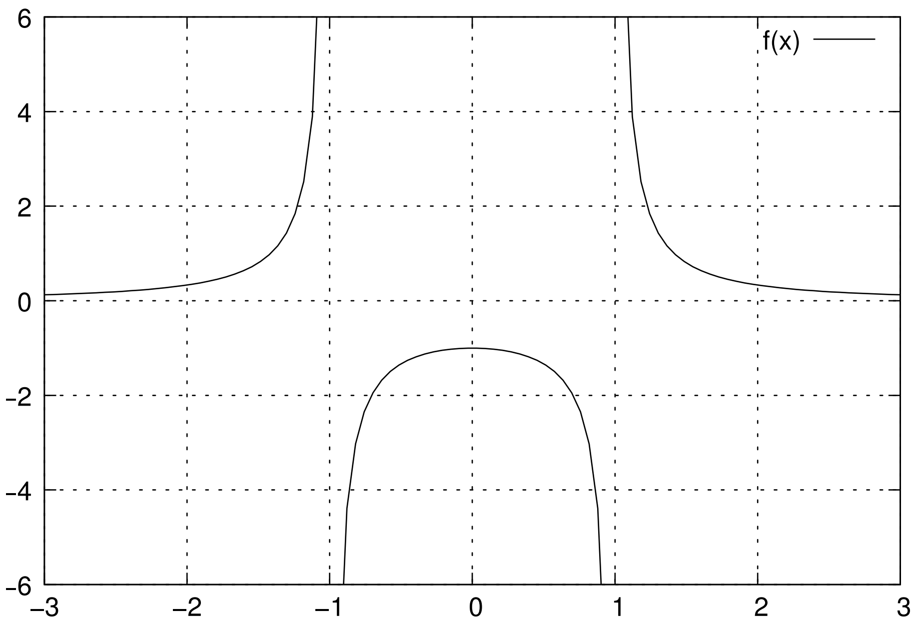
1.2.17 19. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$f(x) = \frac{1}{x^2-1};$
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}\,;\ \mathbb{W}_f = \mathbb{R} \setminus]-1;0]\,;$

$f(-x) = \frac{1}{x^2-1} = f(x); \Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse;

Bei $x = -1$ und $x = 1$ liegen Unendlichkeitsstellen mit VZW vor.



1.2.18 20. Hausaufgabe

Buch Seite 35, Aufgabe 1d

Bestimme Nullstellen, Unendlichkeitsstellen und erkennbare Symmetrieeigenschaften der Graphen folgender Funktion:

$f : x \mapsto f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^3+x^2-2x} = \frac{(x-3)(x+2)}{x(x+2)(x-1)} = \frac{x-3}{x(x-1)}; D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 1\};$

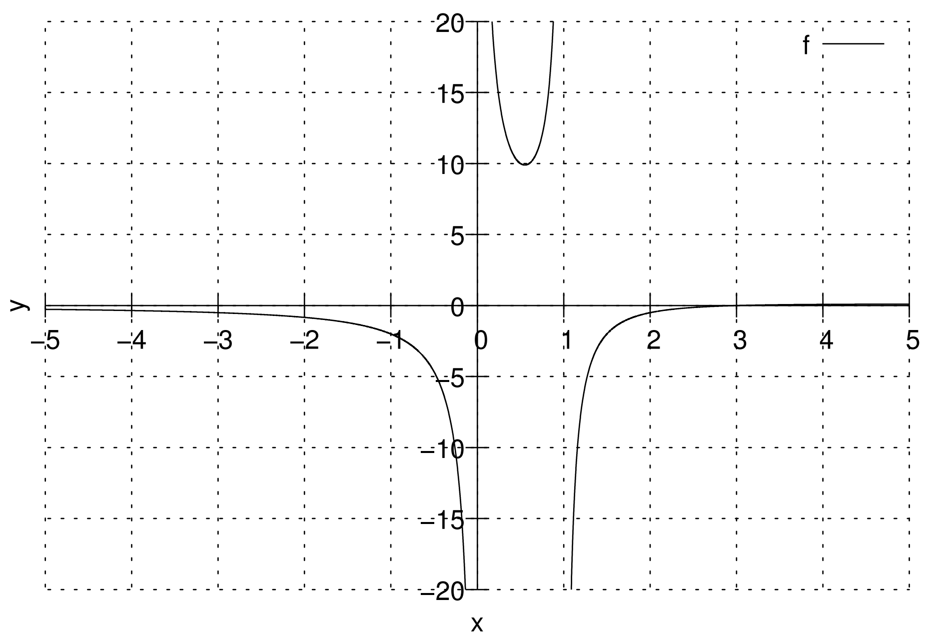
Nullstellen
$N(3; 0);$

„Lochstellen"
$L(-2; -\frac{5}{6});$

Unendlichkeitsstellen
Bei $x = 0$ und $x = 1$ mit VZW;

Asymptoten
$x = 0; x = 1; y = 0;$

Symmetrie
$f(\frac{1}{2} + h) - f(\frac{1}{2} - h) = \cdots = -\frac{2h}{\frac{1}{4}-h^2};$ ⇒ Keine Symmetrie zu $x = \frac{1}{2}$;



Buch Seite 35, Aufgabe 2k

Skizziere im wesentlichen ahand der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen den groben Verlauf des Graphen folgender Funktion:

$f : x \mapsto f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 1; D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3\};$

$\Rightarrow$ Keine Nullstellen, Lochstellen $P_1(1;1)$, $P_2(2;1)$, $P_3(3;1)$, keine Unendlichkeitsstellen;

1.2.19 21. Hausaufgabe

Buch Seite 46, Aufgabe 1

Gib das ν-te Glied der Folge $\langle a_\nu \rangle$ an für:

a) $a_\nu = 1 + \frac{1}{\nu}; \nu = 7; \Longrightarrow a_7 = 1 + \frac{1}{7};$

b) $a_\nu = \nu^2 - 5; \nu = 2; \Longrightarrow a_2 = -1;$

Buch Seite 46, Aufgabe 3

Aus den ersten vier Gliedern dieser Folgen lässt sich jeweils ein Bildungsgesetz erraten. Wie lautet der Term für das allgemeine Glied a_ν? Beachte, dass es u.U. mehre Möglichkeiten geben kann (Anmerkung von mir: lol wtf es gibt sogar unendlich viele Möglichkeiten, aber mom, ich schreibe kurz alle auf, bin gleich wieder da SCNR).

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{\nu}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{\nu}{\nu+1}$

(oder z.B. auch: $a_\nu = \frac{1}{5} + \frac{23}{60}\nu - \frac{11}{120}\nu^2 + \frac{1}{120}\nu^3$;)

c) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \dots, \frac{\nu^2}{\nu+1}$

(oder z.B. auch: $a_\nu = -\frac{1}{5} + \frac{37}{60}\nu + \frac{11}{120}\nu^2 - \frac{1}{120}\nu^3$;)

d) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots, \frac{\nu-1}{\nu+1}$

e) $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{\nu+1}$

1.2.20 22. Hausaufgabe

Buch Seite 48, Aufgabe 1

Berechne das n-te Glied der nachstehenden geometrischen Folgen:

a) $\langle a_\nu \rangle = \left\{ \frac{3}{2}, 3, 6, \ldots \right\}; \Longrightarrow a_\nu = \frac{3}{2} \cdot 2^{\nu-1}; \Longrightarrow a_{10} = 768;$

b) $\langle a_\nu \rangle = \left\{ 2, \frac{12}{5}, \frac{72}{25}, \ldots \right\}; \Longrightarrow a_\nu = 2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{\nu-1}; \Longrightarrow a_5 = \frac{2592}{625};$

Buch Seite 48, Aufgabe 3

Von einer geometrischen Zahlenfolge $\langle a_\nu \rangle = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ ist bekannt: $a_3 = 4$ sowie $a_5 = 8$. Berechne a_1 und a_6!

$a_\nu = a_1 \cdot q^{\nu-1}; \Longrightarrow a_1 = \frac{a_\nu}{q^{\nu-1}};$
$\Longrightarrow a_1 = \frac{4}{q^2} = \frac{8}{q^4};$
$\Longrightarrow |q| = \sqrt{2};$
$\Longrightarrow a_1 = \frac{4}{q^2} = 2;$
$\Longrightarrow a_\nu = 2 \cdot \left(\pm\sqrt{2}\right)^{\nu-1};$
$\Longrightarrow a_6 = 8\sqrt{2}; \quad \vee \quad a_6 = -8\sqrt{2};$

1.2.21 23. Hausaufgabe

Buch Seite 48, Aufgabe 6

Berechne

a) den Luftdruck in $8\mathrm{km}$ und $12\mathrm{km}$ Meereshöhe.

$p(8\mathrm{km}) \approx 0{,}4\mathrm{bar};$

$p(12\mathrm{km}) \approx 0{,}23\mathrm{bar};$

b) die ungefähre Höhe, in der der mittlere Luftdruck $p_s = 175\mathrm{mbar}$ beträgt.

$h \approx 14{,}1\mathrm{km};$

1.2.22 24. Hausaufgabe

Buch Seite 51, Aufgabe 1

Eine geometrische Reihe besteht aus zehn Gliedern. Der Anfangswert ist $a_1 = 2$, der Quotient ist $q = 3$. Wie lautet das 10. Glied und wie groß ist die Summe aller Glieder?

$a_\nu = a_1 \cdot q^{\nu-1} = 2 \cdot 3^{\nu-1};$

$a_{10} = 39366;$

$s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = 59048;$

Buch Seite 51, Aufgabe 2

Berechne folgende Summen:

b) $1 - 4 + 16 - 64 + \ldots - 4^9 = 1 \cdot \frac{(-4)^{10}-1}{-4-1} = -209715;$

c) $4 + 2 + 1 + \ldots + \frac{1}{2^{10}} = -4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{13}-1}{\frac{1}{2}} = -8 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{13} - 1\right] = \frac{8191}{1024};$

1.2.23 25. Hausaufgabe

Buch Seite 51, Aufgabe 2d

Berechne folgende Summe:

$3 - \frac{3}{5} + \frac{3}{25} - \ldots + \frac{3}{390625} = 3 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^9-1}{-\frac{1}{5}-1} = \frac{976563}{390625};$

1.2.24 26. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

Weise nach: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2+1} = 0;$

$x, \varepsilon \in \mathbb{R}^+;$

$$\begin{array}{rcl|l}
\frac{4x_s}{x_s^2+1} & < & \varepsilon; & \cdot\left(x_s^2+1\right) \\
4x_s & < & x_s^2\varepsilon + \varepsilon; & -\left(x_s^2\varepsilon + \varepsilon\right) \\
x_s^2\left(-\varepsilon\right) + 4x_s - \varepsilon & < & 0; & \text{Lösungsformel...} \\
x_s & < & \frac{2+\sqrt{4-\varepsilon^2}}{\varepsilon}; &
\end{array}$$

1.2.25 27. Hausaufgabe

Buch Seite 56, Aufgabe 1

Kennzeichne das Verhalten der Funktion $f : x \mapsto f(x)$ für immer größer werdende x-Werte!

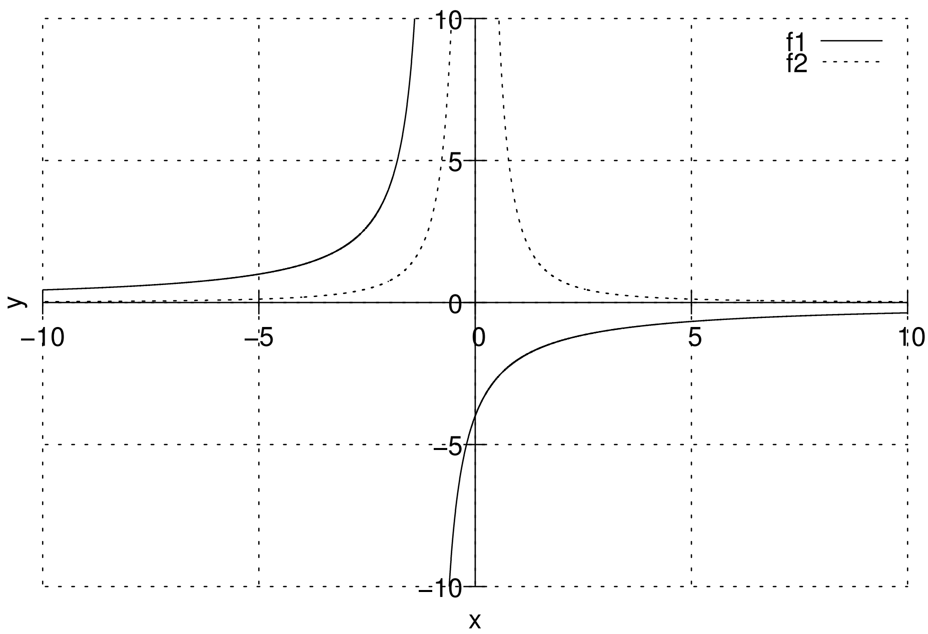
Skizziere den Graphen!

a) $f(x) = -\frac{4}{1+x}; D_f = \mathbb{R}_0^+;$

$\left|-\frac{4}{1+x_s}\right| < \varepsilon; \Rightarrow -\frac{4}{\varepsilon} - 1 < x_s;$

b) $f(x) = \frac{3}{x^2}; D_f = \mathbb{R}^+;$

$\left|\frac{3}{x^2}\right| < \varepsilon; \Rightarrow x_s > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}};$



1.2.26 28. Hausaufgabe

Buch Seite 59, Aufgabe 5a

Bestimme ein x_s so, dass für alle x mit $x > x_s$ gilt:

$\left|\frac{5}{2} - \frac{5x-6}{2x-2}\right| < \frac{1}{1000};$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow x_s = \frac{2\varepsilon+1}{2\varepsilon} = 501;$

Buch Seite 59, Aufgabe 6a

Löse die Ungleichung in Aufgabe 5 für $x > 1$ allgemein durch Einsetzen der positiven (als klein zu denkenden) Zahl ε an Stelle von $\frac{1}{1000}$. Bestimme dann:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x-6}{2x-2} = \frac{5}{2};$

Buch Seite 63, Aufgabe 3b

Von welcher Stelle x ab gilt gegebenfalls $f(x) > 1000 = a$?

$$\begin{aligned} f(x) &> a; \\ \sqrt{x+1} &> a; \\ x+1 &> a^2; \\ x &> 10^6 - 1; \end{aligned}$$

1.2.27 29. Hausaufgabe

Bestimme mit Hilfe der Grenzwertsätze die folgenden Grenzwerte! Es liegt jeweils der Definitionsbereich des Terms zugrunde.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3 + \frac{1}{x}) = 3;$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} (5 - \frac{1}{\sqrt{x}}) = 5;$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\pi}{\sqrt{x}} = 0;$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x} = 0;$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} = 0;$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1^x = 1;$

k) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 0;$

l) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) = 0;$

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x-x^2-x^3}{x^3} = -1;$

n) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x-10}{3x+5} = \frac{5}{3};$

o) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x-10}{1+5x} = \frac{3}{5};$

p) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6} = 1;$

q) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{2x-1}{3x+1} \cdot \frac{6x^2-7}{x^2+4}) = 4;$

r) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x^3-1}{x^3+1} \cdot \frac{x+1}{x^2-1}) = 0;$

s) $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x^5-a^5}{x^5+a^5} \cdot \frac{2\sin(\frac{1}{2}\pi x)}{x}) = 0;$

1.2.28 30. Hausaufgabe

Buch Seite 70, Aufgabe 6

Bestimme für die Folgen $\langle a_\nu \rangle$ den Grenzwert $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu$ nach geeigneter Umformung des Terms:

a) $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{(1+\nu)^2}{1-\nu^2} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1+\nu}{1-\nu} = \frac{0+1}{0-1} = -1;$

b) $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} 3\frac{\sin\frac{\pi}{\nu}}{\sin\frac{\pi}{2\nu}} = 6;$

c) $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{v}}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\nu}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{\nu}}+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0;$

Buch Seite 70, Aufgabe 9

Bestimme für die Folge $\langle a_\nu \rangle$ den Grenzwert a und ermittle eine natürliche Zahl n so, dass $|a_\nu - a| < 0{,}001$ wird für alle $\nu > n$:

a) $a_\nu = 2 + \frac{1}{\nu+1}; \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 2 + 0 = 2;$

$\Rightarrow n = 1000;$

b) $a_\nu = -3 + \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu}}; \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = -3 + 0 = -3;$

$\Rightarrow n = 1000001;$

1.2.29 31. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \frac{\left|x^2-x\right|}{x-1} = \lim\limits_{h\to0+} \frac{\left|1\pm2h+h^2-1\mp h\right|}{1\pm h-1} = \lim\limits_{h\to0+} \frac{\left|h^2\pm h\right|}{\pm h} = \lim\limits_{h\to0+} \pm\left|h\pm1\right|;$

$\Rightarrow \lim\limits_{h\to0+} f(1\pm h) = \pm\left|0\pm1\right| = \pm1 = \lim\limits_{x\to1\pm} f(x);$

1.2.30 32. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } -1 \leq x \leq 1; \\ x^2 - x & \text{für } x > 1; \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to1+} = \lim\limits_{h\to0} f(1+h) = \lim\limits_{h\to0} 1 + 2h + h^2 - 1 - h = \lim\limits_{h\to0} h^2 + h = 0 + 0 = 0;$

$\lim\limits_{x\to1-} = \lim\limits_{h\to0} f(1-h) = \lim\limits_{h\to0} 1 - h = 1 - 0 = 1;$

1.2.31 33. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{für } x \leq -1; \\ 1 - x & \text{für } x > -1; \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+} 1 - x = 1 - (-1) = 2;$

$\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1-} 1 + x^2 = 1 + (-1)^2 = 2;$

1.2.32 34. Hausaufgabe

Buch Seite 91, Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto x^2 - x; D_f = \mathbb{R};$

Berechne den Differenzquotienten bzgl. der Stelle $x_0 = 1$ und den zugehörigen Differentialquotienten!

$m_s = \dfrac{x^2 - x - x_0^2 + x_0}{x - x_0};$

$m_t = 2x - 1;$

Buch Seite 91, Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 - x}; D_f = [-3; 1[\,;$

Berechne $f'(0)$!

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{1-x} - \frac{0}{\dots}}{x - 0} = \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(1 - x)} = \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - x} = \\ &= \frac{1}{1} = 1; \end{aligned}$$

1.2.33 35. Hausaufgabe

Buch Seite 118, Aufgabe 7

Berechne $f'(1)$:

a) $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} - \frac{4}{x}$;
$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{2\cdot\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2}$;
$\Rightarrow f'(1) = 3 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}$;

b) $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - 2 + \frac{1}{x}$;
$\Rightarrow f'(x) = 1 - 0 - \frac{1}{x^2}$;
$\Rightarrow f'(1) = 1 - 1 = 0$;

c) $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x} = x^2 + x + \frac{1}{x}$;
$\Rightarrow f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$;
$\Rightarrow f'(1) = 2 + 1 - 1 = 2$;

1.2.34 36. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgaben

1. $f(x) = \sqrt{5x}; \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{5x}}{2x}$;
2. $f(x) = x \cdot (2x^2 + 3) = 2x^3 + 3x; \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 3$;
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^1} = x^{-\frac{1}{2}}; \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^3}}{x^3}$;
4. $f(x) = x^m \cdot x^n = x^{m+n}; \Rightarrow f'(x) = (m+n)\,x^{m+n-1}$;

1.2.35 37. Hausaufgabe

Buch Seite 116, Aufgabe 6

Wie lautet die Gleichung der „Halbtangente“ an den Graphen der Funktion $f : x \mapsto x^3; x \in [-1; \infty[$ im Punkt $P(-1; -1)$? Welche Flächenmaßzahl hat das Dreieck, das die Halbtangente mit den Koordinatenachsen bildet?

$t : \dfrac{y - y_P}{x - x_P} = \dfrac{y+1}{x+1} = f'(-1) = 3; \Rightarrow y = 3x + 3 - 1 = 3x + 2$;

$t(0) = 2; t(-\frac{2}{3}) = 0$;

$A = \frac{1}{2}2\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$;

Buch Seite 116, Aufgabe 8

Für den Graphen der Funktion $f : x \mapsto \sqrt{x}; x \in \mathbb{R}_0^+$ ist zu bestimmen:

a) Der Neigungswinkel der Tangente im Punkt $P(\frac{3}{4}; ?)$;

$$t : \frac{y - y_P}{x - x_P} = \frac{y - \sqrt{\frac{3}{4}}}{x - \frac{3}{4}} = f'(\tfrac{3}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}}; \Rightarrow$$

$$y = \frac{x - \frac{3}{4}}{2\sqrt{\frac{3}{4}}} + \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \frac{x - \frac{3}{4}}{\sqrt{3}} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{\sqrt{3}}{3}x - \tfrac{\sqrt{3}}{4}; \Rightarrow$$

$$\arctan \tfrac{\sqrt{3}}{3} = \arctan \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{\pi}{6};$$

b) Die Abszisse jenes Kurvenpunktes Q, für den die Tangente unter $\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$ gegen die x-Achse geneigt ist.

$$f'(x) = \tfrac{1}{2\sqrt{x}} = \tan \tfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}; \Rightarrow \tfrac{1}{2\sqrt{3}} = \sqrt{x}; \Rightarrow x = \tfrac{1}{12};$$

1.2.36 38. Hausaufgabe

Buch Seite 122, Aufgabe 7a

Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven mit den Gleichungen $y_1 = 2x - 3$ und $y_2 = x^2 + 2x - 7$? Wie lauten die Tangentengleichungen in den Schnittpunkten?

$y_1 = y_2; \Rightarrow 2x - 3 = x^2 + 2x - 7; 4 = x^2; \Rightarrow |x| = 2;$

$S_1(-2, -7), S_2(2, 1)$

$f_1'(\pm 2) = 2; f_2'(\pm 2) = 2 \cdot \pm 2 + 2; \Rightarrow f_2'(2) = 6; f_2'(-2) = -2;$

$\varphi_1 = \arctan 6 - \arctan 2 \approx 17°;$
$\varphi_2 = \arctan -2 - \arctan 2 + 180° \approx 53°;$

$$t_{1,1} : \frac{y + 7}{x + 2} = 2; \Rightarrow y_{1,1} = 2x - 3;$$

$$t_{1,2} : \frac{y - 1}{x - 2} = 2; \Rightarrow y_{1,2} = 2x - 3;$$

$$t_{2,1} : \frac{y + 7}{x + 2} = -2; \Rightarrow y_{2,1} = -2x - 11;$$

$$t_{2,2} : \frac{y - 1}{x - 2} = 6; \Rightarrow y_{2,2} = 6x - 11;$$

1.2.37 39. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

Bestimme zur Kurve $f: f(x) = ax^2 + bx + c$ die Koeffizenten a, b, c so, dass f durch den Punkt $A(2,1)$ geht und die Gerade $g(x) = 2x + 4$ in $B(1,6)$ berührt.

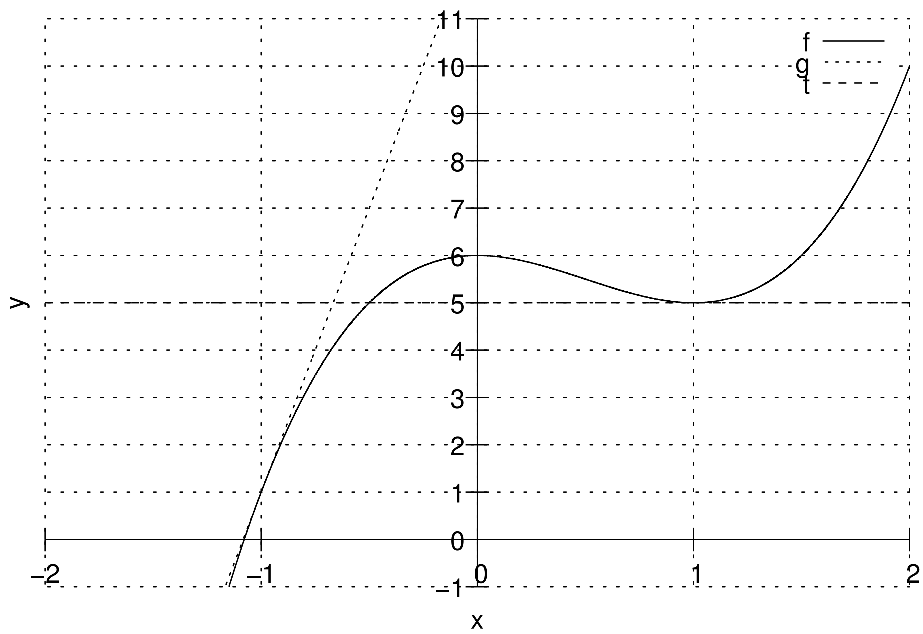
$1 = 4a + 2b + c; \Rightarrow c = 1 - 4a - 2b;$
$6 = a + b + c = a + b + 1 - 4a - 2b; \Rightarrow 5 = -3a - b; \Rightarrow b = -3a - 5;$
$f'(1) = 2a + b = 2; \Rightarrow b = 2 - 2a;$
$-3a - 5 = 2 - 2a; \Rightarrow -7 = a;$
$\Rightarrow b = -3(-7) - 5 = 16;$
$\Rightarrow c = 1 - 4(-7) - 2 \cdot 16 = -3;$
$\Rightarrow f(x) = -7x^2 + 16x - 3;$

1.2.38 40. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ berührt die Gerade $g(x) = 12x + 13$ in $A(-1,1)$ und hat in $B(1,5)$ eine waagrechte Tangente.

$f(-1) = 1 = -a + b - c + d;$
$\quad \Rightarrow d = 1 + a - b + c;$
$f(1) = 5 = a + b + c + d = a + b + c + 1 + a - b + c;$
$\quad \Rightarrow 4 = 2a + 2c;$
$\quad \Rightarrow c = 2 - a;$
$f'(-1) = 0 = 3a + 2b + c = 3a + 2b + 2 - a;$
$\quad \Rightarrow -2 = 2a + 2b;$
$\quad \Rightarrow b = -1 - a;$
$f'(-1) = 12 = 3a - 2b + c = 3a + 2 + 2a + 2 - a = 4a + 4;$
$\quad \Rightarrow 8 = 4a;$
$\quad \Rightarrow a = 2;$
$\quad \Rightarrow b = -1 - 2 = -3;$
$\quad \Rightarrow c = 2 - 2 = 0;$
$\quad \Rightarrow d = 1 + 2 + 3 = 6;$
$\quad \Rightarrow f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6;$



1.2.39 41. Hausaufgabe

Buch Seite 116, Aufgabe 12

Berechne den Neigungswinkel der Tangente der „Sinuslinie" mit der Gleichung $y = \sin x$ auf $0{,}01°$ genau:

a) $P(\frac{1}{2}, ?)$;

$\alpha = \arctan \cos \frac{1}{2} \approx 41{,}27°$;

c) $P(\frac{3}{2}, ?)$;

$\alpha = \arctan \cos \frac{3}{2} \approx 4{,}05°$;

Buch Seite 116, Aufgabe 13

Für den Graphen der Funktion $f : x \mapsto \sin x; x \in [0, 2\pi]$ sollen die Abszissen jener Kurvenpunkte auf eine Dezimale genau berechnet werden, für die

a) die Steigung $\frac{1}{2}$ ist.

$f'(x) = \frac{1}{2} = \cos x; \Rightarrow x_1 = 60° = \frac{\pi}{3}; \quad x_2 = \frac{5}{3}\pi;$

c) die Tangente parallel ist zur Geraden $g : 2x - 3y - 6 = 0$.

$\Rightarrow g : y = \frac{2}{3}x - 2;$

$f'(x) = \frac{2}{3} = \cos x; \Rightarrow x_1 \approx 0{,}8 \quad x_2 \approx 5,4;$

1.2.40 42. Hausaufgabe

Buch Seite 122, Aufgabe 7b

Welchen Punkt haben die Graphen von $f : x \mapsto \cos x + \sin x$ und $g : \sin x - 2\cos x$ in $[0, \pi]$ gemeinsam? Man berechne den Schnittwinkel in diesem Punkt!

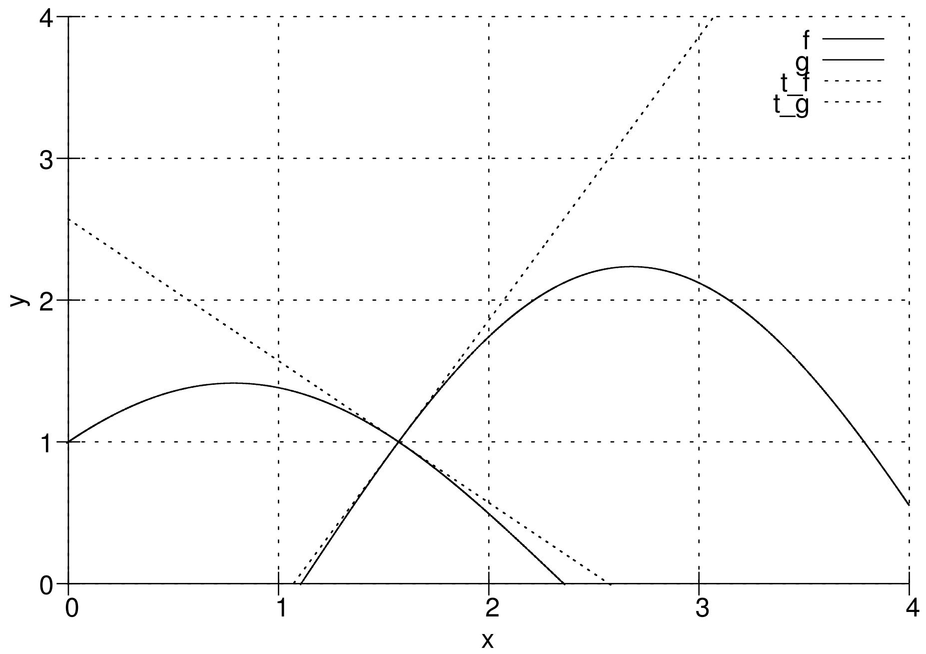
$\cos x + \sin x = \sin x - 2\cos x; \Rightarrow 3\cos x = 0; \Rightarrow \cos x = 0; \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}; \Rightarrow P(\frac{\pi}{2}, 1);$

$f'(\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = -1 + 0 = -1;$

$g'(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 2 = 2;$

$\Rightarrow \varphi^* = \arctan 2 - \arctan(-1) \approx 108°;$

$\Rightarrow \varphi = 180° - \varphi^* \approx 72°;$



1.2.41 43. Hausaufgabe

Buch Seite 123, Aufgabe 15

Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_a : x \mapsto y = ax^2 - 2x + 1$, wobei der Scharparameter a eine beliebige reele Zahl vertritt.

a) Für welche Belegung von a geht die Tangente in $P(1, ?) \in G_{f_a}$ durch den Ursprung des Koordinatensystems?

$$\frac{t_a(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{t_a(x) - a + 2 - 1}{x - 1} = \frac{t_a(x) - a + 1}{x - 1} = f_a'(1) = 2a - 2; \Rightarrow$$

$$t_a : t_a(x) = 2ax - 2x - 2a + 2 + a - 1 = 2(a - 1)x + 1 - a; \Rightarrow$$

$$1 - a = 0; \Rightarrow a = 1;$$

b) Wie lautet die Gleichung der Normalen durch P für beliebige Werte von a?

$$\frac{n_a(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{n_a(x) - a + 1}{x - 1} = -\frac{1}{f_a'(1)} = -\frac{1}{2a - 2}; \Rightarrow$$

$$n_a(x) = -\frac{x - 1}{2a - 2} + a - 1 = \frac{1}{2 - 2a}x - \frac{2a^2 - 4a + 3}{2 - 2a}; \quad a \neq 1;$$

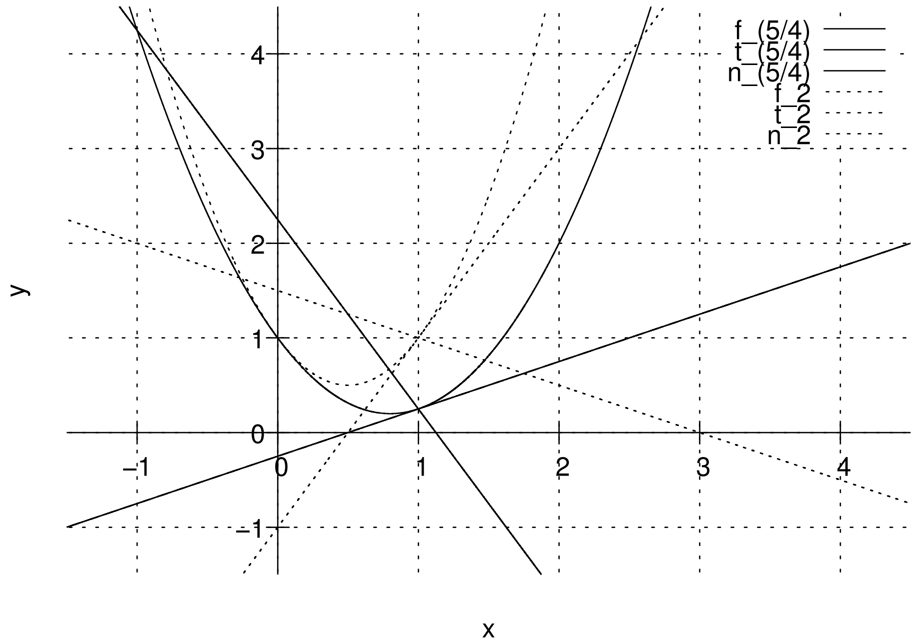
c) Für welche a-Werte bilden Tangente und Normale durch P mit der y-Achse ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge $\frac{5}{2}$? (Vier Lösungen)

$$t_a(0) = 1 - a; \quad n_a(0) = -\frac{2a^2 - 4a + 3}{2 - 2a};$$

$$n_a(0) - t_a(0) = \tfrac{5}{2}; \Rightarrow L_{a_1} = \ldots = \left\{\tfrac{5}{4}, 2\right\};$$

$$t_a(0) - n_a(0) = \tfrac{5}{2}; \Rightarrow L_{a_2} = \ldots = \left\{0, \tfrac{3}{4}\right\};$$

$$\Rightarrow L_a = L_{a_1} \cup L_{a_2} = \left\{0, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{4}, 2\right\};$$



1.2.42 44. Hausaufgabe

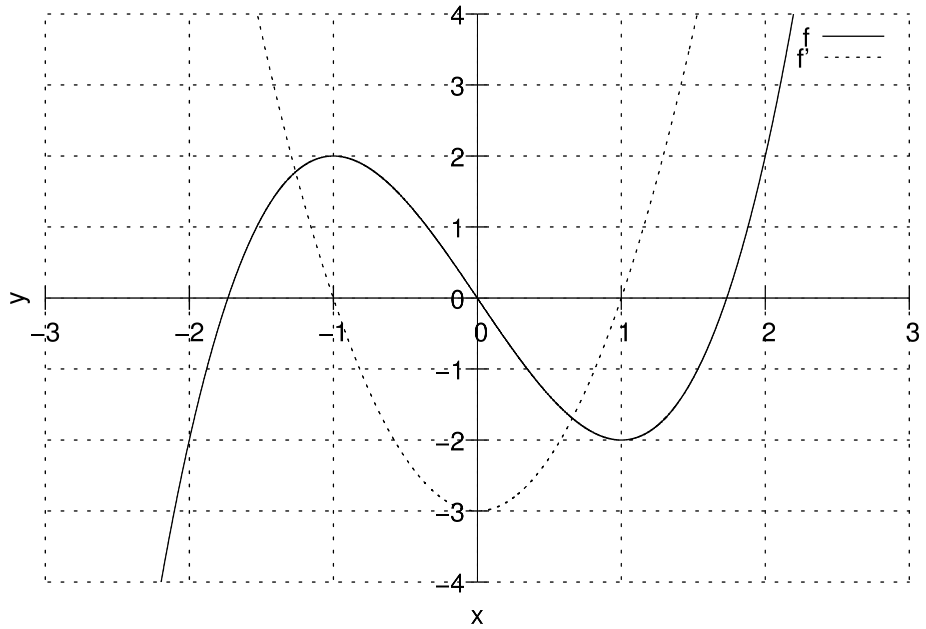
Selbstgestellte Aufgabe

$f(x) = x^3 - 3x; \quad D_f = \mathbb{R};$
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\,(x+1)\,(x-1)\,;$

$$f'(x) > 0; \Rightarrow 3\,(x+1)\,(x-1) > 0;\ \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0; \Rightarrow f \text{ ist sms;} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \left]-1,1\right[\,; \\ f'(x) < 0; \Rightarrow f \text{ ist smf;} & \text{für } x \in \left]-1,1\right[\,; \end{cases}$$

$f'(x) = 0; \Rightarrow 3\,(x+1)\,(x-1) = 0; \Rightarrow$
$P_1(-1,2); P_1(1,-2);$

$f'(x) > 0;\ \Rightarrow f$ steigt.
$f'(x) < 0;\ \Rightarrow f$ fällt.
$f'(x) = 0;\ \Rightarrow f$ hat eine waagrechte Tangente.



1.2.43 45. Hausaufgabe

Buch Seite 127, Aufgabe 5

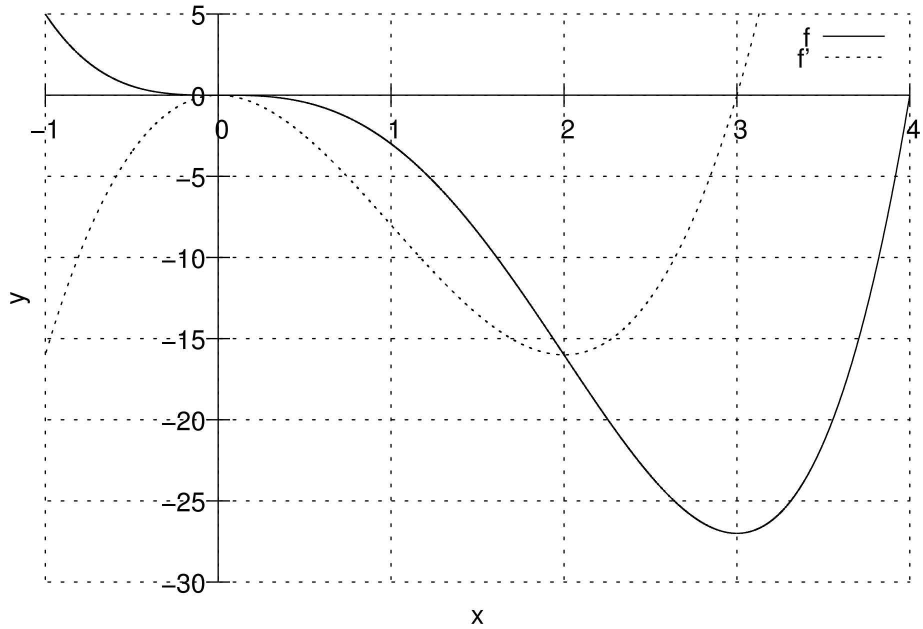
Zeige, dass die Funktion $f : x \mapsto f(x) = x^4 - 4x^3$ an der einen Nullstelle der Ableitung einen Extremwert hat, an der anderen aber nicht.

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0; \Rightarrow x_1 = 0; \quad 4x_2 = 12; \Rightarrow x_2 = 3;$

$f''(x) = 12x^2 - 24x;$

$f''(0) = 0; \qquad P_{\mathrm{TEP}}(0, 0);$

$f''(3) \neq 0; \qquad P_{\mathrm{TIP}}(3, -27);$



1.2.44 46. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$f(x) = x^4 - 4x^2 = x^2\left(x^2 - 4\right) = x^2\left(x + 2\right)\left(x - 2\right);$

Nullstellen

$N_1(-2, 0); \quad N_2(0, 0); \quad N_3(2, 0);$

Symmetrie

$f(-x) = x^4 - 4x^2 = f(x);$ ⇒ Symmetrie zur y-Achse

Extrema

$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x\left(x^2 - 2\right) = 4x\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right) = 0;$
$f''(x) = 12x^2 - 8; \Rightarrow$

$x_1 = -\sqrt{2};$
$f''(x_1) = f''(-\sqrt{2}) > 0; \Rightarrow P_{\mathrm{TIP}}(-\sqrt{2}, -4);$

$x_2 = 0;$
$f''(x_2) = f''(0) < 0; \Rightarrow P_{\mathrm{HOP}}(0, 0);$

$x_3 = \sqrt{2};$
$f''(x_3) = f''(\sqrt{2}) > 0; \Rightarrow P_{\mathrm{TIP}}(\sqrt{2}, -4);$

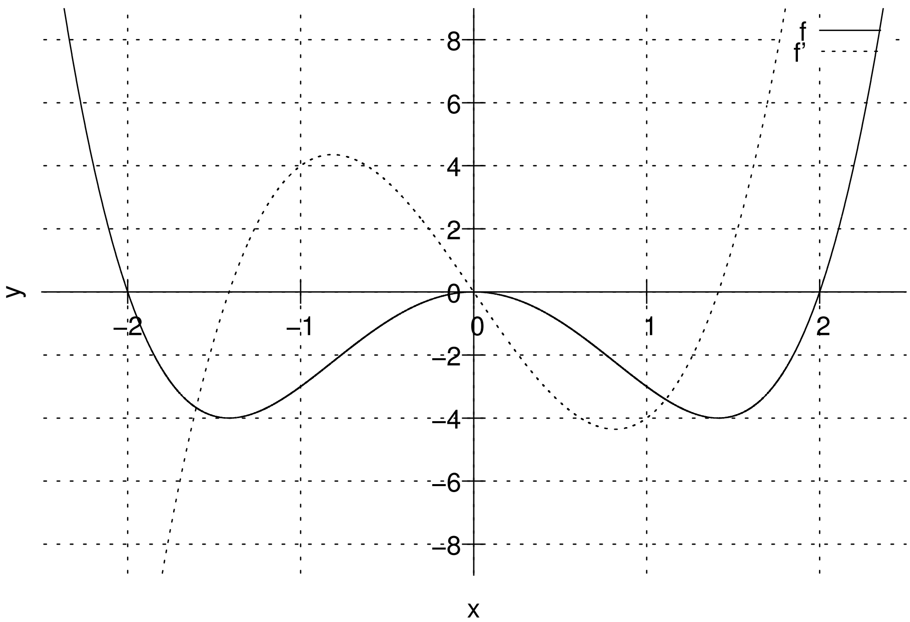
Monotoniebereiche

$f'(x) = 4x\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) > 0; \Rightarrow$

f ist in sms in $\left]-\sqrt{2},0\right[\cup\left]\sqrt{2},\infty\right[$;

f ist in smf in $\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]0,\sqrt{2}\right[$;

Graph



1.2.45 47. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$\mathrm{f}(x) = -\frac{4}{5}x^5 + 3x^3 = -\frac{4}{5}x^3\left(x+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$;

Nullstellen

$N_1(-\frac{\sqrt{15}}{2},0)$; $\quad N_2(0,0)$; $\quad N_3(\frac{\sqrt{15}}{2},0)$;

Symmetrie

$\mathrm{f}(-x) = \frac{4}{5}x^5 - 3x^3 = -\mathrm{f}(x); \Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung;

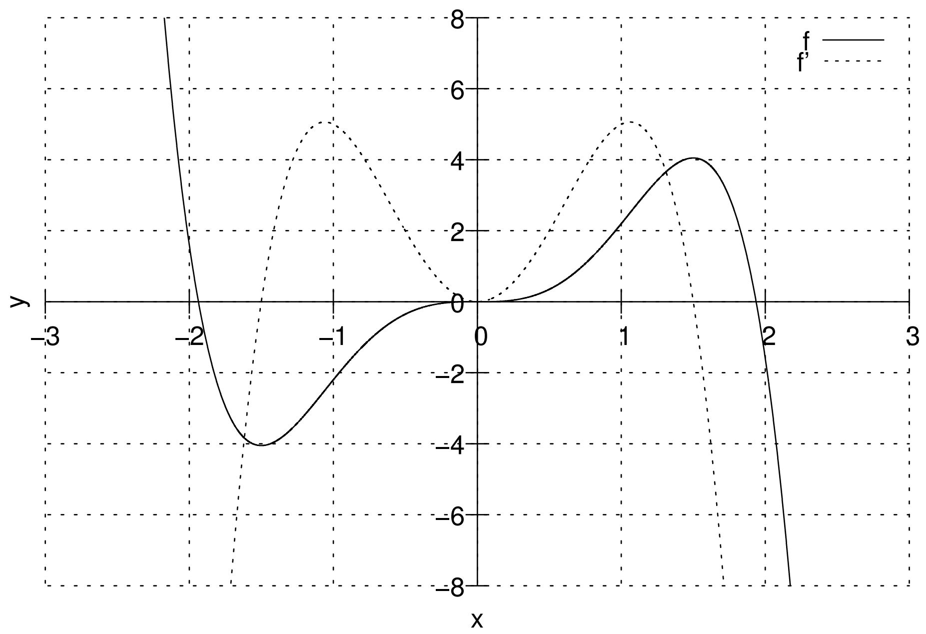
Extrema und Terassenpunkte

$\mathrm{f}'(x) = -4x^4 + 9x^2 = 0; \Rightarrow$

$x_1 = -\frac{3}{2}$; $\quad x_2 = 0$; $\quad x_3 = \frac{3}{2}$;

$\mathrm{f}''(x) = -16x^3 + 18x$;

- $f''(x_1) = f''(-\frac{3}{2}) = 27 > 0; \Rightarrow P_{\text{TIP}}(-\frac{3}{2}, -\frac{81}{20});$
- $f''(x_2) = f''(0) = 0;$ $\Rightarrow$ Vorzeichenanalyse notwendig: $f'(x)$ wechselt das Vorzeichen in der Umgebung von x_2 nicht; $\Rightarrow P_{\text{TEP}}(0,0);$
- $f''(x_3) = f''(\frac{3}{2}) = -27 < 0; \Rightarrow P_{\text{HOP}}(\frac{3}{2}, \frac{81}{20});$



Selbstgestellte Aufgabe

$f(x) = 2x^2 - \sqrt{x}; \quad D_f = \mathbb{R}_0^+;$

Nullstellen

$N_1(0,0); \quad N_2(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}, 0);$

Symmetrie

f ist in $\mathbb{R}^-$ nicht definiert; $\Rightarrow$ Keine Symmetrie zur y-Achse oder zum Ursprung;

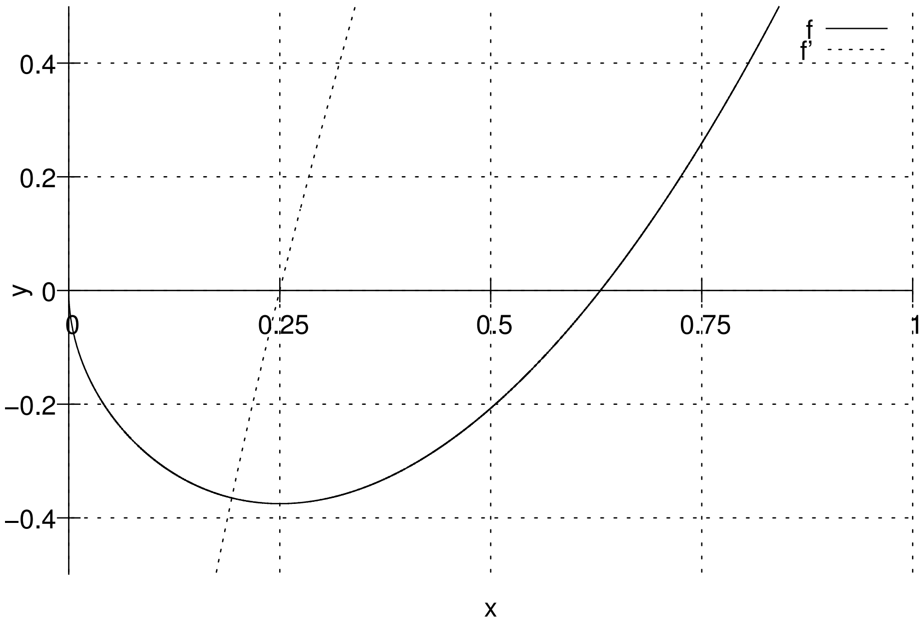
Extremum

$f'(x_0) = 4x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 0; \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4};$

$f'(x)$ wechselt in der Umgebung von x_0 das Vorzeichen von $-$ nach $+$; $\Rightarrow P_{\text{TIP}}(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8});$

Monotonie

f ist in $\left[0,\frac{1}{4}\right[$ smf, in $\left[\frac{1}{4},\infty\right[$ sms.



1.2.46 48. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$f(x) = 2x^2 - 8x; \quad D_f = [-2,5]\,;$

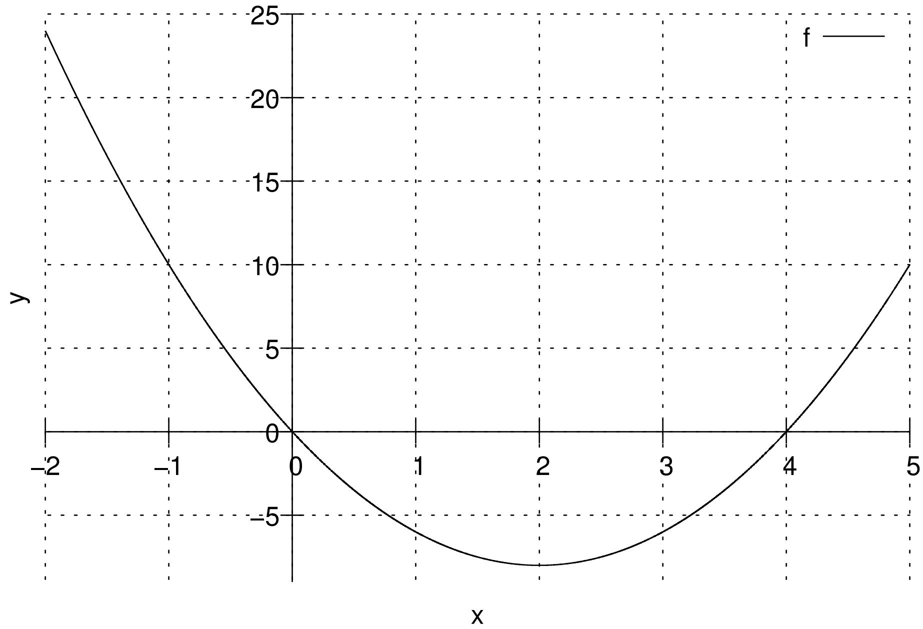
$f'(x_s) = 4x_s - 8 = 0; \Rightarrow x_s = 2;$

$f(x_s) = f(2) = -8;$

$f(-2) = 8 - 8\,(-2) = 24;$

$f(5) = 50 - 40 = 10;$

$\Rightarrow W_f = [-8,24]\,;$



1.2.47 49. Hausaufgabe

Buch Seite 107, Aufgabe 1

Für die Funktion $f : x \mapsto f(x) = x^2 + 2$ trifft bezüglich des Intervalls $I = [-1, 2]$ die Aussage des Extremwertsatzes zu. Warum? Gib das Maximum und das Minimum an!

f ist in I stetig $\Rightarrow$ Anwendung des Extremwertsatzes möglich

$x_s = 0;$
$f(-1) = 3;$
$f(2) = 6;$

$\Rightarrow P_{\text{HOP}}(2, 6); \quad P_{\text{TIP}}(0, 2);$

Buch Seite 108, Aufgabe 5

Hat f in $I = [-1, 2]$ eine Nullstelle? Begründe, warum man den Nullstellensatz anwenden darf bzw. warum nicht!

a) $f : x \mapsto f(x) = -x^3 + 4x + 1; \quad D_f = \mathbb{R};$

f ist in I stetig $\Rightarrow$ Anwendung des Nullstellensatzes möglich

$f(-1) = -4;$
$f(2) = 17;$

$\Rightarrow$ Ja, f hat in I eine Nullstelle.

b) $f : x \mapsto f(x) = x^2 - 2; \quad D_f = \mathbb{R};$

f ist in I stetig $\Rightarrow$ Anwendung des Nullstellensatzes möglich

$f(-1) = -1;$
$f(2) = 2;$

$\Rightarrow$ Ja, f hat in I eine Nullstelle.

1.2.48 50. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

a) $\sqrt{4{,}1} \approx \sqrt{4} + 0{,}1 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}025;$

b) $3{,}9^3 \approx 4^3 - 0{,}1 \cdot 3 \cdot 4^2 = 59{,}2;$

c) $\frac{1}{5{,}9} \approx \frac{1}{6} + 0{,}1 \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{61}{360} \approx 0{,}1694;$

1.2.49 51. Hausaufgabe

Buch Seite 159, Aufgabe 2

Welches Krümmungsverhalten zeigt die Funktion f in einer Umgebung der Stelle x_0?

a) $\mathrm{f} : x \mapsto \mathrm{f}(x) = x^4 - 3x^2; \quad x_0 = -1;$

$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = 4x^3 - 6x;$

$\Rightarrow \mathrm{f}''(x) = 12x^2 - 6;$

$\Rightarrow \mathrm{f}''(x_0) = \mathrm{f}''(-1) = 12 - 6 = 6;$

$\Rightarrow$ f ist an der Stelle x_0 linksgekrümmt.

b) $\mathrm{f} : x \mapsto \mathrm{f}(x) = x^3 - 4x; \quad x_0 = 2;$

$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = 3x^2 - 4;$

$\Rightarrow \mathrm{f}''(x) = 6x;$

$\Rightarrow \mathrm{f}''(x_0) = \mathrm{f}''(2) = 12;$

$\Rightarrow$ f ist an der Stelle x_0 linksgekrümmt.

Buch Seite 159, Aufgabe 1

Bestimme für die folgende Funktion $\mathrm{f} : x \mapsto f(x); \quad x \in \mathbb{R}$ die x-Werte der Extrema und die Wendepunkte (soweit vorhanden) des Graphen.

$\mathrm{f}(x) = x^2 - 6x + 5;$

$\Rightarrow \mathrm{f}'(x_{\mathrm{TIP}}) = 2x_{\mathrm{TIP}} - 6 = 0; \Rightarrow x_{\mathrm{TIP}} = 3;$

$\Rightarrow \mathrm{f}''(x) = 2;$

$\Rightarrow \mathrm{f}$ hat in D_f keine Wendepunkte.

1.2.50 52. Hausaufgabe

Buch Seite 162, Aufgabe 3a

Bestimme Extremwerte und Wendepunkte von G_{f}! Wie lauten die Gleichungen der Kurventangenten, die mit der positiven x-Achse einen Winkel von $45°$ bilden?

$\mathrm{f} : x \mapsto \mathrm{f}(x) = \frac{1}{12}x^3 - 2x^2 + 16x - 42;$

$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 16 = \frac{1}{4}\left(x - 8\right)^2;$

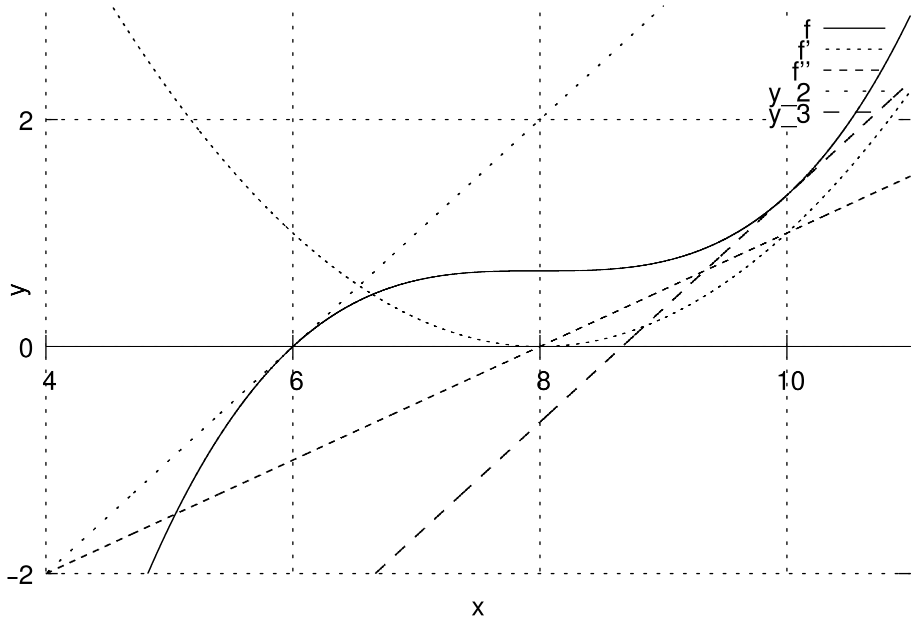
$\Rightarrow \mathrm{f}''(x) = \frac{1}{2}x - 4 = \frac{1}{2}\left(x - 8\right);$

$x_1 = 8$: $\mathrm{f}'(x_1) = 0 \land$ Kein VZW; $\Rightarrow P_{\mathrm{TEP}}(8, \frac{2}{3});$

$\mathrm{f}'(x) = 1; \Rightarrow P_2(6, 0); \quad P_3(10, \frac{4}{3});$

$\Rightarrow \dfrac{y_2}{x - 6} = 1; \Rightarrow y_2 = x - 6;$

$\Rightarrow \dfrac{y_3 - \frac{4}{3}}{x - 10} = 1; \Rightarrow y_3 = x - \frac{26}{3};$



1.2.51 53. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$\mathrm{f}(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2; \quad P_0(-1, 11);$

$\Rightarrow \mathrm{f}'(x_0) = 4x_0^3 + 24x_0^2 + 36x_0 = -16;$

$\Rightarrow \dfrac{y-11}{x+1} = -16; \Rightarrow y = -16x - 5;$

$\Rightarrow -16x - 5 = x^4 + 8x^3 + 18x^2; \Rightarrow x_1 = -5; \quad x_2 = x_0 = -1;$

1.2.52 55. Hausaufgabe

Buch Seite 163, Aufgabe 14

Gegeben ist $\mathrm{f} : x \mapsto \mathrm{f}(x) = \frac{1}{7} \left| x^2 + 3x - 10 \right|$.

Wo ist f nicht differenzierbar? Zeichne G_f und $G_{\mathrm{f}'}$ in $[-6, 6]$! Welche sprunghafte Richtungsänderung erfährt die Tangente beim Überschreiten jener Stellen, an denen die Funktion keine Ableitung hat? Wo ist $\mathrm{f}(x) < \frac{7}{4}$?

$x^2 + 3x - 10 = 0; \Rightarrow x_1 = -5; \quad x_2 = 2;$

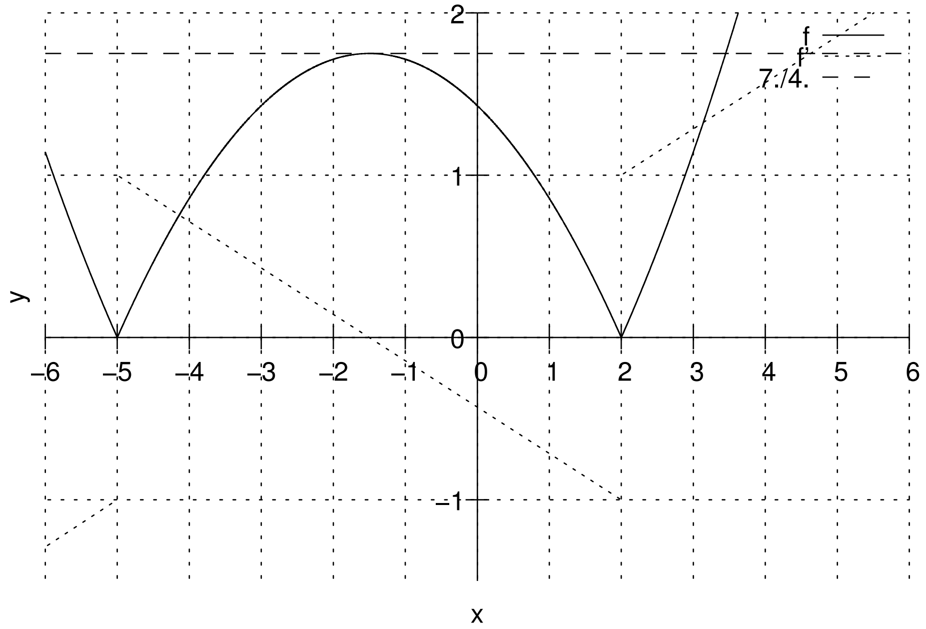
$$\mathrm{f}'(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}(2x+3) & \text{für } x < -5 \vee x > 2; \\ -\frac{1}{7}(2x+3) & \text{für } x \in \left]-5, 2\right[; \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -5\pm} \mathrm{f}'(x) = \mp 1$; $\Rightarrow$ f ist an -5 nicht diffbar;

$\lim\limits_{x\to 2\pm} \mathrm{f}'(x) = \pm 1$; $\Rightarrow$ f ist an 2 nicht diffbar;

Die Richtungsänderung beträgt jeweils $90°$.

$\frac{1}{7}\left(x^2+3x-10\right) < \frac{7}{4}; \Rightarrow L = \left]-\frac{7\sqrt{2}+3}{2}, \frac{7\sqrt{2}-3}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\};$



1.2.53 56. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$\mathrm{f}(x) = \frac{x}{3}\left|x^2-4\right|; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R};$

Nullstellen

$\mathrm{f}(x) = 0;$

$\Rightarrow N_1(-2,0); \quad N_2(0,0); \quad N_3(2,0);$

Symmetrie

$\mathrm{f}(-x) = \frac{-x}{3}\left|(-x)^2-4\right| = -\frac{x}{3}\left|x^2-4\right| = -\mathrm{f}(x); \Rightarrow$

Punktsymmetrie zum Ursprung;

Extrema

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}\left(x^2-4\right) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x & \text{für } x \in \left]-\infty,-2\right] \cup \left[2,\infty\right[\,; \\ -\frac{x}{3}\left(x^2-4\right) = -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x\right) & \text{für } x \in \left]-2,2\right[\,; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{4}{3} & \text{für } x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,\infty\right[\,; \\ -\left(x^2-\frac{4}{3}\right) & \text{für } x \in \left]-2,2\right[\,; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pm\left(x_0^2 - \frac{4}{3}\right) = 0; \Rightarrow x_0^2 = \frac{4}{3};$$

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}; \quad x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3};$$

Vorzeichenanalyse von f':

$x_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$;

Vorzeichenwechsel von f' von $-$ nach $+$; $\Rightarrow P_{\text{TIP},1}(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{16}{27}\sqrt{3})$;

$x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$;

Vorzeichenwechsel von f' von $+$ nach $-$; $\Rightarrow P_{\text{HOP},1}(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{16}{27}\sqrt{3})$;

$x_3 = -2$;

Vorzeichenwechsel von f' von $+$ nach $-$; $\Rightarrow P_{\text{HOP},2}(-2,0)$;

$x_4 = 2$;

Vorzeichenwechsel von f' von $-$ nach $+$; $\Rightarrow P_{\text{TIP},2}(2,0)$;

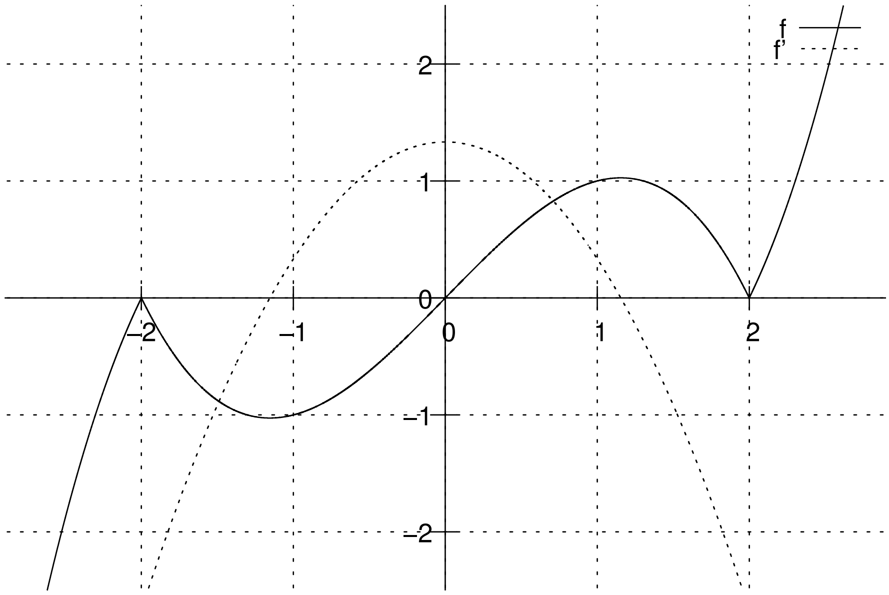
Wendepunkte

$$\mathrm{f}''(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,\infty\right[\,; \\ -2x & \text{für } x \in \left]-2,2\right[\,; \end{cases}$$

$\pm 2x_5 = 0; \Rightarrow x_5 = 0;$

$\Rightarrow P_{\text{WEP},1}(0,0);$

Sowie: $P_{\text{WEP},2}(-2,0)$; $\quad P_{\text{WEP},3}(2,0)$;



1.2.54 57. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$\mathrm{f}(x) = \left(x^2 - 2x\right)^2;$

$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = 2\left(x^2 - 2x\right) \cdot (2x - 2) = 4x^3 - 8x^2 - 4x^2 + 8x = 4x^3 - 12x^2 + 8x;$

$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right)' = 4x^3 - 12x^2 + 8x;$

1.2.55 58. Hausaufgabe

Bilde für den angegebenen Term $\mathrm{f}(x)$ der Funktion $\mathrm{f}: x \mapsto \mathrm{f}(x); \quad x \in D_{\mathrm{f}}$ den Ableitungsterm $\mathrm{f}'(x)$! Bei welchen Aufgaben stimmt $D_{\mathrm{f}'}$ nicht mit D_{f} überein?

Buch Seite 144, Aufgabe 1f

$\mathrm{f}(x) = (\sin x + 2\cos x)^3; \quad D_{\mathrm{f}} = \mathbb{R};$

$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = 3(\sin x + 2\cos x)^2(\cos x - 2\sin x); \quad D_{\mathrm{f}'} = D_{\mathrm{f}};$

Buch Seite 144, Aufgabe 2

c) $\mathrm{f}(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R};$

$$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = -\frac{2\,(x^2+x+1)\,(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}; \quad D_{\mathrm{f}'} = D_\mathrm{f};$$

d) $\mathrm{f}(x) = \dfrac{1}{(2-\sin x)^2}; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R};$

$$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = 2\frac{(2-\sin x)\cdot\cos x}{(2-\sin x)^4}; \quad D_{\mathrm{f}'} = D_\mathrm{f};$$

e) $\mathrm{f}(x) = \dfrac{1}{(1+\sqrt{x})^4}; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R}_0^+;$

$$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = -4\,(1+\sqrt{x})\,\tfrac{1}{2\sqrt{x}}; \quad D_{\mathrm{f}'} = D_\mathrm{f};$$

Buch Seite 145, Aufgabe 5e

$\mathrm{f}(x) = \sqrt{x^2+2x+3}; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R};$

$$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}}; \quad D_{\mathrm{f}'} = D_\mathrm{f};$$

Buch Seite 145, Aufgabe 6b

$\mathrm{f}(x) = x\cdot\sqrt{x^2+1}; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R};$

$$\Rightarrow \mathrm{f}'(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}x; \quad D_{\mathrm{f}'} = D_\mathrm{f};$$

1.2.56 59. Hausaufgabe

Buch Seite 145, Aufgabe 14

Gegegen ist die Funktion $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = y = \sqrt{4-x^2}; \quad x \in D_\mathrm{max};$

a) Gib D_max an!

$$4 - x^2 \geq 0; \Rightarrow 4 \geq x^2; \Rightarrow 2 \geq |x|\,;$$

$$\Rightarrow D_\mathrm{max} = [-2, 2]\,;$$

b) Differenziere φ und bestimme den Differenzierbarkeitsbereich $D_{\varphi'}$!

$\varphi'(x) = -\dfrac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}};$

$\Rightarrow D_{\varphi'} = D_{\max} \setminus \{-2, 2\} =]-2, 2[\,;$

c) Stelle die Gleichung der Normalen in einem beliebigen Punkt $P(x_0, y_0)$ des Funktionsgraphen G_φ auf und zeige, dass sie durch den Ursprung geht!

$\dfrac{n(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = -\dfrac{1}{\varphi'(x_0)} = \dfrac{\sqrt{4-x_0^2}}{x_0};$

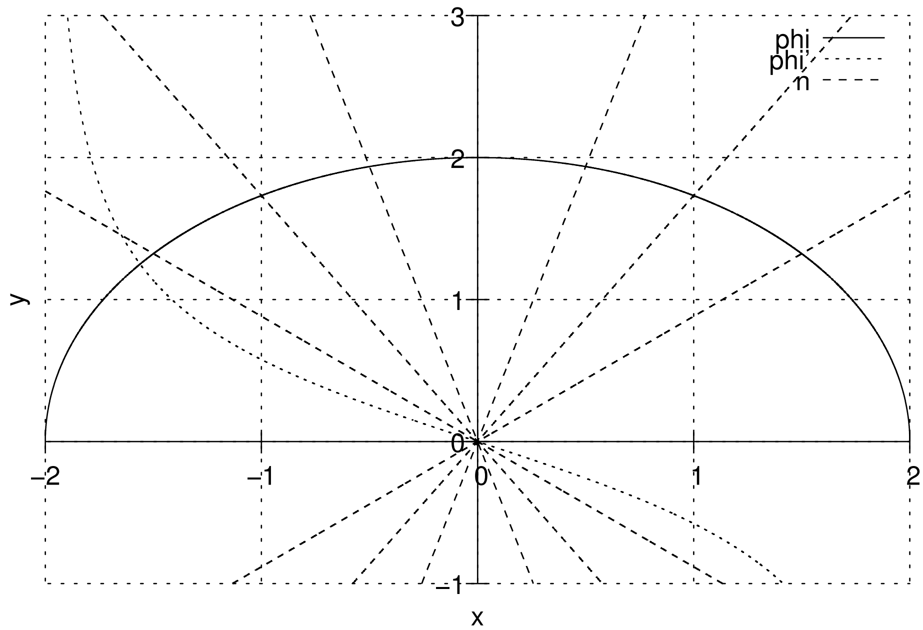
$\Rightarrow n(x) = \frac{x}{x_0}\sqrt{4-x_0^2};$

$n(0) = \frac{0}{x_0}\sqrt{4-x_0^2} = 0;$ $\Rightarrow$ Die Normale in einem beliebigen Punkt $P(x_0, y_0)$ des Funktionsgraphen G_φ geht durch den Ursprung;

d) Zeichne G_φ und erkläre das Ergebnis von Teilaufgabe c) geometrisch! Hinweis: Berechne $x^2 + y^2$!

$x^2 + n(x)^2 = x^2 + \left(\frac{x}{x}\sqrt{4-x^2}\right)^2 = x^2 + 4 - x^2 = 2^2;$

$\Rightarrow$ Bei $\varphi(x)$ handelt es sich um einen Halbkreis mit dem Radius 2;



1.2.57 60. Hausaufgabe

Buch Seite 164, Aufgabe 22c mit W_f und Graph

Bestimme die Wertemengen der folgenden Funktion mit Hilfe der Extremwerte und des Verhaltens an Unendlichkeitsstellen sowie für $x \to \pm\infty$!

$\mathrm{f} : x \mapsto \mathrm{f}(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R};$

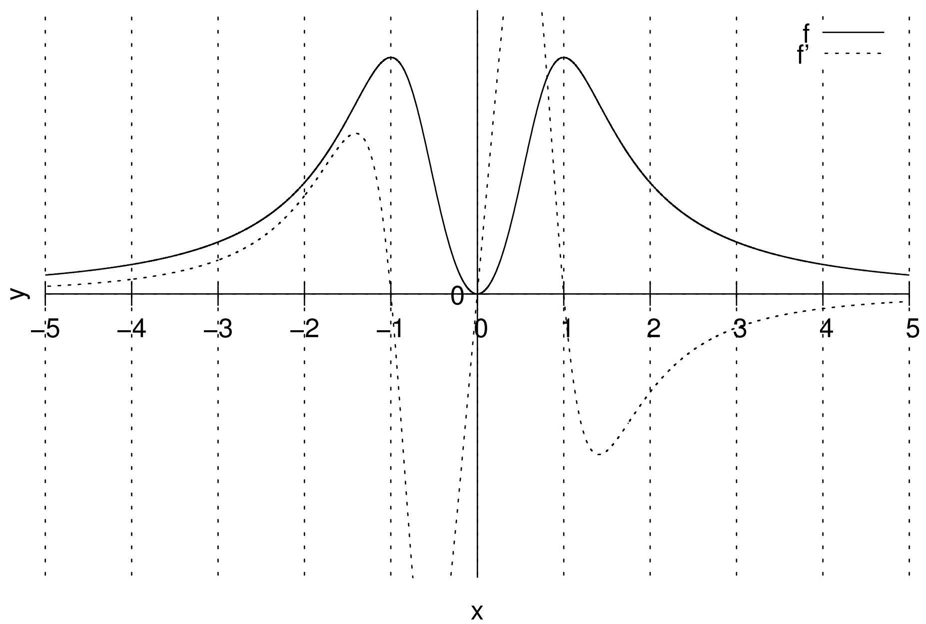
$\mathrm{f}(x) \to 0$ für $x \to \infty$;

$\mathrm{f}'(x) = \dfrac{(x^4+1)\cdot 2x - x^2 \cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} = \dfrac{2x^5 + 2x - 4x^5}{(x^4+1)^2} = \dfrac{-2x^5+2x}{(x^4+1)} = -2x\dfrac{x^4-1}{(x^4+1)^2};$

Vorzeichenwechselanalyse gibt:

- f ist sms in $]-\infty,-1]$ und $[0,1]$;
- f ist smf in $]-1,0[$ und $]1,\infty[$;
- $P_\mathrm{HOP}(-1,\frac{1}{2})$;
- $P_\mathrm{HOP}(1,\frac{1}{2})$;
- $P_\mathrm{TIP}(0,0)$;

$\Rightarrow W_\mathrm{f} = \left[0,\frac{1}{2}\right];$



1.2.58 61. Hausaufgabe

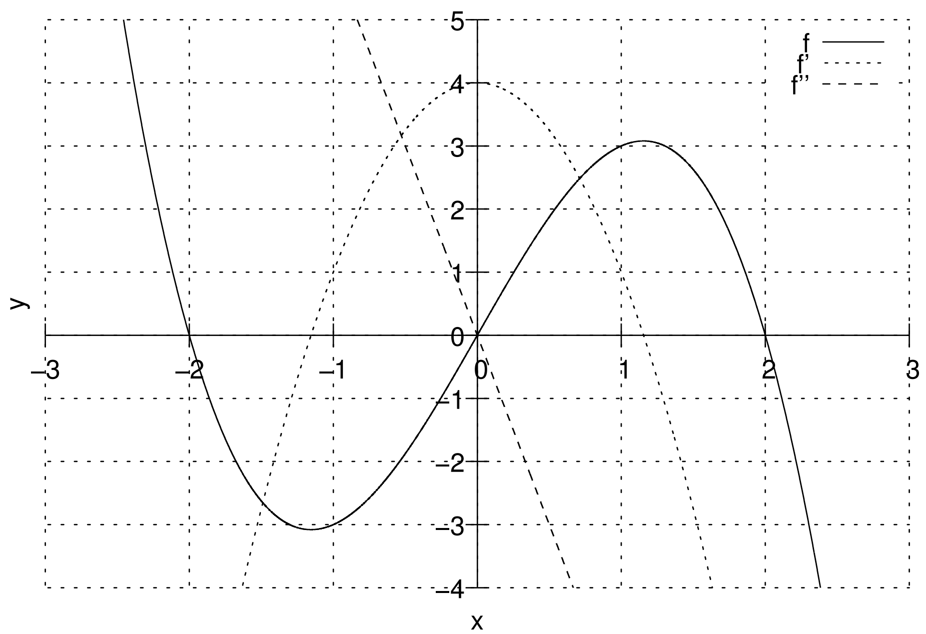
Aufgabe 2 der Test-SA

Bestimme die ganzrationale Funktion f dritten Grades, deren Graph im Ursprung einen Wendepunkt hat. Außerdem hat der Graph im Punkt $P(2,0)$ eine Tangente, die parallel zur Geraden $y = -8x + 1$ verläuft. (Kontrolle?)

$\mathrm{f}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;$
$\mathrm{f}'(x) = 3ax^2 + 2bx + c;$
$\mathrm{f}''(x) = 6ax + 2b;$

I.	$\mathrm{f}(0) = 0;$	$\Rightarrow$	$d = 0;$
II.	$\mathrm{f}''(0) = 0;$	$\Rightarrow$	$2b = 0; \Rightarrow b = 0;$
III.	$\mathrm{f}(2) = 0;$	$\Rightarrow$	$8a + 2c = 8a - 16 - 24a = 0; \Rightarrow a = -1;$
IV.	$\mathrm{f}'(2) = -8;$	$\Rightarrow$	$12a + c = -8; \Rightarrow c = -8 - 12a; \Rightarrow c = -8 + 12 = 4;$

$\Rightarrow \mathrm{f}(x) = -x^3 + 4x;$



Aufgabe 4 der Test-SA

Betrachtet wird die Funktionenschar $\mathrm{f}_t(x) = \frac{t}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$ mit $t \neq 0$.

a) Für welche Werte des Parameters t besitzen die Funktionen f_t keine, genaue eine, zwei waagrechte Tangenten?

$f_t'(x) = tx^2 + 6x - 5 = 0;$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 + 20t}}{2t};$

$\Rightarrow 36 + 20t = 0; \Rightarrow t = -\frac{9}{5};$

- Für $t < -\frac{9}{5}$: Keine waagrechten Tangenten
- Für $t = -\frac{9}{5}$: Genau eine waagrechte Tangente
- Für $t > -\frac{9}{5}$: Genau zwei waagrechte Tangenten

b) Zeige, dass die Kurven G_{f_t} genau einen Wendepunkt W besitzen und bestimme dessen Koordinaten in Abhängigkeit von t.

$f_t''(x_W(t)) = 2tx_W(t) + 6 = 0; \Rightarrow x_W(t) = -\frac{3}{t};$

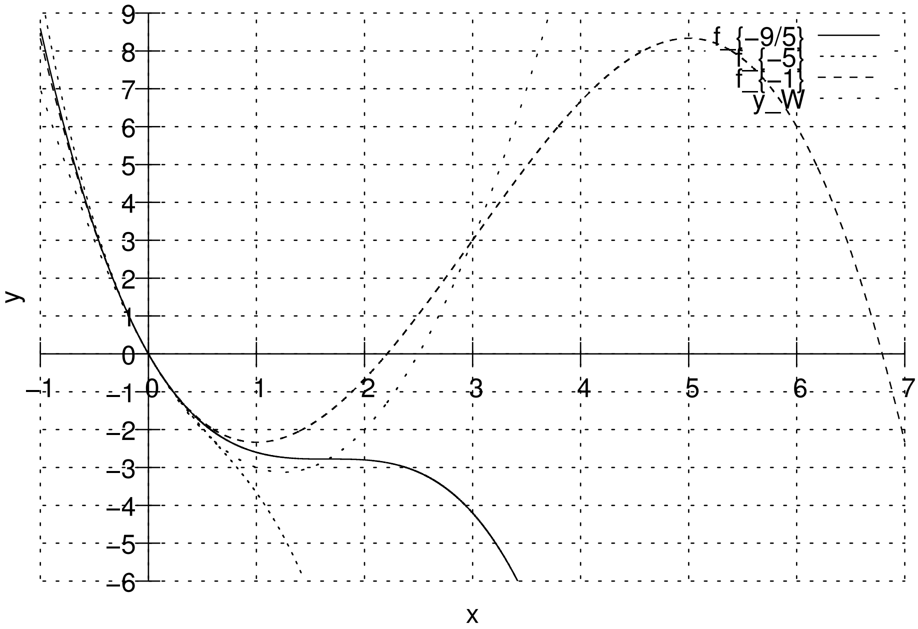
$y_W(t) = f\left(-\frac{3}{t}\right) = \frac{15}{t} + \frac{18}{t^2} = 2\frac{3}{t}\frac{3}{t} + 5\frac{3}{t};$

c) Bestimme die Gleichung der Ortslinie, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen. Welcher Punkt dieser Kurve ist kein Wendepunkt der Schar? (Begründung!)

$x_W(t) = -\frac{3}{t}; \Rightarrow t = -\frac{3}{x_W(t)}; \quad x \neq 0;$

$\Rightarrow y_W(x_W(t)) = y_W(x) = 2x^2 - 5x; \quad x \neq 0;$

$(0, 0)$ ist kein Wendepunkt der Schar f_t.



1.2.59 62. Hausaufgabe

Aufgabe 3 der Test-SA

Gegeben: $\mathrm{f}: x \mapsto \mathrm{f}(x) = \dfrac{x^2}{2x-2}; \quad D_\mathrm{f} = \mathbb{R} \setminus \{1\};$

a) Bestimme die Monotoniebereiche von f und schließe damit auf die Art und Lage der Extrema von f.

$\mathrm{f}'(x) = \ldots = 2x \dfrac{x-2}{(2x-2)^2};$

f ist sms in $]-\infty, 0[$ und $]2, \infty[$;

f ist smf in $]0, 1[$ und $]1, 2[$;

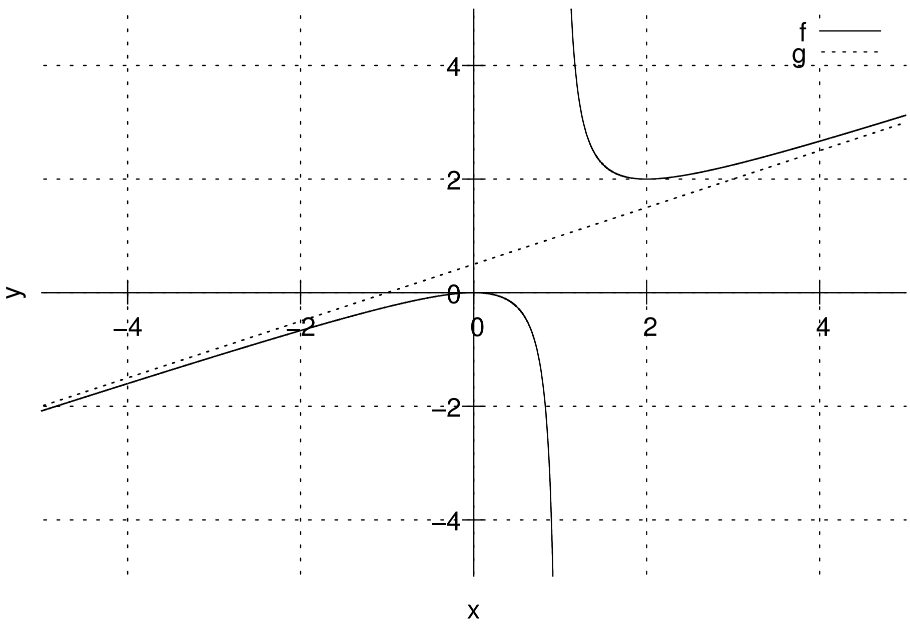
$P_\mathrm{HOP}(0,0); \quad P_\mathrm{TIP}(2,2);$ Uendlichkeitsstelle mit VZW bei $x = 1$;

b) Gegeben ist ferner die Funktion $\mathrm{g}: x \mapsto \mathrm{g}(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$. Berechne $\lim\limits_{x\to\infty} [\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x)]$ und deute dieses Ergebnis geometrisch!

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{2x-2} - \frac{x+1}{2}\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 - (x+1)(x-1)}{2(x-1)}\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 - x^2 + 1}{2(x-1)}\right];$$

$\Rightarrow \mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x) \to 0$ für $x \to \infty$;

$\mathrm{g}(x)$ ist eine Asymptote von $\mathrm{f}(x)$;



1.2.60 63. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

Einem Kreis mit Radius r soll das Rechteck mit maximalen Flächeninhalt einbeschrieben werden.

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=r^2;\Rightarrow a=\sqrt{r^2-b^2}; \\ \mathrm{A}(b)=2a\cdot 2b; \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{A}(b)=4b\sqrt{r^2-b^2};$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}'(b_0)=4\sqrt{r^2-b_0^2}+4b\frac{1}{2\sqrt{r^2-b_0^2}}\left(-2b_0\right)=4\sqrt{r^2-b_0^2}-4b^2\left(\sqrt{r^2-b_0^2}\right)^{-1};$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}'(b_0)=0;\Rightarrow r^2-b_0^2=b_0^2;$$

$$\Rightarrow b_0=\frac{|r|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|r\right|;$$

$$\Rightarrow a_0=\sqrt{r^2-b_0^2}=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|r\right|;$$

1.2.61 64. Hausaufgabe

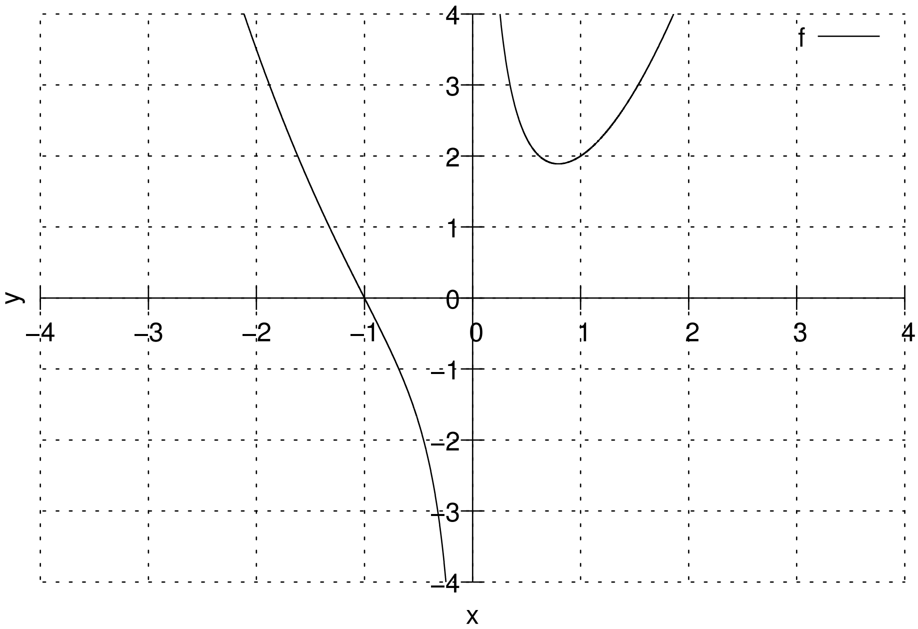
Buch Seite 177, Aufgabe 1

Gesucht ist eine reelle Zahl, für die die Summe aus Quadrat und Kehrwert so klein wie möglich wird.

$$\mathrm{f}(x)=x^2+\frac{1}{x};$$

$$\Rightarrow \mathrm{f}'(x)=2x-\frac{1}{x^2};\Rightarrow x=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}};$$

Aber: f hat bei $x=0$ eine Unendlichkeitsstelle mit VZW!



1.2.62 65. Hausaufgabe

Buch Seite 178, Aufgabe 16

Einem geraden Kreiskegel wird ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben. Man zeige, dass das Zylindervolumen nicht größer sein kann als $\frac{4}{9}$ des Kegelvolumens.

$\mathrm{g}(x) = \frac{H}{R}x;$

$\Rightarrow h = \mathrm{g}(R-r) = H\left(1-\frac{r}{R}\right);$

$\Rightarrow \mathrm{v}(r) = \pi r^2 H\left(1-\frac{r}{R}\right) = \pi r^2 H - \pi r^3 \frac{H}{R};$

$\Rightarrow \mathrm{v}'(r) = 2\pi r H - 3\pi r^2 \frac{H}{R} = 0; \Rightarrow r = \frac{2}{3}R;$

$\Rightarrow v_{\max} = \mathrm{v}(\frac{2}{3}R) = \frac{4}{9}\pi R^2 H\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}\pi R^2 H;$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H;$

$\Rightarrow \frac{v_{\max}}{V} = \frac{4}{9};$

1.3 Tests

1.3.1 1. Extemporale aus der Mathematik

Gruppe A, geschrieben am 30.9.2004.

$f_t(x) = \frac{t}{4}x - (2t+1); t \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R};$

1a) (4 Punkte)

Welche Schargerade steht auf der Schargeraden mit dem Parameterwert $t = 1$ senkrecht? Funktionsgleichung und zugehörigen Parameterwert bestimmen!

$m = \frac{1}{4}; \overline{m} = -4;$

$\frac{t}{4} = -4; \Longrightarrow t = -16;$

$f_{-16}(x) = -4x - (2 \cdot -16 + 1) = -4x + 31;$

1b) (3 Punkte)

In welchem Punkt S schneiden sich diese beiden zueinander senkrechten Geraden? Rechnung!

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{1}{4}x - 3 & = & -4x + 31 & +4x + 3 \\ \frac{17}{4}x & = & 34 & \cdot\frac{4}{17} \\ x & = & 8 & \end{array}$$

$y = \frac{1}{4} \cdot 8 - 3 = -1;$

$S(8; -1);$

2) (3 Punkte)

Bestimme die Achsenschnittpunkte S_x und S_y der Schargeraden in Abhängigkeit von t.

$S_y(0; -2t - 1);$

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{t}{4}x - (2t+1) & = & 0 & +(2t+1) \\ \frac{t}{4}x & = & 2t + 1 & \cdot\frac{4}{t} \\ x & = & \frac{8t+4}{t} & \end{array}$$

$S_x\left(\frac{8t+4}{t}; 0\right);$

3) (5 Punkte)

Bei welchem Parameterwert sind die Nullstellen 2 Längeneinheiten vom Ursprung entfernt?

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{8t+4}{t} & = & \pm 2 & \cdot t \\ 8t + 4 & = & t \cdot \pm 2 & -t \cdot \pm 2 - 4 \\ t(8 - \pm 2) & = & -4 & : (...) \\ t & = & -\frac{4}{8 - \pm 2} & \end{array}$$

$t_1 = -\frac{2}{3}; t_2 = -\frac{2}{5};$

4) (4 Punkte)

Untersuche, ob alle Stellen der x-Achse Nullstellen von Schargeraden sind!

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{8t+4}{t} & = & x & \cdot t \\ 8t+4 & = & tx & -tx-4 \\ t\,(8-x) & = & -4 & :(...) \\ t & = & -\frac{4}{8-x} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|l} 8-x & \neq & 0 & +x \\ 8 & \neq & x & \end{array}$$

$x=8$ kann keine Nullstelle sein.

1.3.2 Übungen zur 1. Schulaufgabe von 1337Ingo

Gegeben sei die Parabelschar $f_k(x) = 4x^2 - 4kx + k^2 - 3$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Gib den Scheitel S in Abhängigkeit von k an!

$S(\frac{k}{2}; -3)$;

b) Gib die Definitions- und Wertemenge an!

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$;
$\mathbb{W} = [-3; \infty[\,$;

c) Gib, wenn vorhanden, Maxima und Minima an!

$P_{min} = S$;

d) Gib die Nullstellen N_1, N_2 in Abhängigkeit von k an!

$N_1(\frac{k-\sqrt{3}}{2})$;
$N_2(\frac{k+\sqrt{3}}{2})$;

e) Gib den Negativbereich $\mathbb{D}_n$ und den Positivbereich $\mathbb{D}_p$ in Abhängigkeit von k an!

$\mathbb{D}_n = \left]\frac{k-\sqrt{3}}{2}; \frac{k+\sqrt{3}}{2}\right[$;
$\mathbb{D}_p = \mathbb{R} \setminus \left[\frac{k-\sqrt{3}}{2}; \frac{k+\sqrt{3}}{2}\right]$;

f) Gib die Geradengleichung $g(x)$ an, die eine Tangente durch die Parabel für $k=3$ und $x=\frac{1}{2}$ beschreibt!

$f_3(x) = 4x^2 - 12x + 6$;
$f_3(\frac{1}{2}) = 1$;
$g(x) = -8x + 5$;

g) f_k wird mit der Geraden $h : x \mapsto h(x) = x - 3$ geschnitten. Welche Werte sind für k möglich, damit es mindestens einen Schnittpunkt gibt?

$k \in \left[-\frac{1}{8}; \infty\right[;$

h) Was ist dann der „am weitesten links“ gelegende Schnittpunkt S_{fh}, der möglich ist?

$S_{fh}(0; -3);$

i) Gib das Geradenbüschel i_m durch den Scheitel von f in Abhängigkeit von k an!

$i_m(x) = mx - 3 - \frac{k}{2}m;$

j) Eine Gerade wird durch dieses Büschel nicht erfasst. Wie lautet ihre Geradengleichung und wieso ist das so?

$x = \frac{k}{2};$

1.3.3 1. Schulaufgabe

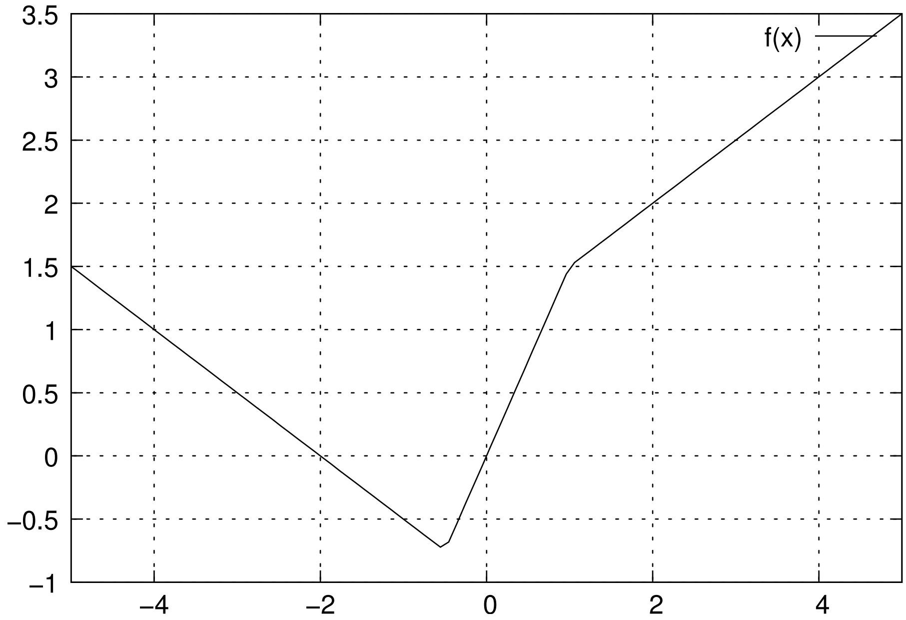
Geschrieben am 21.10.2004

1. (4 Punkte für die Rechnung, 4 auf den Graph)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \left|x + \frac{1}{2}\right| - \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right|$ mit $\mathbb{D}_f = [-5; 5]$.

Bestimme eine betragsfreie Darstellung von $f(x)$ und zeichne den Graphen für $x \in \mathbb{D}_f$.

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{für } \mathbb{D}_f \ni x \leq -\frac{1}{2}; \\ \frac{3}{2}x & \text{für } -\frac{1}{2} < x \leq 1; \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{für } \mathbb{D}_f \ni x > 1; \end{cases}$$



2.

$f : x \mapsto y = -x^2 + 2x + 6; \mathbb{D}_f = \mathbb{R};$

a) (3 Punkte)

Bestimme einen möglichst großen Teilbereich $\mathbb{D}_{f_1}$ von $\mathbb{D}_f$ so, dass f in $\mathbb{D}_{f_1}$ umkehrbar ist und die Null in $\mathbb{D}_{f_1}$ liegt. (Scheitel bestimmen!)

$f'(x) = -2x + 2 = 0; \Longrightarrow x = 1; \Longrightarrow S(1; 7);$

$\Rightarrow \mathbb{D}_{f_1} = \left]-\infty; 1\right];$

b) (6 Punkte)

Bestimme Term, Definitionsbereich und Wertemenge der Umkehrfunktion $f_1^{-1}(x)$ von f in diesem Teilbereich $\mathbb{D}_{f_1}$.

$0 = -x^2 + 2x + 6 - y; \Longrightarrow x = 1 \pm \frac{7-y}{;}$

$\Rightarrow f_1^{-1}(x) = 1 - \sqrt{7-x};$

$\mathbb{D}_{f_1^{-1}} = \mathbb{W}_{f_1} = \left]-\infty; 7\right];$

$\mathbb{W}_{f_1^{-1}} = \mathbb{D}_{f_1} = \left]-\infty; 1\right];$

c) (7 Punkte)

Gegeben ist zusätzlich die Geradenschar $g_a : y = ax + 7$.

Zeige, dass genau zwei Geraden aus der Schar den Graphen von f (mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$) berühren! Bestimme dazu die Gleichungen der Berührgeraden.

$ax + 7 = -x^2 + 2x + 6; \Longrightarrow 0 = -x^2 + x\,(2-a) - 1; \Longrightarrow D = 4 - 4a + a^2 - 4 \cdot -1 \cdot -1 = a^2 - 4a = 0;$

$\Rightarrow a_1 = 0; a_2 = 4;$

$\Rightarrow g_0 : y = 7; g_4 : y = 4x + 7;$

3.

$f : x \mapsto y = \frac{2x}{2|x|+3}; \mathbb{D}_f = \mathbb{R};$

a) (3 Punkte)

Zeige: f ist symmetrisch. (Nachweis und Bestimmung der Symmetrieart!)

$f(-x) = -\frac{2x}{2|-x|+3} = -f(x);$ $\Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung;

b) (6 Punkte)

Untersuche f für $x \geq 0$ auf Monotonie. Welche Monotonieeigenschaft hat f demnach im ganzen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$? (Symmetrie!)

$x_1, x_2 \geq 0; x_1 < x_2; \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2}{2x_2+3} - \frac{2x_1}{2x_1+3} = \frac{4x_1x_2+6x_2-4x_1x_2-6x_1}{\text{HN}} = 6\frac{x_2-x_1}{\text{HN}}gt0;$ $\Rightarrow$ f ist für $x \geq 0$ streng monoton steigend.

Symmetrie; $\Rightarrow$ f ist in ganz $\mathbb{D}_f$ streng monoton steigend.

c) (3 Punkte)

Begründe, dass f in $\mathbb{D}_f$ beschränkt ist.

[Ergebnisse aus a) und b) sollen hier verwendet werden!]

$y = \frac{2x}{2x+3}; \Longrightarrow 2xy + 3y = 2x; \Longrightarrow x\,(2y-2) = -3y; \Longrightarrow x = -\frac{3y}{2y-2}gt0; \Longrightarrow y \neq 1; -\frac{3y}{2y-2} \geq 0; \Longrightarrow y \leq 0; \Longrightarrow (y \leq 0 \cap y \geq 0) \cup (y \geq 0 \cap y \leq 1);$

$\Rightarrow \mathbb{W}_f = \left]-1;1\right[;$

1.3.4 Estels Problem

$$\begin{array}{rcl|l} -\frac{y}{2y-1} & \geq & 0; & \cdot(-1) \\ \frac{y}{2y-1} & \leq & 0; & \cdot(2y-1) \\ y & \leq & 0; & \cdot(2y-1) \end{array}$$

$\Rightarrow \left(y \leq 0 \wedge y \geq \frac{1}{2}\right) \vee \left(y \geq 0 \wedge y < \frac{1}{2}\right);$

1.3.5 Estels 2. Problem

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{h+1}-1}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\left(\sqrt{h+1}-1\right)\left(\sqrt{h+1}+1\right)}{h\left(\sqrt{h+1}+1\right)}=\lim_{h\to 0+}\frac{h+1-1}{h\left(\sqrt{h+1}+1\right)}=$$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{\sqrt{h+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{2};$$