

0.0.1 4. Hausaufgabe

Die Zahl $-21 + 20i$ ist ein Quadrat einer komplexen Grundzahl $x + iy$.
Bestimme dieselbe! Ist die Lösung eindeutig?

1. Herleiten einer allgemeinen Lösungsformel:

$$\begin{aligned}
 a, b, x, y &\in \mathbb{R}; z^2 = a + bi \in \mathbb{C}; \\
 z^2 &= a + bi; \\
 (x + iy)^2 &= a + bi; \\
 x^2 + 2xyi - y^2 &= a + bi; \\
 x^2 - y^2 + 2xyi &= a + bi; \Rightarrow \\
 \left. \begin{aligned} x^2 - y^2 &= a; \\ 2xy &= b; \Rightarrow x = \frac{b}{2y}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{b^2}{4y^2} - y^2 &= a; \\ b^2 - 4y^4 - 4ay^2 &= 0; \\ -4y^4 - 4ay^2 + b^2 &= 0; \Rightarrow \\ -4y^4 - 4ay^2 + b^2 &= 0; \end{aligned} \\
 \left. \begin{aligned} y^2 &= u; \end{aligned} \right\} \Rightarrow -4u^2 - 4au + b^2 = 0; \Rightarrow \\
 u_{1,2} &= \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 4 \cdot (-4) \cdot b^2}}{-8} = \\
 &= -\frac{4a \pm 4\sqrt{a^2 + b^2}}{8} = \\
 &= -\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}; \Rightarrow \\
 \left. \begin{aligned} y_{1,2,3,4} &= \pm \sqrt{-\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \Rightarrow \\ x_{1,2,3,4} &= \frac{b}{2y_{1,2,3,4}}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = \frac{b}{2 \pm \sqrt{-\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}} \pm \sqrt{-\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} i;
 \end{aligned}$$

Diskriminante:

$$\begin{aligned}
 D &= -\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2} > 0; \\
 a \pm \sqrt{a^2 + b^2} &< 0;
 \end{aligned}$$

Neuschreiben der Lösung mit Hilfe der Diskriminante:

$$z = \frac{b}{2 \pm \sqrt{D}} \pm \sqrt{D}i;$$

2. Lösen der eigentlichen Aufgabe:

$$z^2 = -21 + 20i; \Rightarrow (a, b) = (-21, 20); \Rightarrow$$

Betrachtung der Diskriminanten: $-21 \pm 29 < 0; \Rightarrow$ Wegfall der „+“-Lösung, da $-21 + 29 > 0;$

- $z_1 = 2 + 5i;$
- $z_2 = -2 - 5i;$

3. Probe