0.0.1 Anschauliche Deutung der komplexen Zahlen

- GAUßsche Zahlenebene
- komplexe Zahlen als Vektoren
  Pfeile, die vom Ursprung ausgehen, heißen Ortsvektoren.

Betrag komplexer Zahlen

$|z| = |x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2};$

Abstand zweier Punkte: $\left|\vec{d}\right| = |\vec{z_2} - \vec{z_1}|\,;$

Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,;$

Polarform komplexer Zahlen

$z = x + \mathrm{i}y$; (Normalform)

z wird festgelegt durch

- Abstand vom Ursprung $|z| = r;$
- Winkel φ zwischen Re-Achse und Vektor z (gemessen im Bogenmaß)

Zusammenhänge mit der Normalform:

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2};$
- $\tan\varphi = \frac{y}{x};$

Polarkoordinaten: $z = (r; \varphi);$

- $x = r \cdot \cos\varphi;$
- $y = r \cdot \sin\varphi;$

Darstellung: $z = x + \mathrm{i}y = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$; (Polarform von z!)

Abkürzung: $E(\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi$;

$|E(\varphi)| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{1} = 1$;

$\Rightarrow$ Die komplexen Zahlen $E(\varphi)$ liegen auf dem **Einheitskreis**.

$z = r \cdot E(\varphi)$;

Eigenschaften von $E(\varphi)$:

- $|E(\varphi)| = 1$;
- $|E(\varphi)|$ ist periodisch.
  $E(\varphi + 2k\pi) = E(\varphi); \quad k \in \mathbb{Z}$;
- $E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) = \ldots = E(\varphi_1 + \varphi_2)$;

Folgerungen:

Für $\varphi_2 = -\varphi_1 = -\varphi$; $\Rightarrow E(\varphi) \cdot E(-\varphi) = E(0) = 1$; $\Rightarrow E(-\varphi) = \frac{1}{E(\varphi)}$;

Für $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$; $\Rightarrow [E(\varphi)]^2 = E(2\varphi)$;

$[E(\varphi)]^n = E(n \cdot \varphi)$; für $n \in \mathbb{N}; \varphi \in \mathbb{R}$; (Formel von MOIVRE)

Produkte in Polarform:

$z_1 = |z_1|\, E(\varphi_1)$;
$z_2 = |z_2|\, E(\varphi_2)$;

$z_1 z_2 = |z_1 z_2|\, E(\varphi_1 + \varphi_2)$;

$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$;

Regel: Multiplikation zweier komplexer Zahlen bedeutet Multiplikation der Beträge und Addition der Winkelargumente.

Division in Polarform:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} E(\varphi_1 - \varphi_2)$;

Regel: Division zweier komplexer Zahlen bedeutet Division der Beträge und Subtraktion der Winkelargumente.

Anwendungen:

a) $\cos 15°$ **und** $\sin 15°$ **in exakter Form:**

Ansatz: $15° = 45° - 30°$;

$E(15°) = \cos 15° + \mathrm{i}\sin 15° = E(45° - 30°) = \frac{E(45°)}{E(30°)} = \ldots = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;

$\Rightarrow \cos 15° = \mathrm{Re}[E(15°)]$; $\quad \sin 15° = \mathrm{Im}[E(15°)]$;

b) Trigonometrische Formeln:

$\cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi = E(2\varphi) = [E(\varphi)]^2 = [\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi]^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2\mathrm{i}\cos\varphi\sin\varphi$;

$\Rightarrow \cos 2\varphi = cos^2\varphi - \sin^2\varphi$; $\quad \sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi$;

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot E(\varphi_1 - \varphi_2)$;

Def.: Der Winkel $\varepsilon = \angle(z_1, z_2)$ ist der Winkel, um den man z_1 (im positiven Drehsinn) drehen muss, damit z_1 in Richtung von z_2 weist.

[Falls $\varphi_1 - \varphi_2 < 0$ ist, ist $\varepsilon = \varphi_1 - \varphi_2 + 360°$.]

$\angle(z_2, z_1) = \mathrm{arc}\frac{z_1}{z_2}$; („Winkel, um den man z_2 drehen muss, damit z_2 in Richtung von z_1 zeigt“)

(Addiere evtl. zum Taschenrechnerwert des Arcustangens $0°$ im I. Quadranten, $180°$ im II. und III. Quadranten und $360°$ im IV. Quadranten.)

Anwendung der Formel von Moivre

$[E(\varphi)]^n = E(n \cdot \varphi)$;

Lösungen der Gleichung $z^n = 1$; („Einheitswurzeln“)

$n = 3$: $z^3 = 1 = 1 \cdot E(0°); \Rightarrow z_1 = 1; \quad z_2 = E(120°); \quad z_3 = E(240°)$;

Zur Gleichung $z^n = 1$:

$L_\varphi = \left\{0, \frac{1}{n}2\pi, \frac{2}{n}2\pi, ..., \frac{n-1}{n}2\pi\right\}$;

d.h. $z_k = E(\frac{k-1}{n}2\pi); \quad k \in \mathbb{N} \cap [1, n]$;

Allgemein: $z^n = E(\varphi); \Rightarrow z_k = E(\dfrac{\varphi + (k-1)\cdot 360°}{n}); \quad k \in \mathbb{N} \cap [1, n]$;

Die Gleichung $z^n = a; \quad a \in \mathbb{C}$;

$z^n = a; \Leftrightarrow |z|^n E(n\varphi) = |a| E(\alpha)$;

$\Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|a|}; \wedge E(n\varphi) = E(\alpha)$;

D.h. $n\varphi = \alpha + k \cdot 360°; \quad k \in \mathbb{N} \cap [0, n-1]\,;$

$\varphi_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot 360°;$

$\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{|a|}E(\frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n} \cdot 360°); \quad k \in \mathbb{N} \cap [0, n-1]\,;$

Alle Lösungen haben gleichen Betrag und liegen auf einem Kreis um den Ursprung mit Radius $\sqrt[n]{|a|}$.