0.0.1 Die Erweiterung der reellen Zahlen

Mangel von $\mathbb{R}$

$7x+3=0; \Rightarrow x=-\frac{3}{7}; \Rightarrow$ Einführung der Bruchzahlen

$x^2=-1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Versuchsweise Einführung von Lösungen:

Neue Zahl i mit der Eigenschaft

$$\mathrm{i}^2=-1;$$

Zahlen der Form $z=a+\mathrm{i}b$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ heißen **komplex**.

BTW, **Wichtig**: Schreibe nie, **niemals**, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$!

a (b) heißt Realteil (Imaginärteil) von z ($\mathrm{Re}(z)$ ($\mathrm{Im}(z)$)).

Die Zahlen z bilden die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Summe komplexer Zahlen: $z_1+z_2=a_1+\mathrm{i}b_1+a_2+\mathrm{i}b_2=(a_1+a_2)+\mathrm{i}\,(b_1+b_2)\,;$

Produkt komplexer Zahlen: $z_1\cdot z_2=(a_1+\mathrm{i}b_1)\,(a_2+\mathrm{i}b_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+\mathrm{i}\,(a_1b_2+a_2b_2)\,;$

Kehrwerte: $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+\mathrm{i}b}=\frac{1}{a+\mathrm{i}b}\cdot\frac{a-\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b}=\frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+\mathrm{i}\frac{-b}{a^2+b^2};$

Bemerkung: Die beiden komplexen Zahlen $z=a+\mathrm{i}b$ und $z^*=a-\mathrm{i}b$ heißen zueinander **konjugiert komplex**.

Kritik des Varfahrens

Z.B.: In $\mathbb{R}$ gibt es kein Inverses zu 0 bezüglich der Multiplikation.

Definiere $\mathrm{j}=0^{-1}; \Rightarrow 0\cdot\mathrm{j}=1;$

Dann gilt:

- $(0+0)\cdot\mathrm{j}=0\cdot\mathrm{j}+0\cdot\mathrm{j}=1+1=2;$
- $(0+0)\cdot\mathrm{j}=0\cdot\mathrm{j}=1;$

$\Rightarrow$ WIDERSPRUCH!

„Wurzelziehen“: Siehe 4. Hausaufgabe.

Eigenschaften des Konjugierens

$z = x + \mathrm{i}y; \Rightarrow z^* = x - \mathrm{i}y;$

1. $(z^*)^* = z;$
2. $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*;$
3. $(z_1 \cdot z_2) = z_1^* \cdot z_2^*;$
   Entsprechend gilt: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$ für $z_2 \neq 0;$