0.0.1 Komplexe Abbildungen

Einfache komplexe Abbildungen

In $\mathbb{R}$: $x \mapsto y = 2x$;

In $\mathbb{C}$: $z \mapsto w = 2z$;

0.0.2 Allgemein: Die Abbildung $z \mapsto w = az; \quad a \in \mathbb{C}$;

Polarform:

$a = |a|\, E(\alpha)$;
$z = |z|\, E(\varphi)$;

$w = az = |a|\, E(\alpha) \cdot |z|\, E(\varphi) = |a|\, |z|\, E(\alpha + \varphi)$;

Ergebnis: Die Abbildung $z \mapsto w = az$ ($a \neq 0$) ist eine zentrische Streckung mit anschließender Drehung (Drehstreckung). Das Zentrum ist 0, Streckungsfaktor ist $|a|$, Drehwinkel ist $\operatorname{arc} a$.

Spezielle Fälle:

- $|a| = 1$; (Reine Drehung um $\operatorname{arc} a$)
- $a \in \mathbb{R}$; (Reine zentrische Steckung (mit positivem Faktor; Drehwinkel $0°$ oder $180°$)

Eigenschaften der linearen Abbildung $z \mapsto w = az + b; \quad a \neq 0$;

Jede Abbildung der Form $z \mapsto w = az + b$ kann aufgefasst werden als Hintereinanderschaltung zweier Abbildungen f und g:

Dabei ist $\mathrm{f} : z \mapsto v = az$ eine Drehstreckung um den Ursprung mit Streckungsfaktor $|a|$ und Drehwinkel $\operatorname{arc} a$ und $\mathrm{g} : v \mapsto w = v + b$ eine Translation um den komplexen Vektor b.

Schreibweise: $w = \mathrm{g}(v) = \mathrm{g}(\mathrm{f}(z)) = \mathrm{g} \circ \mathrm{f}(z)$; („g nach f")

Damit ist jede Abbildung der Form $w = az+b$ eine Ähnlichkeitsabbildung. Sie verändert nicht den Drehsinn (gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung).

Für $|a| = 1$ handelt es sich um eine gleichsinnige Kongruenzabbildung.

Noch eine konjugiert lineare Abbildung

$z \mapsto w = \mathrm{i}z^* + (-2 + 2\mathrm{i})\,;$

$(x + y\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,(x - y\mathrm{i}) + (-2 + 2\mathrm{i})\,; \Rightarrow x - y + 2 = \mathrm{i}\,(x - y + 2)\,;$

Nur erfüllt für $x - y + 2 = 0; \Rightarrow y = x + 2;$ (Fixpunktgerade!)

- Was passiert mit der Geraden $\mathrm{g} : y = x$?

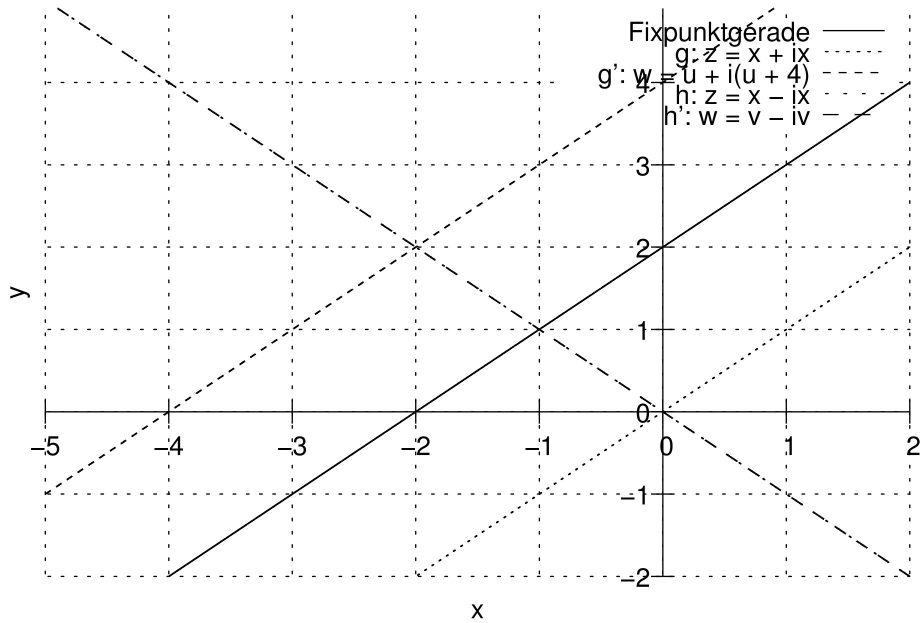
  $\mathrm{g} : z = x + \mathrm{i}x;$

  $\mathrm{g}' : w = \mathrm{i}z^* - 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}\,(x - x\mathrm{i}) - 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}x + x - 2 + 2\mathrm{i} = x - 2 + \mathrm{i}\,(x + 2) = u + \mathrm{i}\,(u + 4)\,;$

- Was passiert mit der Geraden $\mathrm{h} : y = -x$?

  $\mathrm{h} : z = x - \mathrm{i}x;$

  $\mathrm{h}' : w = \mathrm{i}z^* - 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}\,(x + \mathrm{i}x) - 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}x - x - 2 + 2\mathrm{i} = -x - 2 + \mathrm{i}\,(x + 2) = -\,(x + 2) + \mathrm{i}\,(x + 2) = -u + \mathrm{i}u = v - \mathrm{i}v;$



Die Gerade wird insgesamt auf sich abgebildet (nicht punktweise), man spricht von einer Fixgeraden.

Geraden in der komplexen Zahlenebene

$x, y, a, m \in \mathbb{R}$;

Re-Achse: $y = 0; \Rightarrow z = x$;

Im-Achse: $x = 0; \Rightarrow z = \mathrm{i}y$;

Parallele zur Re-Achse durch $(0, a)$: $y = a; \Rightarrow z = x + \mathrm{i}a$;

Parallele zur Im-Achse durch $(a, 0)$: $x = a; \Rightarrow z = a + \mathrm{i}y$;

Parallele zu $y = x$ durch $(0, a)$: $y = x + a; \Rightarrow z = x + \mathrm{i}\,(x + a)$;

Allgemein: $y = mx + a; \Rightarrow z = x + \mathrm{i}\,(mx + a)$;

Kreisgleichung

Mittelpunkt $M(0, 0)$

$|z| = r; \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$;

$|z|^2 = zz^* = r^2$; (Betragsfreie Darstellung)

Mittelpunkt $M(m_x, m_y)$**, d.h.** $m = m_x + \mathrm{i}m_y$

$|z - m| = r$;
$(z - m)\,(z - m)^* = r^2$;
$(z - m)\,(z^* - m^*) = r^2$;
$zz^* - m^*z - mz^* + mm^* = r^2$;
$\Rightarrow zz^* - m^*z - mz^* = r^2 - mm^* = \gamma; \quad \gamma \in \mathbb{R}$;

Kreisgleichung: $zz^* - m^*z - mz^* = \gamma$ mit $\gamma = r^2 - mm^*$;