

1 Mathematik: Komplexe Zahlen

1.1 Schulheft

1.1.1 Regeln für Zahlenbereichserweiterungen

Die alten Rechengesetze sollen weiter (und auch für die „neuen“ Zahlen) gelten (**Permanenzprinzip**).

Zahlenmengen: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} (algebraische Zahlen (Menge der Nullstellen aller Polynomfunktionen) und transzendente Zahlen (z.B. π , $\lg 2$, $\sin 31^\circ$))

1.1.2 Rechengesetze

Kommutativgesetze

$$a + b = b + a;$$

$$a \cdot b = b \cdot a;$$

Assoziativgesetze

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c;$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c;$$

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = ab + ac;$$

Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen:

- K-, A-, D-Gesetze
- **Abgeschlossenheit** der Rechenoperatoren: Für zwei Zahlen $a, b \in M$ gilt:
 $a + b \in M$;
 $a \cdot b \in M$;
- **Eindeutigkeit** der Rechenoperationen, d.h. das Ergebnis von $a + b$ ist $a \cdot b$ ist eindeutig.
- **Existenz** des neutralen Elements in M :
 $a + 0 = a$ („Nullelement“);
 $a \cdot 1 = a$ („Einselement“);

- Existenz der **inversen** Elemente:

Zu jedem $a \in M$ existiert ein Inverses \bar{a} , so dass $a + \bar{a} = 0$;

Zu jedem $a \in M \setminus \{0\}$ existiert ein Inverses $\frac{1}{a}$, sodass $a \cdot \frac{1}{a} = 1$;

Erfüllen alle Elemente von M alle die Eigenschaften, so nennt man M „Körper“ (Bsps.: \mathbb{Q} , \mathbb{R}).

Beispiel: Restklassenkörper modulo 5 (siehe Buch Seite 15), Restklassen modulo 6

Die Restklassen modulo einer Primzahl liefern immer einen Körper. Die Restklassenkörper sind Beispiele für **endliche** Körper.

Eigenschaften von Mengen, die sich anordnen lassen:

- Trichotomie:

Für zwei Elemente a, b gilt genau eines von den drei Möglichkeiten $a > b$, $a < b$, $a = b$.

- Transitivität:

$$\left. \begin{array}{l} a > b; \\ b > c; \end{array} \right\} \Rightarrow a > c;$$

- Monotonie: $a, b, c \in \mathbb{R}$;

$$- a < b; \Rightarrow a + c > b + c;$$

$$- a < b; \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c; c > 0;$$

Die endlichen Körper lassen sich nicht anordnen.