Mathematik: Komplexe Zahlen

Ingo Blechschmidt

28. Juni 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik: Komplexe Zahlen

1.1 Schulheft

1.1.1 Regeln für Zahlenbereichserweiterungen

Die alten Rechengesetze sollen weiter (und auch für die „neuen“ Zahlen) gelten (**Permanenzprinzip**).

Zahlenmengen: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (algebraische Zahlen (Menge der Nullstellen aller Polynomfunktionen) und transzendente Zahlen (z.B. π, $\lg 2$, $\sin 31°$))

1.1.2 Rechengesetze

Kommutativgesetze

$a + b = b + a;$
$a \cdot b = b \cdot a;$

Assoziativgesetze

$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c;$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c;$

Distributivgesetz

$a \cdot (b + c) = ab + ac;$

Weitere Eigenschaften der reelen Zahlen:

- K-, A-, D-Gesetze
- **Abgeschlossenheit** der Rechenoperatinen: Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{M}$ gilt:

  $a + b \in \mathbb{M};$
  $a \cdot b \in \mathbb{M};$
- **Eindeutigkeit** der Rechenoperationen, d.h. das Ergebnis von $a + b$ ist $a \cdot b$ ist eindeutig.
- **Existenz** des neutralen Elements in $\mathbb{M}$:

  $a + 0 = a$ („Nullelement“);

  $a \cdot 1 = a$ („Einselement“);
- Existenz der **inversen** Elemente:

  Zu jedem $a \in \mathbb{M}$ existiert ein Inverses $\overline{a}$, so dass $a + \overline{a} = 0;$

  Zu jedem $a \in \mathbb{M} \setminus \{0\}$ existiert ein Inverses $\frac{1}{a}$, sodass $a \cdot \frac{1}{a} = 1;$

Erfüllen alle Elemente von $\mathbb{M}$ alle die Eigenschaften, so nennt man $\mathbb{M}$ „Körper“ (Bsps.: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$).

Beispiel: Restklassenkörper modulo 5 (siehe Buch Seite 15), Restklassen modulo 6

Die Restklassen modulo einer Primzahl liefern immer einen Körper. Die Restklassenkörper sind Beispiele für **endliche** Körper.

Eigenschaften von Mengen, die sich anordnen lassen:

- Trichotomie:

  Für zwei Elemente a, b gilt genau eines von den drei Möglichkeiten $a > b$, $a < b$, $a = b$.

- Transitivität:

  $\left.\begin{array}{l} a > b; \\ b > c; \end{array}\right\} \Rightarrow a > c;$

- Monotonie: $a, b, c \in \mathbb{R}$;
  - $a < b; \Rightarrow a + c > b + c;$
  - $a < b; \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c; c > 0;$

Die endlichen Körper lassen sich nicht anordnen.

1.1.3 Die Erweiterung der reellen Zahlen

Mangel von $\mathbb{R}$

$7x + 3 = 0; \Rightarrow x = -\frac{3}{7};$ ⇒ Einführung der Bruchzahlen

$x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Versuchsweise Einführung von Lösungen:

Neue Zahl i mit der Eigenschaft

$$\mathrm{i}^2 = -1;$$

Zahlen der Form $z = a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißen **komplex**.

BTW, **Wichtig**: Schreibe nie, **niemals**, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$!

a (b) heißt Realteil (Imaginärteil) von z ($\mathrm{Re}(z)$ ($\mathrm{Im}(z)$)).

Die Zahlen z bilden die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Summe komplexer Zahlen: $z_1 + z_2 = a_1 + \mathrm{i}b_1 + a_2 + \mathrm{i}b_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{i}\,(b_1 + b_2)\,;$

Produkt komplexer Zahlen: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + \mathrm{i}b_1)\,(a_2 + \mathrm{i}b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i}\,(a_1 b_2 + a_2 b_2)\,;$

Kehrwerte: $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{1}{a+\mathrm{i}b} \cdot \frac{a-\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2+b^2};$

Bemerkung: Die beiden komplexen Zahlen $z = a + \mathrm{i}b$ und $z^* = a - \mathrm{i}b$ heißen zueinander **konjugiert komplex**.

Kritik des Varfahrens

Z.B.: In $\mathbb{R}$ gibt es kein Inverses zu 0 bezüglich der Multiplikation.

Definiere $\mathrm{j} = 0^{-1}; \Rightarrow 0 \cdot \mathrm{j} = 1;$

Dann gilt:

- $(0+0) \cdot \mathrm{j} = 0 \cdot \mathrm{j} + 0 \cdot \mathrm{j} = 1 + 1 = 2;$
- $(0+0) \cdot \mathrm{j} = 0 \cdot \mathrm{j} = 1;$

$\Rightarrow$ WIDERSPRUCH!

„Wurzelziehen“: Siehe 4. Hausaufgabe.

Eigenschaften des Konjugierens

$z = x + \mathrm{i}y; \Rightarrow z^* = x - \mathrm{i}y;$

1. $(z^*)^* = z;$
2. $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*;$
3. $(z_1 \cdot z_2) = z_1^* \cdot z_2^*;$
   Entsprechend gilt: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$ für $z_2 \neq 0;$

1.1.4 Anordnung in $\mathbb{C}$

Ist $\mathrm{i} > 0$?

Annahme: $\mathrm{i} > 0; \Rightarrow -1 > 0;$

also: $\mathrm{i} < 0; \Rightarrow -1 > 0;$

$\Rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich nicht (wie $\mathbb{R}$) anordnen.

1.1.5 Anschauliche Deutung der komplexen Zahlen

- GAUßsche Zahlenebene
- komplexe Zahlen als Vektoren
  Pfeile, die vom Ursprung ausgehen, heißen Ortsvektoren.

Betrag komplexer Zahlen

$|z| = |x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2};$

Abstand zweier Punkte: $\left|\vec{d}\right| = \left|\vec{z_2} - \vec{z_1}\right|;$

Dreiecksungleichung: $\left|z_1 + z_2\right| \leq \left|z_1\right| + \left|z_2\right|;$

Polarform komplexer Zahlen

$z = x + \mathrm{i}y$; (Normalform)

z wird festgelegt durch

- Abstand vom Ursprung $|z| = r$;
- Winkel φ zwischen Re-Achse und Vektor z (gemessen im Bogenmaß)

Zusammenhänge mit der Normalform:

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2};$
- $\tan\varphi = \frac{y}{x};$

Polarkoordinaten: $z = (r; \varphi)$;

- $x = r \cdot \cos\varphi;$
- $y = r \cdot \sin\varphi;$

Darstellung: $z = x + \mathrm{i}y = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$; (Polarform von z!)

Abkürzung: $E(\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi;$

$|E(\varphi)| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{1} = 1;$

$\Rightarrow$ Die komplexen Zahlen $E(\varphi)$ liegen auf dem **Einheitskreis**.

$z = r \cdot E(\varphi);$

Eigenschaften von $E(\varphi)$:

- $|E(\varphi)| = 1;$

- $|E(\varphi)|$ ist periodisch.
  $E(\varphi + 2k\pi) = E(\varphi); \quad k \in \mathbb{Z};$
- $E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) = \ldots = E(\varphi_1 + \varphi_2);$

Folgerungen:

Für $\varphi_2 = -\varphi_1 = -\varphi; \Rightarrow E(\varphi) \cdot E(-\varphi) = E(0) = 1; \Rightarrow E(-\varphi) = \frac{1}{E(\varphi)};$

Für $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi; \Rightarrow [E(\varphi)]^2 = E(2\varphi);$

$[E(\varphi)]^n = E(n \cdot \varphi);$ für $n \in \mathbb{N}; \varphi \in \mathbb{R};$ (Formel von MOIVRE)

Produkte in Polarform:

$z_1 = |z_1|\, E(\varphi_1);$
$z_2 = |z_2|\, E(\varphi_2);$

$z_1 z_2 = |z_1 z_2|\, E(\varphi_1 + \varphi_2);$

$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|\,;$

Regel: Multiplikation zweier komplexer Zahlen bedeutet Multiplikation der Beträge und Addition der Winkelargumente.

Division in Polarform:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} E(\varphi_1 - \varphi_2);$

Regel: Division zweier komplexer Zahlen bedeutet Division der Beträge und Subtraktion der Winkelargumente.

Anwendungen:

a) $\cos 15°$ **und** $\sin 15°$ **in exakter Form:**

Ansatz: $15° = 45° - 30°;$

$E(15°) = \cos 15° + \mathrm{i} \sin 15° = E(45° - 30°) = \frac{E(45°)}{E(30°)} = \ldots = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$

$\Rightarrow \cos 15° = \mathrm{Re}[E(15°)]\,; \quad \sin 15° = \mathrm{Im}[E(15°)]\,;$

b) Trigonometrische Formeln:

$\cos 2\varphi + \mathrm{i} \sin 2\varphi = E(2\varphi) = [E(\varphi)]^2 = [\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi]^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2\mathrm{i}\cos\varphi\sin\varphi;$

$\Rightarrow \cos 2\varphi = cos^2\varphi - \sin^2\varphi; \quad \sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi;$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot E(\varphi_1 - \varphi_2);$

Def.: Der Winkel $\varepsilon = \angle(z_1, z_2)$ ist der Winkel, um den man z_1 (im positiven Drehsinn) drehen muss, damit z_1 in Richtung von z_2 weist.

[Falls $\varphi_1 - \varphi_2 < 0$ ist, ist $\varepsilon = \varphi_1 - \varphi_2 + 360°$.]

$\angle(z_2, z_1) = \operatorname{arc}\frac{z_1}{z_2}$; („Winkel, um den man z_2 drehen muss, damit z_2 in Richtung von z_1 zeigt")

(Addiere evtl. zum Taschenrechnerwert des Arcustangens $0°$ im I. Quadranten, $180°$ im II. und III. Quadranten und $360°$ im IV. Quadranten.)

Anwendung der Formel von Moivre

$[E(\varphi)]^n = E(n \cdot \varphi);$

Lösungen der Gleichung $z^n = 1$; („Einheitswurzeln")

$n = 3$: $z^3 = 1 = 1 \cdot E(0°); \Rightarrow z_1 = 1; \quad z_2 = E(120°); \quad z_3 = E(240°);$

Zur Gleichung $z^n = 1$:

$L_\varphi = \left\{0, \frac{1}{n}2\pi, \frac{2}{n}2\pi, ..., \frac{n-1}{n}2\pi\right\};$

d.h. $z_k = E(\frac{k-1}{n}2\pi); \quad k \in \mathbb{N} \cap [1, n];$

Allgemein: $z^n = E(\varphi); \Rightarrow z_k = E(\dfrac{\varphi + (k-1) \cdot 360°}{n}); \quad k \in \mathbb{N} \cap [1, n];$

Die Gleichung $z^n = a; \quad a \in \mathbb{C};$

$z^n = a; \Leftrightarrow |z|^n E(n\varphi) = |a| E(\alpha);$

$\Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|a|}; \wedge E(n\varphi) = E(\alpha);$

D.h. $n\varphi = \alpha + k \cdot 360°; \quad k \in \mathbb{N} \cap [0, n-1];$

$\varphi_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot 360°;$

$\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{|a|}E(\frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n} \cdot 360°); \quad k \in \mathbb{N} \cap [0, n-1];$

Alle Lösungen haben gleichen Betrag und liegen auf einem Kreis um den Ursprung mit Radius $\sqrt[n]{|a|}$.

1.1.6 Komplexe Abbildungen

Einfache komplexe Abbildungen

In $\mathbb{R}$: $x \mapsto y = 2x;$

In $\mathbb{C}$: $z \mapsto w = 2z;$

1.1.7 Allgemein: Die Abbildung $z \mapsto w = az; \quad a \in \mathbb{C};$

Polarform:

$a = |a|\,E(\alpha);$
$z = |z|\,E(\varphi);$

$w = az = |a|\,E(\alpha) \cdot |z|\,E(\varphi) = |a|\,|z|\,E(\alpha + \varphi);$

Ergebnis: Die Abbildung $z \mapsto w = az$ ($a \neq 0$) ist eine zentrische Streckung mit anschließender Drehung (Drehstreckung). Das Zentrum ist 0, Streckungsfaktor ist $|a|$, Drehwinkel ist $\operatorname{arc} a$.

Spezielle Fälle:

- $|a| = 1$; (Reine Drehung um $\operatorname{arc} a$)
- $a \in \mathbb{R}$; (Reine zentrische Steckung (mit positivem Faktor; Drehwinkel $0°$ oder $180°$)

Eigenschaften der linearen Abbildung $z \mapsto w = az + b; \quad a \neq 0;$

Jede Abbildung der Form $z \mapsto w = az + b$ kann aufgefasst werden als Hintereinanderschaltung zweier Abbildungen f und g:

Dabei ist $\mathrm{f} : z \mapsto v = az$ eine Drehstreckung um den Ursprung mit Streckungsfaktor $|a|$ und Drehwinkel $\operatorname{arc} a$ und $\mathrm{g} : v \mapsto w = v + b$ eine Translation um den komplexen Vektor b.

Schreibweise: $w = \mathrm{g}(v) = \mathrm{g}(\mathrm{f}(z)) = \mathrm{g} \circ \mathrm{f}(z);$ („g nach f“)

Damit ist jede Abbildung der Form $w = az+b$ eine Ähnlichkeitsabbildung. Sie verändert nicht den Drehsinn (gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung).

Für $|a| = 1$ handelt es sich um eine gleichsinnige Kongruenzabbildung.

Noch eine konjugiert lineare Abbildung

$z \mapsto w = \mathrm{i}z^* + (-2 + 2\mathrm{i})\,;$

$(x + y\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,(x - y\mathrm{i}) + (-2 + 2\mathrm{i})\,; \Rightarrow x - y + 2 = \mathrm{i}\,(x - y + 2)\,;$

Nur erfüllt für $x - y + 2 = 0; \Rightarrow y = x + 2;$ (Fixpunktgerade!)

- Was passiert mit der Geraden $\mathrm{g}: y = x$?

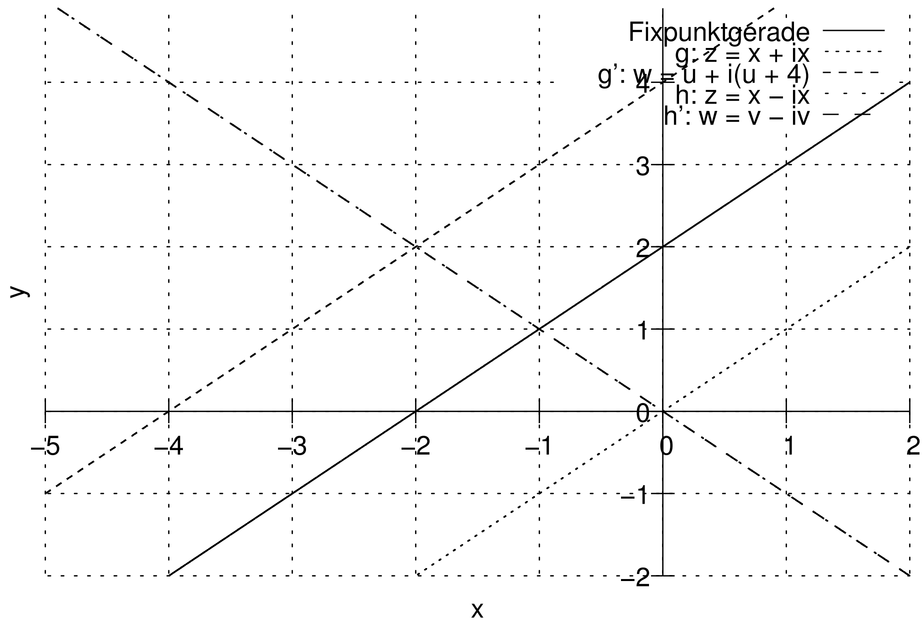
  $\mathrm{g}: z = x + \mathrm{i}x;$

  $\mathrm{g}': w = \mathrm{i}z^* - 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}\,(x - x\mathrm{i}) - 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}x + x - 2 + 2\mathrm{i} = x - 2 + \mathrm{i}\,(x+2) = u + \mathrm{i}\,(u+4)\,;$

- Was passiert mit der Geraden $\mathrm{h}: y = -x$?

  $\mathrm{h}: z = x - \mathrm{i}x;$

  $\mathrm{h}': w = \mathrm{i}z^* - 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}\,(x + \mathrm{i}x) - 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}x - x - 2 + 2\mathrm{i} = -x - 2 + \mathrm{i}\,(x+2) = -\,(x+2) + \mathrm{i}\,(x+2) = -u + \mathrm{i}u = v - \mathrm{i}v;$



Die Gerade wird insgesamt auf sich abgebildet (nicht punktweise), man spricht von einer Fixgeraden.

Geraden in der komplexen Zahlenebene

$x, y, a, m \in \mathbb{R};$

Re-Achse: $y = 0; \Rightarrow z = x;$

Im-Achse: $x = 0; \Rightarrow z = \mathrm{i}y;$

Parallele zur Re-Achse durch $(0, a)$: $y = a; \Rightarrow z = x + \mathrm{i}a;$

Parallele zur Im-Achse durch $(a, 0)$: $x = a; \Rightarrow z = a + \mathrm{i}y;$

Parallele zu $y = x$ durch $(0, a)$: $y = x + a; \Rightarrow z = x + \mathrm{i}\,(x + a)\,;$

Allgemein: $y = mx + a; \Rightarrow z = x + \mathrm{i}\,(mx + a)\,;$

Kreisgleichung

Mittelpunkt $M(0,0)$

$|z| = r; \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2;$

$|z|^2 = zz^* = r^2;$ (Betragsfreie Darstellung)

Mittelpunkt $M(m_x, m_y)$**, d.h.** $m = m_x + \mathrm{i}m_y$

$|z - m| = r;$
$(z - m)\,(z - m)^* = r^2;$
$(z - m)\,(z^* - m^*) = r^2;$
$zz^* - m^*z - mz^* + mm^* = r^2;$
$\Rightarrow zz^* - m^*z - mz^* = r^2 - mm^* = \gamma; \quad \gamma \in \mathbb{R};$

Kreisgleichung: $zz^* - m^*z - mz^* = \gamma$ mit $\gamma = r^2 - mm^*;$