Mathematik: Komplexe Zahlen

Ingo Blechschmidt

16. November 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematik: Komplexe Zahlen

1.1 Schulheft

1.1.1 Regeln für Zahlenbereichserweiterungen

Die alten Rechengesetze sollen weiter (und auch für die „neuen“ Zahlen) gelten (**Permanenzprinzip**).

Zahlenmengen: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (algebraische Zahlen (Menge der Nullstellen aller Polynomfunktionen) und transzendente Zahlen (z.B. π, $\lg 2$, $\sin 31°$))

1.1.2 Rechengesetze

Kommutativgesetze

$a + b = b + a;$
$a \cdot b = b \cdot a;$

Assoziativgesetze

$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c;$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c;$

Distributivgesetz

$a \cdot (b + c) = ab + ac;$

Weitere Eigenschaften der reelen Zahlen:

- K-, A-, D-Gesetze
- **Abgeschlossenheit** der Rechenoperatinen: Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{M}$ gilt:

  $a + b \in \mathbb{M};$
  $a \cdot b \in \mathbb{M};$
- **Eindeutigkeit** der Rechenoperationen, d.h. das Ergebnis von $a + b$ ist $a \cdot b$ ist eindeutig.
- **Existenz** des neutralen Elements in $\mathbb{M}$:

  $a + 0 = a$ („Nullelement“);

  $a \cdot 1 = a$ („Einselement“);
- Existenz der **inversen** Elemente:

  Zu jedem $a \in \mathbb{M}$ existiert ein Inverses $\overline{a}$, so dass $a + \overline{a} = 0;$

  Zu jedem $a \in \mathbb{M} \setminus \{0\}$ existiert ein Inverses $\frac{1}{a}$, sodass $a \cdot \frac{1}{a} = 1;$

Erfüllen alle Elemente von $\mathbb{M}$ alle die Eigenschaften, so nennt man $\mathbb{M}$ „Körper“ (Bsps.: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$).

Beispiel: Restklassenkörper modulo 5 (siehe Buch Seite 15), Restklassen modulo 6

Die Restklassen modulo einer Primzahl liefern immer einen Körper. Die Restklassenkörper sind Beispiele für **endliche** Körper.

Eigenschaften von Mengen, die sich anordnen lassen:

- Trichotomie:
  Für zwei Elemente a, b gilt genau eines von den drei Möglichkeiten $a > b$, $a < b$, $a = b$.
- Transitivität:
  $$\left.\begin{array}{l} a > b; \\ b > c; \end{array}\right\} \Rightarrow a > c;$$
- Monotonie: $a, b, c \in \mathbb{R}$;
  - $a < b; \Rightarrow a + c > b + c;$
  - $a < b; \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c; c > 0;$

Die endlichen Körper lassen sich nicht anordnen.

1.1.3 Die Erweiterung der reellen Zahlen

Mangel von $\mathbb{R}$

$7x + 3 = 0; \Rightarrow x = -\frac{3}{7}; \Rightarrow$ Einführung der Bruchzahlen

$x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Versuchsweise Einführung von Lösungen:

Neue Zahl i mit der Eigenschaft

$$\mathrm{i}^2 = -1;$$

Zahlen der Form $z = a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißen **komplex**.

BTW, **Wichtig**: Schreibe nie, **niemals**, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$!

a (b) heißt Realteil (Imaginärteil) von z ($\mathrm{Re}(z)$ ($\mathrm{Im}(z)$)).

Die Zahlen z bilden die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

Summe komplexer Zahlen: $z_1 + z_2 = a_1 + \mathrm{i}b_1 + a_2 + \mathrm{i}b_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{i}\,(b_1 + b_2)\,;$

Produkt komplexer Zahlen: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + \mathrm{i}b_1)\,(a_2 + \mathrm{i}b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i}\,(a_1 b_2 + a_2 b_2)\,;$

Kehrwerte: $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{1}{a+\mathrm{i}b} \cdot \frac{a-\mathrm{i}b}{a-\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \mathrm{i}\frac{-b}{a^2+b^2};$

Bemerkung: Die beiden komplexen Zahlen $z = a + \mathrm{i}b$ und $z^* = a - \mathrm{i}b$ heißen zueinander **konjugiert komplex**.

Kritik des Varfahrens

Z.B.: In $\mathbb{R}$ gibt es kein Inverses zu 0 bezüglich der Multiplikation.

Definiere $\mathrm{j} = 0^{-1}; \Rightarrow 0 \cdot \mathrm{j} = 1;$

Dann gilt:

- $(0+0) \cdot \mathrm{j} = 0 \cdot \mathrm{j} + 0 \cdot \mathrm{j} = 1 + 1 = 2;$
- $(0+0) \cdot \mathrm{j} = 0 \cdot \mathrm{j} = 1;$

$\Rightarrow$ WIDERSPRUCH!

„Wurzelziehen“: Siehe 4. Hausaufgabe.

Eigenschaften des Konjugierens

$z = x + \mathrm{i}y; \Rightarrow z^* = x - \mathrm{i}y;$

1. $(z^*)^* = z;$
2. $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*;$
3. $(z_1 \cdot z_2) = z_1^* \cdot z_2^*;$
   Entsprechend gilt: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$ für $z_2 \neq 0;$

1.1.4 Anordnung in $\mathbb{C}$

Ist $\mathrm{i} > 0$?

Annahme: $\mathrm{i} > 0; \Rightarrow -1 > 0;$

also: $\mathrm{i} < 0; \Rightarrow -1 > 0;$

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ lässt sich nicht (wie $\mathbb{R}$) anordnen.

1.1.5 Anschauliche Deutung der komplexen Zahlen

- GAUßsche Zahlenebene
- komplexe Zahlen als Vektoren
  Pfeile, die vom Ursprung ausgehen, heißen Ortsvektoren.

Betrag komplexer Zahlen

$|z| = |x + \mathrm{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2};$

Abstand zweier Punkte: $\left|\vec{d}\right| = |\vec{z_2} - \vec{z_1}|\,;$

Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,;$

Polarform komplexer Zahlen

$z = x + \mathrm{i}y;$ (Normalform)

z wird festgelegt durch

- Abstand vom Ursprung $|z| = r;$
- Winkel φ zwischen Re-Achse und Vektor z (gemessen im Bogenmaß)

Zusammenhänge mit der Normalform:

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2};$
- $\tan\varphi = \frac{y}{x};$

Polarkoordinaten: $z = (r; \varphi);$

- $x = r \cdot \cos\varphi;$
- $y = r \cdot \sin\varphi;$

Darstellung: $z = x + \mathrm{i}y = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)\,;$ (Polarform von z!)

Abkürzung: $E(\varphi) = \cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi;$

$|E(\varphi)| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{1} = 1;$

$\Rightarrow$ Die komplexen Zahlen $E(\varphi)$ liegen auf dem **Einheitskreis**.

$z = r \cdot E(\varphi);$

Eigenschaften von $E(\varphi)$:

- $|E(\varphi)| = 1;$

- $|E(\varphi)|$ ist periodisch.
  $E(\varphi + 2k\pi) = E(\varphi); \quad k \in \mathbb{Z};$
- $E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) = \ldots = E(\varphi_1 + \varphi_2);$

Folgerungen:

Für $\varphi_2 = -\varphi_1 = -\varphi; \Rightarrow E(\varphi) \cdot E(-\varphi) = E(0) = 1; \Rightarrow E(-\varphi) = \frac{1}{E(\varphi)};$

Für $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi; \Rightarrow [E(\varphi)]^2 = E(2\varphi);$

$[E(\varphi)]^n = E(n \cdot \varphi);$ für $n \in \mathbb{N}; \varphi \in \mathbb{R};$ (Formel von MOIVRE)

Produkte in Polarform:

$z_1 = |z_1|\, E(\varphi_1);$
$z_2 = |z_2|\, E(\varphi_2);$

$z_1 z_2 = |z_1 z_2|\, E(\varphi_1 + \varphi_2);$

$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|\,;$

Regel: Multiplikation zweier komplexer Zahlen bedeutet Multiplikation der Beträge und Addition der Winkelargumente.

Division in Polarform:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} E(\varphi_1 - \varphi_2);$

Regel: Division zweier komplexer Zahlen bedeutet Division der Beträge und Subtraktion der Winkelargumente.

Anwendungen:

a) $\cos 15°$ **und** $\sin 15°$ **in exakter Form:**
Ansatz: $15° = 45° - 30°;$
$E(15°) = \cos 15° + \mathrm{i} \sin 15° = E(45° - 30°) = \frac{E(45°)}{E(30°)} = \ldots = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$
$\Rightarrow \cos 15° = \mathrm{Re}[E(15°)]\,; \quad \sin 15° = \mathrm{Im}[E(15°)]\,;$

b) Trigonometrische Formeln:
$\cos 2\varphi + \mathrm{i} \sin 2\varphi = E(2\varphi) = [E(\varphi)]^2 = [\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi]^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2\mathrm{i}\cos\varphi\sin\varphi;$
$\Rightarrow \cos 2\varphi = cos^2\varphi - \sin^2\varphi; \quad \sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi;$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot E(\varphi_1 - \varphi_2);$

Def.: Der Winkel $\varepsilon = \angle(z_1, z_2)$ ist der Winkel, um den man z_1 (im positiven Drehsinn) drehen muss, damit z_1 in Richtung von z_2 weist.

[Falls $\varphi_1 - \varphi_2 < 0$ ist, ist $\varepsilon = \varphi_1 - \varphi_2 + 360°$.]

$\angle(z_2, z_1) = \mathrm{arc}\frac{z_1}{z_2}$; („Winkel, um den man z_2 drehen muss, damit z_2 in Richtung von z_1 zeigt“)

(Addiere evtl. zum Taschenrechnerwert des Arcustangens $0°$ im I. Quadranten, $180°$ im II. und III. Quadranten und $360°$ im IV. Quadranten.)

Anwendung der Formel von Moivre

$[E(\varphi)]^n = E(n \cdot \varphi);$

Lösungen der Gleichung $z^n = 1$; („Einheitswurzeln“)

$n = 3$: $z^3 = 1 = 1 \cdot E(0°); \Rightarrow z_1 = 1; \quad z_2 = E(120°); \quad z_3 = E(240°);$

Zur Gleichung $z^n = 1$:

$L_\varphi = \left\{0, \frac{1}{n}2\pi, \frac{2}{n}2\pi, ..., \frac{n-1}{n}2\pi\right\};$

d.h. $z_k = E(\frac{k-1}{n}2\pi); \quad k \in \mathbb{N} \cap [1, n];$

Allgemein: $z^n = E(\varphi); \Rightarrow z_k = E(\dfrac{\varphi + (k-1) \cdot 360°}{n}); \quad k \in \mathbb{N} \cap [1, n];$

Die Gleichung $z^n = a; \quad a \in \mathbb{C};$

$z^n = a; \Leftrightarrow |z|^n E(n\varphi) = |a| E(\alpha);$

$\Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|a|}; \wedge E(n\varphi) = E(\alpha);$

D.h. $n\varphi = \alpha + k \cdot 360°; \quad k \in \mathbb{N} \cap [0, n-1];$

$\varphi_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot 360°;$

$\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{|a|}E(\frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n} \cdot 360°); \quad k \in \mathbb{N} \cap [0, n-1];$

Alle Lösungen haben gleichen Betrag und liegen auf einem Kreis um den Ursprung mit Radius $\sqrt[n]{|a|}$.

1.1.6 Komplexe Abbildungen

Einfache komplexe Abbildungen

In $\mathbb{R}$: $x \mapsto y = 2x;$

In $\mathbb{C}$: $z \mapsto w = 2z;$

1.1.7 Allgemein: Die Abbildung $z \mapsto w = az; \quad a \in \mathbb{C};$

Polarform:

$a = |a|\, E(\alpha);$
$z = |z|\, E(\varphi);$

$w = az = |a|\, E(\alpha) \cdot |z|\, E(\varphi) = |a|\, |z|\, E(\alpha + \varphi);$

Ergebnis: Die Abbildung $z \mapsto w = az$ ($a \neq 0$) ist eine zentrische Streckung mit anschließender Drehung (Drehstreckung). Das Zentrum ist 0, Streckungsfaktor ist $|a|$, Drehwinkel ist $\operatorname{arc} a$.

Spezielle Fälle:

- $|a| = 1$; (Reine Drehung um $\operatorname{arc} a$)
- $a \in \mathbb{R}$; (Reine zentrische Steckung (mit positivem Faktor; Drehwinkel $0°$ oder $180°$)

Eigenschaften der linearen Abbildung $z \mapsto w = az + b; \quad a \neq 0;$

Jede Abbildung der Form $z \mapsto w = az + b$ kann aufgefasst werden als Hintereinanderschaltung zweier Abbildungen f und g:

Dabei ist $\mathrm{f} : z \mapsto v = az$ eine Drehstreckung um den Ursprung mit Streckungsfaktor $|a|$ und Drehwinkel $\operatorname{arc} a$ und $\mathrm{g} : v \mapsto w = v + b$ eine Translation um den komplexen Vektor b.

Schreibweise: $w = \mathrm{g}(v) = \mathrm{g}(\mathrm{f}(z)) = \mathrm{g} \circ \mathrm{f}(z);$ („g nach f“)

Damit ist jede Abbildung der Form $w = az+b$ eine Ähnlichkeitsabbildung. Sie verändert nicht den Drehsinn (gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung).

Für $|a| = 1$ handelt es sich um eine gleichsinnige Kongruenzabbildung.

Noch eine konjugiert lineare Abbildung

$z \mapsto w = \mathrm{i}z^* + (-2 + 2\mathrm{i})\,;$

$(x + y\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,(x - y\mathrm{i}) + (-2 + 2\mathrm{i})\,; \Rightarrow x - y + 2 = \mathrm{i}\,(x - y + 2)\,;$

Nur erfüllt für $x - y + 2 = 0; \Rightarrow y = x + 2;$ (Fixpunktgerade!)

- Was passiert mit der Geraden $\mathrm{g} : y = x$?

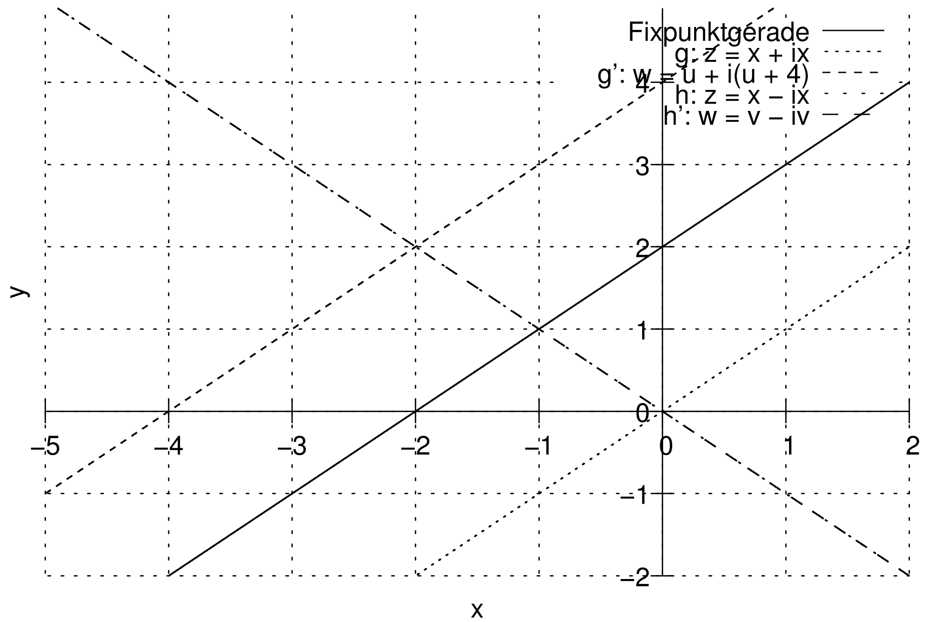
  $\mathrm{g} : z = x + \mathrm{i}x;$

  $\mathrm{g}' : w = \mathrm{i}z^* - 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}\,(x - x\mathrm{i}) - 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}x + x - 2 + 2\mathrm{i} = x - 2 + \mathrm{i}\,(x + 2) = u + \mathrm{i}\,(u + 4)\,;$

- Was passiert mit der Geraden $\mathrm{h} : y = -x$?

  $\mathrm{h} : z = x - \mathrm{i}x;$

  $\mathrm{h}' : w = \mathrm{i}z^* - 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}\,(x + \mathrm{i}x) - 2 + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}x - x - 2 + 2\mathrm{i} = -x - 2 + \mathrm{i}\,(x + 2) = -\,(x + 2) + \mathrm{i}\,(x + 2) = -u + \mathrm{i}u = v - \mathrm{i}v;$



Die Gerade wird insgesamt auf sich abgebildet (nicht punktweise), man spricht von einer Fixgeraden.

Geraden in der komplexen Zahlenebene

$x, y, a, m \in \mathbb{R};$

Re-Achse: $y = 0; \Rightarrow z = x;$

Im-Achse: $x = 0; \Rightarrow z = \mathrm{i}y;$

Parallele zur Re-Achse durch $(0, a)$: $y = a; \Rightarrow z = x + \mathrm{i}a;$

Parallele zur Im-Achse durch $(a, 0)$: $x = a; \Rightarrow z = a + \mathrm{i}y;$

Parallele zu $y = x$ durch $(0, a)$: $y = x + a; \Rightarrow z = x + \mathrm{i}\,(x + a)\,;$

Allgemein: $y = mx + a; \Rightarrow z = x + \mathrm{i}\,(mx + a)\,;$

Kreisgleichung

Mittelpunkt $M(0,0)$

$|z| = r; \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2;$

$|z|^2 = zz^* = r^2;$ (Betragsfreie Darstellung)

Mittelpunkt $M(m_x, m_y)$**, d.h.** $m = m_x + \mathrm{i}m_y$

$|z - m| = r;$
$(z - m)(z - m)^* = r^2;$
$(z - m)(z^* - m^*) = r^2;$
$zz^* - m^*z - mz^* + mm^* = r^2;$
$\Rightarrow zz^* - m^*z - mz^* = r^2 - mm^* = \gamma; \quad \gamma \in \mathbb{R};$

Kreisgleichung: $zz^* - m^*z - mz^* = \gamma$ mit $\gamma = r^2 - mm^*;$

1.2 Hausaufgaben

1.2.1 1. Hausaufgabe

Buch Seite 25, Aufgabe 1

a) Berechne i^n für $n \in \{2, 3, 4, \ldots, 9, 32, 33, 34, 35\}$!

b) Berechne i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2}, i^{4n+3}, wenn $n \in \mathbb{N}$ ist!

- $\mathrm{i}^{4n} = \mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^8 = \mathrm{i}^{32} = 1;$
- $\mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}^9 = \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^9 = \mathrm{i}^{33} = \mathrm{i};$
- $\mathrm{i}^{4n+2} = \mathrm{i}^2 = \mathrm{i}^6 = \mathrm{i}^{34} = -1;$
- $\mathrm{i}^{4n+3} = \mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^7 = \mathrm{i}^{35} = -\mathrm{i};$

c) Berechne $(-\mathrm{i})^{4n}$, $(-\mathrm{i})^{4n+1}$, $(-\mathrm{i})^{4n+2}$, $(-\mathrm{i})^{4n+3}$ für $n \in \mathbb{N}$!

- $(-\mathrm{i})^{4n} = 1;$
- $(-\mathrm{i})^{4n+1} = -\mathrm{i};$
- $(-\mathrm{i})^{4n+2} = -1;$
- $(-\mathrm{i})^{4n+3} = \mathrm{i};$

1.2.2 2. Hausaufgabe

Buch Seite 25, Aufgabe 4

Berechne:

a) $6 \cdot 2\mathrm{i} = 12\mathrm{i};$

b) $6\mathrm{i} \cdot 2\mathrm{i} = -12;$

c) $\mathrm{i} \cdot 2 \cdot \mathrm{i} \cdot 3 \cdot \mathrm{i} \cdot 4 \cdot \mathrm{i} \cdot 5 \cdot \mathrm{i} = 120\mathrm{i};$

d) $\sqrt{2}\mathrm{i}\left(1 - \sqrt{2}\mathrm{i}\right) = 2 + \sqrt{2}\mathrm{i};$

Buch Seite 26, Aufgabe 11

a) $z^2 + 10z + 34 = 0; \Rightarrow \mathbb{L} = \{-5 - 3\mathrm{i}, -5 + 3\mathrm{i}\};$

b) $z^2 - 6z + 12 = 0; \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{3 - \sqrt{3}\mathrm{i}, 3 + \sqrt{3}\mathrm{i}\right\};$

1.2.3 3. Hausaufgabe

Buch Seite 26, Aufgabe 6b

Berechne zu folgendem Zahlenpaar z_1, z_2 den Quotienten $z_1 : z_2$ und mache die Probe!

$\frac{2-5\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}} = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25}\mathrm{i};$

Buch Seite 26, Aufgabe 7a

Berechne $\mathrm{i}z + \frac{1}{z}$ für $z = 1 + \mathrm{i}$.

$\mathrm{i}z + \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i};$

1.2.4 4. Hausaufgabe

Die Zahl $-21+20\mathrm{i}$ ist ein Quadrat einer komplexen Grundzahl $x+\mathrm{i}y$. Bestimme dieselbe! Ist die Lösung eindeutig?

1. Herleiten einer allgemeinen Lösungsformel:

   $a, b, x, y \in \mathbb{R}; z^2 = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C};$

   $$\begin{aligned} z^2 &= a + b\mathrm{i}; \\ (x + \mathrm{i}y)^2 &= a + b\mathrm{i}; \\ x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2 &= a + b\mathrm{i}; \\ x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} &= a + b\mathrm{i}; \Rightarrow \end{aligned}$$

   $$\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = a; \\ 2xy = b; \Rightarrow x = \frac{b}{2y}; \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{b^2}{4y^2} - y^2 &= a; \\ b^2 - 4y^4 - 4ay^2 &= 0; \\ -4y^4 - 4ay^2 + b^2 &= 0; \Rightarrow \end{aligned}$$

   $$\left.\begin{array}{l} -4y^4 - 4ay^2 + b^2 = 0; \\ y^2 = u; \end{array}\right\} \Rightarrow -4u^2 - 4au + b^2 = 0; \Rightarrow$$

   $$\begin{aligned} u_{1,2} &= \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 4 \cdot -4 \cdot b^2}}{-8} = \\ &= -\frac{4a \pm 4\sqrt{a^2 + b^2}}{8} = \\ &= -\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}; \Rightarrow \end{aligned}$$

   $$\left.\begin{array}{l} y_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{-\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}; \Rightarrow \\ x_{1,2,3,4} = \frac{b}{2y_{1,2,3,4}}; \end{array}\right\} \Rightarrow z = \frac{b}{2 \cdot \pm\sqrt{-\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}} \pm \sqrt{-\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}\mathrm{i};$$

   Diskriminante:

   $$\begin{aligned} D = -\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2} &> 0; \\ a \pm \sqrt{a^2 + b^2} &< 0; \end{aligned}$$

   Neuschreiben der Lösung mit Hilfe der Diskriminante:

   $z = \frac{b}{2 \cdot \pm\sqrt{D}} \pm \sqrt{D}\mathrm{i};$

2. Lösen der eigentlichen Aufgabe:

   $z^2 = -21 + 20\mathrm{i}; \Rightarrow (a, b) = (-21, 20); \Rightarrow$

   Betrachtung der Diskriminanten: $-21 \pm 29 < 0; \Rightarrow$ Wegfall der „+“-Lösung, da $-21 + 29 > 0;$

   - $z_1 = 2 + 5\mathrm{i};$
   - $z_2 = -2 - 5\mathrm{i};$

3. Probe

1.2.5 5. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgaben

1. $u = \frac{8\mathrm{i}}{z} - z^*; \qquad z = a + 2\mathrm{i};$

   Für welche a ist u reell?

   $u = \frac{8\mathrm{i}}{z} - z^* = \mathrm{i}\left(\frac{8a}{a^2+4} + 2\right) + \frac{16}{a^2+4} - a;$

   $\Rightarrow \frac{8a}{a^2+4} + 2 = 0; \Rightarrow 2a^2 + 8a + 8 = 0; \Rightarrow a = -2;$

2. $\frac{zzz^* - (z^*)^2}{z-1} = 4 + 2\mathrm{i}; \qquad z = 1 - \mathrm{i};$

1.2.6 6. Hausaufgabe

Buch Seite 36, Aufgabe 1

Stelle folgende Summen in der Zahlenebene durch eine Vektorkette dar! Beachte: Subtraktion von z kann durch Addition von $-z$ ersetzt werden!

a) $(2 + 3\mathrm{i}) + (1 + 2\mathrm{i}) = 3 + 5\mathrm{i};$

b) $(2 - 3\mathrm{i}) + (3 + 5\mathrm{i}) = 5 + 2\mathrm{i};$

d) $(1 + 2\mathrm{i}) - (2 + \mathrm{i}) - (1 + \mathrm{i}) = -2;$

1.2.7 7. Hausaufgabe

Buch Seite 37, Aufgabe 4

Man berechne die Beträge folgender Zahlen:

a) $|z_1| = |-3 + 4\mathrm{i}| = 5;$

$|z_2| = \left|\frac{9}{10} + \frac{6}{5}\mathrm{i}\right| = \frac{3}{2};$

$|z_1 + z_2| = \frac{\sqrt{629 \cdot 5}}{10};$

$|z_1 : z_2| = \frac{50}{21};$

b) $|z_1| = \left|\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\right| = 1;$

$|z_2| = \left|\frac{6}{5} + \frac{8}{5}\mathrm{i}\right| = 2;$

$|z_1 + z_2| = 3;$

$|z_1 \cdot z_2| = 2;$

1.2.8 8. Hausaufgabe

Buch Seite 37, Aufgabe 6

Stelle folgende Zahlen in Polarform dar!

i) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} = E(\arctan -\frac{4}{3});$

k) $-7 - 3\mathrm{i} = \sqrt{58}E(\arctan \frac{3}{7});$

Buch Seite 37, Aufgabe 7

Folgende Zahlen sind in Normalform $x + y\mathrm{i}$ zu überführen! Handelt es sich durchwegs um Polarformen?

d) $\sqrt{3}E(-\frac{4}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\mathrm{i};$

e) $2E(\frac{3}{4}\pi) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i};$

f) $2E(-\frac{3}{4}\pi) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i};$

1.2.9 9. Hausaufgabe

Buch Seite 37, Aufgabe 9

Zeige: Für alle φ gilt:

a) $[E(\varphi)]^* = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin(-\varphi) = E(-\varphi);$

b) $\frac{1}{2}[E(\varphi) + E(-\varphi)] = \frac{1}{2}[\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi + \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi] = \cos\varphi;$

c) $\frac{1}{2\mathrm{i}}[E(\varphi) - E(-\varphi)] = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi - \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi] = \sin\varphi;$

1.2.10 10. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$z_1 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2E(\frac{2}{3}\pi);$

$z_2 = 4E(\frac{11}{6}\pi);$

$\Rightarrow z_1 z_2 = 8E(\frac{2}{3}\pi + \frac{11}{6}\pi) = 8E(\frac{5}{2}\pi) = 8E(\frac{\pi}{4}) = 8\mathrm{i};$

$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}E(\frac{2}{3}\pi - \frac{11}{6}\pi) = \frac{1}{2}E(-\frac{7}{6}\pi) = \frac{1}{2}E(\frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\mathrm{i};$

$\Rightarrow z_1^{-1} = \frac{E(0)}{z_1} = \frac{1}{2}E(-\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}E(\frac{4}{3}\pi) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\mathrm{i};$

$\Rightarrow z_2^{-1} = \frac{E(0)}{z_2} = \frac{1}{4}E(-\frac{11}{6}\pi) = \frac{1}{4}E(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{8}\mathrm{i};$

1.2.11 11. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$E(105°) = E(60° + 45°) = E(60°)E(45°) = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} + \mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}\right); \Rightarrow$

$\cos 105° = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6};$

$\sin 105° = \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6};$

1.2.12 12. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$z_1 = 4 + \mathrm{i}; \quad z_2 = 2 + 3\mathrm{i}; \quad \varepsilon = \angle(z_1, z_2);$

$z_1 = \sqrt{17}E(\arctan\frac{1}{4}); \quad z_2 = \sqrt{13}E(\arctan\frac{3}{2});$

$\Rightarrow \varepsilon = \varphi_2 - \varphi_1 = \arctan\frac{3}{2} - \arctan\frac{1}{4} \approx 42°;$

1.2.13 13. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$z_1 = 1 + \mathrm{i}; \quad z_2 = 3 - \mathrm{i}; \quad z_3 = 2 + 5\mathrm{i};$

$\alpha = \angle(\vec{z_1 z_2}, \vec{z_1 z_3}) = \operatorname{arc}\frac{\vec{z_1 z_3}}{\vec{z_1 z_2}} = \operatorname{arc}\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{2+5\mathrm{i}-1-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}-1-\mathrm{i}} = \ldots = \operatorname{arc}\frac{-6+10\mathrm{i}}{8}; \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{10}{6}; \Rightarrow \alpha \approx -59° + 180° \approx 121°;$

$\beta = \angle(\vec{z_2 z_3}, \vec{z_1 z_2}) = \operatorname{arc}\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \operatorname{arc}\frac{3-\mathrm{i}-1-\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}-2-5\mathrm{i}} = \operatorname{arc}\left(\frac{2-2\mathrm{i}}{1-6\mathrm{i}}\frac{1+6\mathrm{i}}{1+6\mathrm{i}}\right) = \operatorname{arc}\frac{14+10\mathrm{i}}{37}; \Rightarrow \tan\beta = \frac{10}{14}; \Rightarrow \beta \approx 36°;$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 23°;$

1.2.14 14. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$\left(-\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^8 = \left[2E(\frac{5}{6}\pi)\right]^8 = 2^8 E(\frac{20}{3}\pi) = 256\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -128 + 128\mathrm{i}\sqrt{3};$

1.2.15 15. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

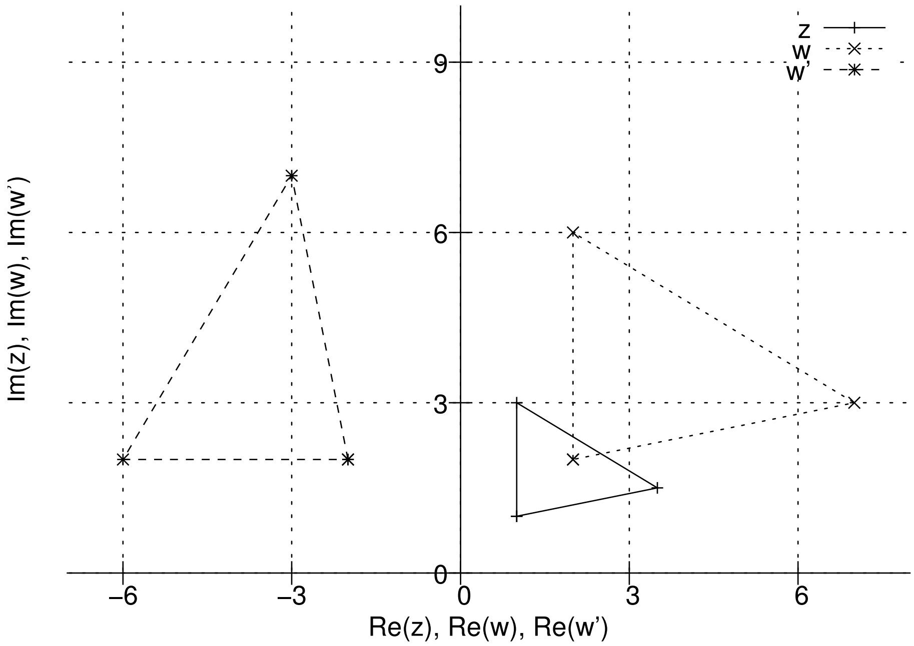
$z^5 = 1; \Rightarrow L = \left\{E(k \cdot \frac{2\pi}{5}) | k \in \mathbb{N} \cap [1, 5]\right\};$

1.2.16 16. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$z \mapsto w = 2z;$
$z \mapsto w' = 2\mathrm{i}z;$ (Drehstreckung um den Ursprung mit dem Punktstreckungsfaktor 2 und dem Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$)

$z_1 = 1 + \mathrm{i};$
$z_2 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i};$
$z_3 = 1 + 3\mathrm{i};$



1.2.17 17. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$z \mapsto w = az;$

$z_1 = 1 + \mathrm{i};$
$w_1 = 2;$

$z_2 = 4 + 2\mathrm{i};$

$w_1 = az_1; \Rightarrow a = \frac{w_1}{z_2} = \frac{2}{1+\mathrm{i}} = 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}E(315°);$

$\Rightarrow w_2 = (1 - \mathrm{i})\,(4 + 2\mathrm{i}) = 6 - 2\mathrm{i};$

Drehstreckung um 0 mit Streckungsfaktor $\sqrt{2}$ und Drehwinkel $315°$.

1.2.18 18. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$\mathrm{f}(z) = az + b;$

$z_1 = 3\mathrm{i} \mapsto \mathrm{f}(z_1) = -2 - 4\mathrm{i};$
$z_2 = 0 \mapsto \mathrm{f}(z_2) = -2 - \mathrm{i};$
$z_3 = 2 \mapsto \mathrm{f}(z_3);$

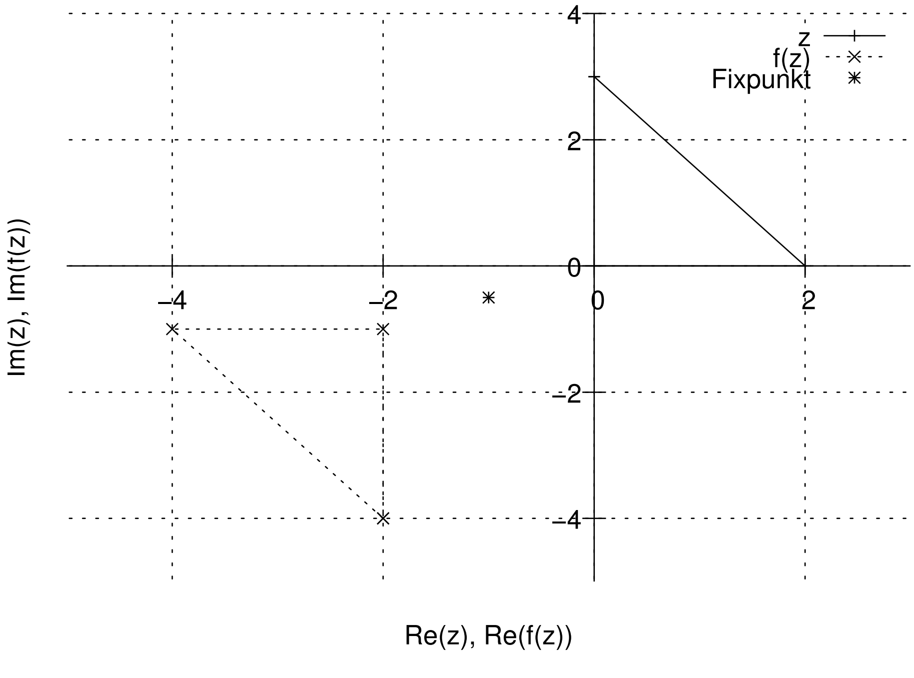
$3\mathrm{i}a + b = -2 - 4\mathrm{i}; \Rightarrow b = -2 - 4\mathrm{i} - 3\mathrm{i}a;$

$b = -2 - \mathrm{i};$

$\Rightarrow -2 - 4\mathrm{i} - 3\mathrm{i}a = -2 - \mathrm{i}; \Rightarrow a = -1;$

$\Rightarrow \mathrm{f}(z_0) = -z_0 - 2 - i = z_0; \Rightarrow z_0 = -1 - \frac{\mathrm{i}}{2};$

$\Rightarrow \mathrm{f}(z_3) = -4 - \mathrm{i};$



1.2.19 19. Hausaufgabe

Buch Seite 67, Aufgabe 4

Bestimme a und b so, dass die Abbildung $z \mapsto az + b\ldots$

a) …eine Drehung um 0 um $30°$ gegen den Uhrzeigersinn wird.

$a = E(30°); \quad b = 0;$

b) …eine Drehung um 0 um $30°$ im Uhrzeigersinn wird.

$a = E(330°); \quad b = 0;$

c) …eine Drehstreckung um 0 als Zentrum mit Streckungsfaktor 3 und Drehwinkel $90°$ im Uhrzeigersinn wird.

$a = 3E(270°); \quad b = 0;$

d) …eine Drehstreckung um 0 mit Streckungsfaktor 2 und Drehwinkel $135°$ gegen den Uhrzeigersinn wird.

$a = 2E(135°); \quad b = 0;$

1.2.20 20. Hausaufgabe

Buch Seite 68, Aufgabe 6

Von einer Drehung $z \mapsto w = az + b$ kennt man den Fixpunkt $z_0 = \mathrm{i}$ und den Drehwinkel $\alpha = 45°$. Bestimme a und b!

$z \mapsto \mathrm{f}(z) = w = az + b;$

$\mathrm{f}(z_0) = \mathrm{f}(\mathrm{i}) = \mathrm{i}a + b = \mathrm{i}; \Rightarrow a = \frac{\mathrm{i}-b}{\mathrm{i}} = 1 + b\mathrm{i};$

$\alpha = \operatorname{arc}(1 + b\mathrm{i}) = \arctan b;$

$\Rightarrow \tan\alpha = 1 = b;$

$\Rightarrow a = 1 + \mathrm{i};$

1.2.21 21. Hausaufgabe

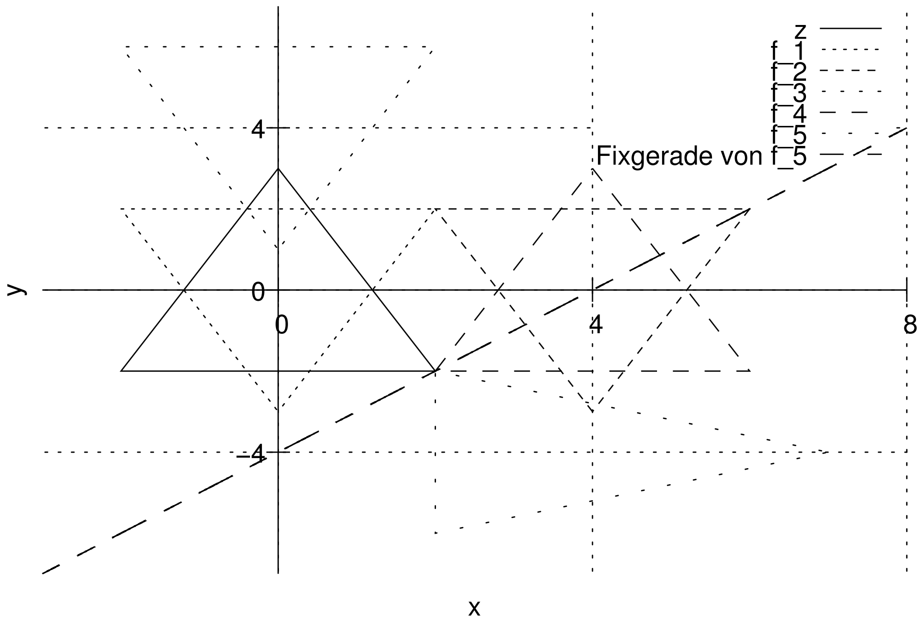
Selbstgestellte Aufgabe

Gegeben sind die Abbildungen

- $\mathrm{f}_1(z) = z^*;$
- $\mathrm{f}_2(z) = z^* + 4;$
- $\mathrm{f}_3(z) = z^* + 4\mathrm{i};$
- $\mathrm{f}_4(z) = -z^* + 4;$

- $f_5(z) = iz^* + 4 - 4i$;

a) Bestimme und zeichne jeweils das Bild des Dreiecks $z_1 = 3i$, $z_2 = -2 - 2i$, $z_3 = 2 - 2i$.



b) Berechne, ob die Abbildungen Fixpunkte haben.

$z_0 = x_0 + y_0 i \in \mathbb{C}; \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$;

f_1

$f_1(z_0) = f_1(x_0 + y_0 i) = x_0 - y_0 i = x_0 + y_0 i; \Rightarrow -y_0 = y_0; \Rightarrow y_0 = 0$;
$\Rightarrow z_0 \in \mathbb{R}$ sind Fixpunkte.

f_2

$f_2(z_0) = f_2(x_0 + y_0 i) = x_0 - y_0 i + 4 = x_0 + y_0 i; \Rightarrow y_0 = -2i$;
$\Rightarrow$ Es gibt keine Fixpunkte, da $-2i \notin \mathbb{R}$.

f_3

$f_3(z_0) = f_3(x_0 + y_0 i) = x_0 - y_0 i + 4i = x_0 + y_0 i; \Rightarrow y_0 = 2$;
$\Rightarrow z_0 \in \{z | z \in \mathbb{C} \wedge \mathrm{Im}(z) = 2\}$;

f_4

$f_4(z_0) = f_4(x_0 + y_0 i) = -x_0 + y_0 i + 4 = x_0 + y_0 i; \Rightarrow x_0 = 2$;
$\Rightarrow z_0 \in \{z | z \in \mathbb{C} \wedge \mathrm{Re}(z) = 2\}$;

f_5

$f_5(z_0) = f_5(x_0 + y_0 i) = x_0 i + y_0 + 4 - 4i = x_0 + y_0 i; \Rightarrow y_0 = -4 + x_0;$
$\Rightarrow z_0 \in \{z | z \in \mathbb{C} \wedge \mathrm{Im}(z) = -4 + \mathrm{Re}(z)\}\,;$

c) Wie lassen sich die Abbildungen geometrisch beschreiben?

f_1

Spiegelung an der reellen Achse

f_2

Spiegelung an der reellen Achse und Translation um 4 auf der reellen Achse

f_3

Spiegelung an der reellen Achse und Translation um 4 auf der imaginären Achse (auch: Achsenspiegelung an einer Parallelen der reellen Achse mit Imaginärteil 2)

f_4

Spiegelung an der reellen Achse mit anschließender Punktspiegelung am Ursprung und Translation um 4 auf der reellen Achse

f_5

Spiegelung an der reellen Achse mit anschließender Drehung um $\frac{\pi}{2}$ und Translation um 4 auf der reellen und -4 auf der imaginären Achse

d) Zeichne die Menge der Punkte $z = x + 3i$ mit $x \in \mathbb{R}$ und bestimme jeweils die zugehörige Bildmenge.

Zusammenhang zwischen Original und Bild?

f_1

$f_1(z) = x - 3i;$ (Spiegelung an der reellen Achse)

f_2

$f_2(z) = x - 3i + 4;$ (Spiegelung an der reellen Achse)

f_3

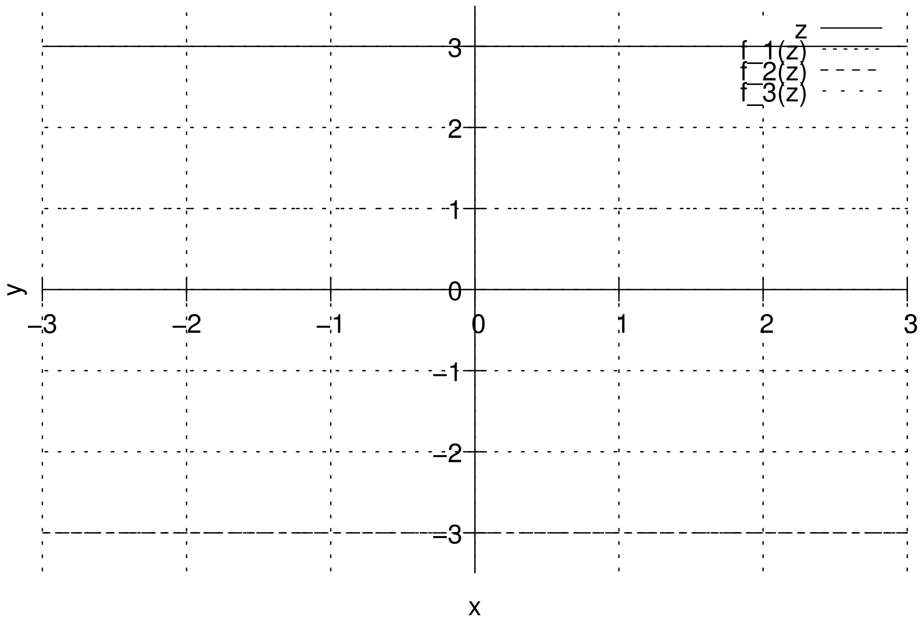
$f_3(z) = x + i;$ (Verschiebung um 2 entgegen der imaginären Achse oder Achsenspiegelung an einer um 2 in imaginärer Richtung verschobenen Parallelen zur reellen Achse)

f_4

$f_4(z) = -x + 3i + 4;$ (Identitätsabbildung)

f_5

$f_5(z) = ix + 4 - \mathrm{i}$; (Drehung um $90°$ um 0 und Verschiebung um 4 auf der reellen Achse oder Drehung um 4)



1.2.22 22. Hausaufgabe

(Siehe 21. Hausaufgabe.)

1.2.23 23. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$z \mapsto w = iz^*$;   Fixpunkte, Fixgerade?

$z_{\text{Fixpunkte}} = iz^*_{\text{Fixpunkte}}; \Rightarrow x + \mathrm{i}y = ix + y; \Rightarrow x - y = \mathrm{i}\left(x - y\right); \Rightarrow x - y = 0; \Rightarrow x = y;$

$\Rightarrow z_{\text{Fixpunkte}} = x + \mathrm{i}x; \quad x \in \mathbb{R};$

$z_{\text{Fixgerade}} = x + \mathrm{i}\left(-x + c\right); \quad c \in \mathbb{R};$

$\Rightarrow iz^*_{\text{Fixgerade}} = \mathrm{i}x - x + c = -x + c + \mathrm{i}x = u + \mathrm{i}\left(c - u\right) = u + \mathrm{i}\left(-u + c\right);$

1.2.24 24. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$z \mapsto w = -\mathrm{i}z^* - 1 - \mathrm{i};$

$z_{\text{Fixpunkte}} = -\mathrm{i}z^*_{\text{Fixpunkte}} - 1 - \mathrm{i}; \Rightarrow a + \mathrm{i}b = -\mathrm{i}\,(a - \mathrm{i}b) - 1 - i = -\mathrm{i}a - b - 1 - \mathrm{i}; \Rightarrow a + b + 1 = \mathrm{i}\,(a + b + 1)\,; \Rightarrow b = -1 - a;$

$\Rightarrow z_{\text{Fixpunkte}} = x + \mathrm{i}\,(-1 - x)\,; \quad x \in \mathbb{R};$

$z_{\text{Fixgerade}} = x + \mathrm{i}\,(x + c)\,; \quad c \in \mathbb{R};$

$-\mathrm{i}z^*_{\text{Fixgerade}} - 1 - \mathrm{i} = -x - c - 1 + \mathrm{i}\,(-x - 1) = u + \mathrm{i}\,(u + c)\,;$

1.2.25 25. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

$z \mapsto w = -2\mathrm{i}z^* + 2 + 4\mathrm{i};$

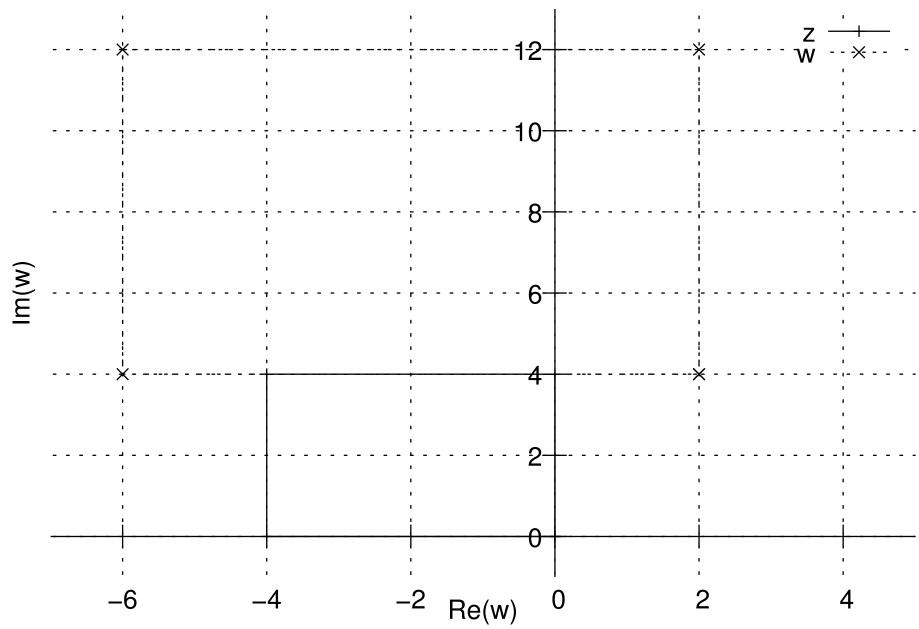
$x_0 + \mathrm{i}y_0 = -2\mathrm{i}\,(x_0 - \mathrm{i}y_0) + 2 + 4\mathrm{i} = -2\mathrm{i}x_0 - 2y_0 + 2 + 4\mathrm{i};$

$\Rightarrow x_0 + 2y_0 - 2 = \mathrm{i}\,(-2x_0 - y_0 + 4)\,;$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_0 + 2y_0 - 2 & = & 0; \Rightarrow x_0 = 2 - 2y_0; \\ -\,2x_0 - y_0 + 4 & = & 0; \Rightarrow x_0 = 2 - \frac{y_0}{2}; \quad y_0 = 4 - 2x_0; \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 - 2y_0 = 2 - \frac{y_0}{2}; \Rightarrow 4y_0 = y_0; \Rightarrow y_0 = 0; \\ x_0 = 2 - 2\,(4 - 2x_0) = 2 - 8 + 4x_0 = -6 + 4x_0 = 0; \Rightarrow x_0 = 2; \end{array} \right.$$

$\Rightarrow z_0 = 2;$



1.2.26 26. Hausaufgabe

Buch Seite 49, Aufgabe 3a

Überführe die folgende Kreisgleichung von der Form $zz^* - m^*z - mz^* + \gamma = 0$ in die Form $|z - m| = r$!

$zz^* - z - z^* - 24 = 0;$

$mm^* = m = 1;$

$24 = r^2 - mm^*; \Rightarrow r = 5;$

$25 = zz^* - z - z^* + 1 = (z-1)(z-1)^* = |z-1|^2;$

$\Rightarrow |z-1| = 5;$

1.2.27 27. Hausaufgabe

Buch Seite 49, Aufgabe 5b

Bestimme folgende Punktmenge und zeichne sie!

$\left\{ z \,\middle|\, \frac{|z-1|}{|z+1|} = 3 \right\}$

$\frac{(z-1)(z^*-1)}{(z+1)(z^*+1)} = 9;$

$\Rightarrow zz^* - z - z + 1 = 9zz^* + 9z + 9z^* + 9;$

$\Rightarrow 0 = zz^* + \frac{5}{4}z + \frac{5}{4}z^* + 1;$

$\Rightarrow zz^* + \frac{5}{4}z + \frac{5}{4}z^* = -1 = r^2 - mm^*;$

$\Rightarrow zz^* + \frac{5}{4}z + \frac{5}{4}z^* + \frac{25}{16} = -1 + \frac{25}{16} = \frac{9}{16};$

$\Rightarrow \left|z + \frac{5}{4}\right| = \frac{3}{4};$