0.0.1 Kreisbewegung

Bogenlänge: $s = \varphi \cdot r;$

Mittlere Geschwindigkeit: $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t};$

Mittlere Winkelgeschwindigkeit: $\overline{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}; \quad [\overline{\omega}] = \frac{1}{\mathrm{s}};$

Konstante Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}; \Rightarrow \omega = \frac{\varphi}{t};$

Umlaufdauer T: $\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad [T] = \mathrm{s};$

Frequenz f: $f = \frac{1}{T}; \quad [f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz};$

$\Rightarrow \omega = 2\pi f;$

Bewegungsgleichungen:

- $x(t) = r \cdot \cos \omega t;$
- $y(t) = r \cdot \sin \omega t;$

Bahngeschwindigkeit: $v = \frac{\varphi r}{t} = \frac{\omega t r}{t} = \omega r;$

Die Bahngeschwindigkeit ist tangential zum Kreis und steht senkrecht zum Ortsvektor $\vec{v}$.

Für die Ablenkung aus der geradlinigen Bahn ist (vgl. Trägheitssatz!) eine Kraft nötig. Bei einer Kreisbahn ist diese Kraft zum Kreismittelpunkt hin gerichtet und heißt **Zentripetalkraft**.

Gleichförmige Bewegung: $|\vec{v}|$ ändert sich nicht.

Symbol für die Zentripetalkraft: $\vec{F}_r$

Nach Newton: $\vec{F}_r = m \cdot \vec{a}_r;$

Bestimmung der Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_r$:

- Richtung von $\vec{a}_r$: radial nach innen
- Betrag von $\vec{a}_r$: $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$: mittlere Beschleunigung im Zeitintervall Δt
  $\Delta t \to 0 \to$ Momentanbeschleunigung
  $\Rightarrow \vec{a}_r = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t};$
  [Abb.]
  $\vec{v'} = \vec{v} + \Delta\vec{v};$

Wegen ähnlicher Dreiecke folgt: $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\overline{PP'}}{r}$; $\Rightarrow \Delta v = v \cdot \frac{\overline{PP'}}{r}$; $\Rightarrow$ $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t}\frac{\overline{PP'}}{r}$;

Mit $\Delta t \to 0$ nähert sich $\overline{PP'}$ der Bogenlänge $\Delta s = v \cdot \Delta t$ an.

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v}{\Delta t}\frac{\overline{PP'}}{r}$ „=“ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r}\frac{v \cdot \Delta t}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} = |\vec{a}_r|$;

Ergebnis: Für den Betrag der Zentripetalbeschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung gilt: $|\vec{a}_r| = a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$;

Es gilt: $a_r \sim r$;

Folgerung: Für die Zentripetalkraft F_r gilt daher (nach NEWTONs 2. Gesetz): $F_r = m \cdot a_r = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$ mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

[Versuch: Überprüfung unserer deduktiven Herleitung]

Beispiel: Schiffschaukel (vgl. Buch S. 89)

[Abbildung: Kreis, oben A, links B, unten C]

a) In A soll v_A so groß sein, dass ein Gegenstand in der Schaukel nicht herunterfällt (Schwerelosigkeit), d.h. in A wird die Gewichtskraft komplett für die Zentripetalkraft verwendet:

$F_{R_A} = F_G; \Rightarrow m\frac{v_A^2}{r} = mg; \Rightarrow v_A = \sqrt{rg}$;

b) Betrag der Geschwindigkeit auf dem Weg von A nach C:

Energieerhaltung $\Rightarrow$ $|\vec{v}|$ nimmt zu.

In C: Nullniveau für E_{pot}

Energiebilanz in der Höhe h: $2mgr + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_h^2; \Rightarrow v_h = \sqrt{5gr - 2gh}$;

Geschwindigkeit in B: $v_B = \sqrt{5gr - 2gr} = \sqrt{3gr}; \Rightarrow F_{R_B} = 3mg$;

Geschwindigkeit in C: $v_C = \sqrt{5gr - 0} = \sqrt{5gr}; \Rightarrow F_{R_C} = 5mg$;

Kurvenfahrt

F: Kraft der Straße auf das Auto (Gegenkraft der Normalkraft)

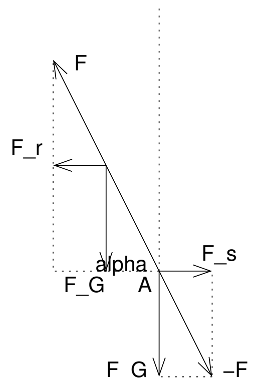
Bei idealer Kuvenüberhöhung liefert $\vec{F} + \vec{G}$ eine Kraft zum Mittelpunkt der Kreisbahn:
$\vec{F}_r = \vec{F} + \vec{G}$;

Bei idealer Kurvenüberhöhung gilt:

$\tan\alpha = \dfrac{F_r}{G} = \dfrac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \dfrac{v^2}{rg}$; (unabhängig von m)

$\Rightarrow v = \sqrt{rg \cdot \tan\alpha}$ ist die optimale Geschwindigkeit für die Kurve.

Radler in der Kurve (ohne Überhöhung)



- Neigung nach innen um α
- $\vec{F}_r$: Zentripetalkraft
- $\vec{F}_s$: Seitliche Kraft
- A: Auflagepunkt

$\vec{F}$ ist die Reactio auf die Kraft des Rades im Auflagepunkt A. Ihre **Vertikalkomponente** hält F_G das Gleichgewicht.

Die **Horizontalkomponente** von $\vec{F}$ ist $\vec{F}_r$. Sie hat keine ersichtliche Gegenkraft[1] und dient als Zentripetalkraft.

[1]Die Gegenkraft ist die Trägheit der Masse.

Für den Neigungswinkel α gilt:
$\tan\alpha = \frac{F_r}{F_g} = \frac{v^2}{rg}$;

In A: F_s muss von der Haftung zwischen Reifen und Fahrbahn aufgebracht werden. Haftkraft $F_H \geq F_s = F_r$;

Wegen $F_H = \mu \cdot F_s$ folgt für die Haftreibungszahl:
$\mu \cdot F_G \geq F_r; \Rightarrow \mu \geq \frac{F_r}{F_G} = \tan\alpha$;

Also sichere Kurvenfahrt, solange $\mu > \tan\alpha$;

Zwei Probleme

- Wie beeinflusst die Erdrotation die Gewichtskraft der Körper auf der Erdoberfläche (am Äquator, in Augsburg (48° n.Br.)) prozentual?

  $$F_r(\alpha) = m\frac{v^2}{r} = m\frac{v^2}{r\cos\alpha};$$

  $$F_e(\alpha) = mg - F_R(\alpha) = m\left[g - \frac{v^2}{r\cos\alpha}\right];$$

  $$\frac{F_e(\alpha)}{mg} = 1 - \frac{v^2}{rg\cos\alpha} = 1 - \frac{4\pi^2r^2}{rgT\cos\alpha} = 1 - \frac{4\pi^2 r}{Tg\cos\alpha};$$

  $\Rightarrow$ Bei 0°: ca. 0,00343%
  $\Rightarrow$ Bei 48°: ca. 0,00513%

- Jeder Massenpunkt der Erdkugel, der nicht auf der Erdachse liegt, erfährt eine Zentrifugalkraft $F_{fl} = m\omega^2 R_E \cos\varphi$. Sie ist senkrecht zur Erdachse gerichtet. F_{fl} kann in zwei Komponenten zerlegt werden:

  - Die senkrecht zur Erdoberfläche gerichtete **Radialkomponente** F_{rad} – Sie bewirkt. . .
  - Eine tangential zur Erdoberfläche (längs der Meridiane) verlaufende, zum Äquator gerichtete **Tangentialkomponente** F_{tang}. Sie hat die Abplattung der Erde mit dem Wülsten am Äquator verursacht. (Die feste Erdkruste „schwimmt“ auf einem flüssigen Kern!)