(no title)

Ingo Blechschmidt

13. Juni 2005

Inhaltsverzeichnis

0.1 Tests 1
0.1.1 1. Extemporale aus der Mathematik 1
0.1.2 Formelsammlung zur 1. Schulaufgabe 2
0.1.3 Formelsammlung zur 2. Schulaufgabe 4

0.1 Tests

0.1.1 1. Extemporale aus der Mathematik

Geschrieben am 12.10.2004.

Ein Wagen hat zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit $v_0 = 4{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Er wird zunächst $4{,}0\mathrm{s}$ lang mit $a_1 = 0{,}60\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beschleunigt, anschließend erfolgt eine ebenfalls $4{,}0\mathrm{s}$ lange Abbremsung mit $a_2 = -1{,}6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

a) Berechne die Geschwindigkeit des Wagens nach $4\mathrm{s}$ und nach $8\mathrm{s}$.

$v_1 = v(4\mathrm{s}) = v_0 + a_1t_1 - 4{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0{,}6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4\mathrm{s} = 8{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

$v_2 = v(8\mathrm{s}) = v_1 + a_2t_2 = 7{,}2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 1{,}6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4\mathrm{s} = 0,80\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

b) Welchen Weg x_1 legt der Wagen in den ersten 4 Sekunden, welchen Weg x_{14} **allein in der 4. Sekunde** zurück?

$x_1 = v_0t_1 + \frac{1}{2}a_1t_1^2 = 4{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4\mathrm{s} + 0{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 16\mathrm{s}^2 = 24\mathrm{m}$;

$x(3\mathrm{s}) = v_0 \cdot 3\mathrm{s} + \frac{1}{2}a_1 \cdot (3\mathrm{s})^2 = 4{,}8 \cdot 3\mathrm{m} + 0{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 9\mathrm{s}^2 = 17{,}1m$;

$\Rightarrow x_{14} = x_1 - x(3\mathrm{s}) = 6{,}9m$;

c) Berechne die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ des Wagens für die $8\mathrm{s}$ lange Fahrt.

$x_2 = v_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2}a_2 t_2^2 = 7{,}2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 4\mathrm{s} - 0{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 16\mathrm{s}^2 = 16\mathrm{m};$

$\overline{v} = \frac{x_1+x_2}{t_1+t_2} = \frac{40\mathrm{m}}{8\mathrm{s}} = 5{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

d) Welche Geschwindigkeit hat der Wagen erreicht, wenn er $12\mathrm{m}$ zurückgelegt hat? Wie lange hat er dafür gebraucht?

$v^2 - v_0^2 = 2a_1 x; \Longrightarrow v^2 = 2a_1 x + v_0^2 = 1{,}2\mathrm{s}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 12\mathrm{m} + \left(4{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2; \Longrightarrow v = 6,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \Longrightarrow \Delta t = \frac{\Delta v}{a_1} = \frac{6,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 4{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}60\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 2{,}2\mathrm{s};$

Ansätze stets mit Formeln, Formeln zunächst allgemein auflösen!

0.1.2 Formelsammlung zur 1. Schulaufgabe

Geradlinige Bewegungen ohne Anfangsgeschwindigkeit

Gleichförmige Bewegung	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit
$a(t) = 0;$ $v(t) = \text{const.};$ $x(t) = vt;$	$a(t) = \text{const.};$ $v(t) = at;$ $x(t) = \frac{1}{2}at^2;$ $v^2(x) = 2ax;$	$a(t) = \text{const.};$ $v(t) = at + v_0;$ $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t;$ $v^2(x) - v_0^2 = 2ax;$

- Sonderfall Freier Fall: $a = -g; v_0 = 0;$
- Sonderfall Wurf: $a = -g; v_0 =$ Abwurfgeschwindigkeit;
- Bremsung: $x_{\mathrm{Br}} = -\frac{v_0^2}{2a}; a = -\frac{v_0^2}{2x_{\mathrm{Br}}};$

Grundgleichung der Mechanik

$F = am;$

- $a > 0; \Rightarrow F$ ist in Bewegungsrichtung;
- $a < 0; \Rightarrow F$ wirkt gegen die Bewegungsrichtung;

ATWOODsche Fallmaschine

Seilkraft in einem beliebigen Punkt. . .

...im Gleichgewicht:
$F_S = mg$; (m ist je die gleiche Masse links und rechts.)

...nicht im Gleichgewicht:
$F_S = F_G + F_{\text{Beschl.}}$; ($F_G$ ist die Gewichtskraft der Masse, die an dem Seilzweig, auf dem der ausgewählte Punkt liegt, hängt. $F_{\text{Beschl.}}$ ist die Kraft, die dann zur Beschleunigung führt, $F_{\text{Beschl.}} =$ „Alle Massen“ $\cdot$ Gesamtbeschleunigung;)

Schiefe Ebene

- Hangabtriebskraft: $F_H = mg \sin\alpha$;
- Normalkraft: $F_N = mg \cos\alpha$;
- Reibungskraft: $F_R = \mu F_N = \mu mg \cos\alpha$;

Mechanische Arbeit

Durch Leisten von Arbeit (Variablenname W, Einheit $[W] = 1\text{J} = 1\text{Nm} =! \text{Ws}$;) wird die Energie (Variablenname E, Einheit $[W] = [E]$;) eines Körpers verändert.

Allgemein: Gleiche Kraft- und Bewegungsrichtung
$W = Fs$; $[W] = 1\text{J} = 1\text{Nm} = 1\text{Ws}$;

Allgemein: Winkel der Größe α zwischen den Vektoren
$W = Fs\cos\alpha$;

Lageenergie
$E_{pot} = mgh$;

Federenergie
$E_F = \frac{1}{2}Ds^2$;

Federhärte: $D = \frac{F}{s}$;

Dehnung einer vorgespannten Feder: $W = \frac{1}{2}D\left(s^2 - s_0^2\right)$;

Kinetische Energie
$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$;

0.1.3 Formelsammlung zur 2. Schulaufgabe

Kreisbewegung

- Bogenlänge: $s = \varphi \cdot r;$
- Konstante Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f;$
- Frequenz: $f = \frac{1}{T};$
- Bahngeschwindigkeit: $v = \omega r;$
- Zentripetalkraft: $F = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r;$

Kreisbewegung: Kurvenüberhöhung

- F: Kraft der Straße auf das Auto (Gegenkraft der Normalkraft)
- Bei idealer Kuvenüberhöhung liefert $\vec{F}+\vec{G}$ eine Kraft zum Mittelpunkt der Kreisbahn:
  $\vec{F}_r = \vec{F} + \vec{G};$
- Bei idealer Kurvenüberhöhung gilt:
  $\tan\alpha = \frac{F_r}{G} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg};$ (unabhängig von m)
  Optimale Geschwindigkeit für die Kurve: $v = \sqrt{rg \cdot \tan\alpha};$

Kreisbewegung: Radler in der Kurve

- $\tan\alpha = \frac{F_r}{F_g} = \frac{v^2}{rg};$
- Wegen $F_H = \mu \cdot F_s$ folgt für die Haftreibungszahl:
  $\mu \cdot F_G \geq F_r; \Rightarrow \mu \geq \frac{F_r}{F_G} = \tan\alpha;$
  Also sichere Kurvenfahrt, solange $\mu > \tan\alpha;$

Kepler-Gesetze und Gravitation

- Drittes Kepler-Gesetz: $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = C_\odot$;
- Gravitationsgesetz (M: Masse des Zentralgestirns, m: Masse des umlaufenden Dings): $F_{\mathrm{grav}} = G\frac{mM}{r^2}$;
- $G = \frac{4\pi^2}{C_\odot M_\odot}$;
- Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Entfernung: $v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$;
- Umlaufdauer in Abhängigkeit der Entfernung: $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$;
- Gravitationsfeldstärke: $g = \frac{GM}{r^2}$;
- Hubarbeit im Gravitationsfeld: $W_{\mathrm{H}} = GmM\left(\frac{1}{r_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{E}}}\right)$;

  Hubarbeit „ins Unendliche“: $W_\infty = GmM\frac{1}{r_{\mathrm{A}}}$;
- Erste kosmische Geschwindigkeit: $v_1 = \sqrt{G \cdot \frac{M_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{Erde}}}}$;

  Zweite kosmische Geschwindigkeit: $W_\infty = \frac{1}{2}mv_2^2$;

Mechanische Schwingungen

- Weg: $y(t) = A \cdot \sin\omega t$;
- Geschwindigkeit: $v(t) = \dot{y}(t) = A\omega \cdot \cos\omega t$;
- Beschleunigung: $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{y}(t) = -A\omega^2 \cdot \sin\omega t$;
- Rückstellkraft: $F(t) = ma(t) = -m\omega^2 \cdot y(t)$;
- HOOKsches Gesetz: $F = -Dy$;
- Federhärte: $D = m\omega^2$;
- Schwingungsdauer: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$;
- Harmonische Schwingungen erkennt man an einem linearen Kraftgesetz, die Rückstellkraft ist proportional zur Auslenkung.