Physik

Ingo Blechschmidt

20. Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Physik

1.1 Schulheft

1.1.1 Teilgebiete der Mechanik

Kinematik
Bewegungslehre

Dynamik
Einfluss von Kräften auf Bewegungen

Statik
Gleichgewicht von Kräften und Drehmomenten

Bewegung
Ortsveränderung bezüglich eines Bezugssystems

Bezugssystem
Koordinaten-System, in dem der Bewegungsablauf betrachtet wird

1.1.2 Geradlinige Bewegungen

Die gleichförmige Bewegung

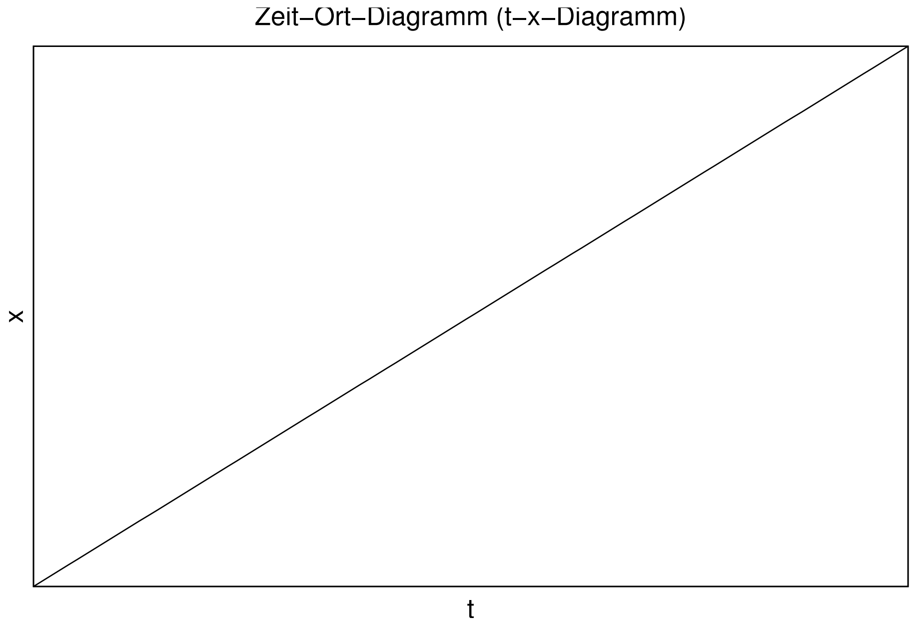
Kennzeichen: In gleichen Zeitabschnitten Δt werden gleiche Wege Δx zurückgelegt.

$$\text{Weg} = x \sim t = \text{Zeit} \Longrightarrow \frac{x}{t} = \text{const.} =: v;$$

Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung ist der konstante Quotient $\frac{x}{t}$.

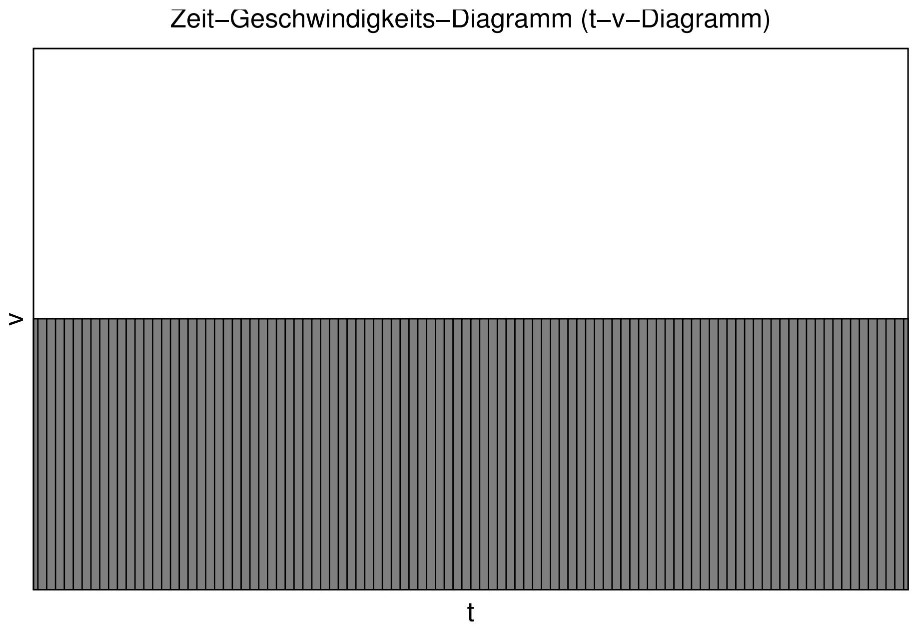
$$v = \frac{x}{t} \text{ und } v = \frac{\Delta x}{\Delta t};$$

Graphische Darstellung: $v = \frac{x}{t}; \Longrightarrow x = v \cdot t$



$v = \frac{\Delta x}{\Delta y}$;

Die Steigung der Ursprungsgeraden ist ein Maß für die Geschwindigkeit.

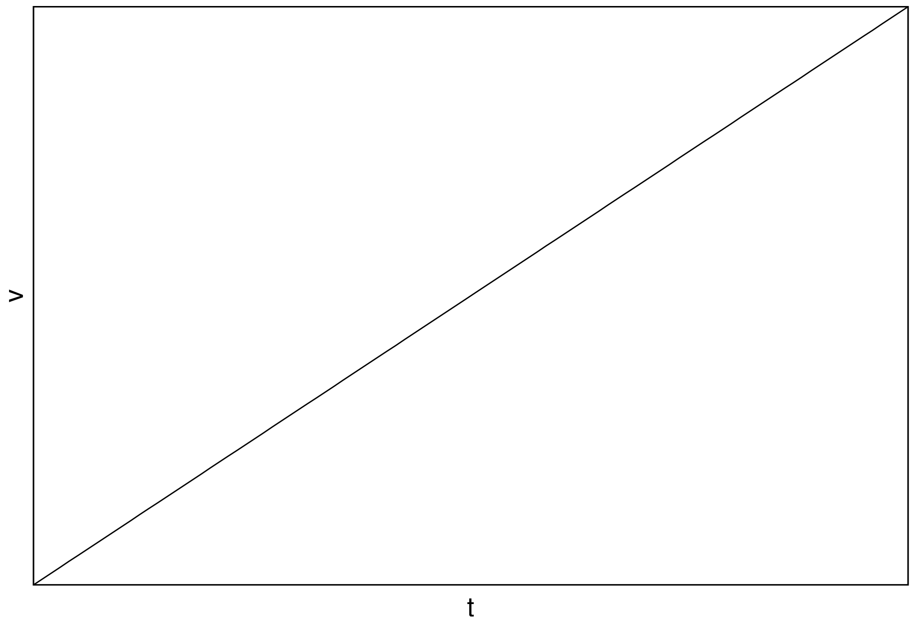


Die Fläche unter dem t-v-Diagramm ist ein Maß für den zurückgelegten Weg x.

Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Kennzeichen: Die Geschwindigkeit ändert sich proportional zur Zeit.

$$v \sim t;$$



Die Geschwindkeit nimmt bei festen Zeitintervallen Δt stets um den selben Betrag zu. $\Rightarrow \Delta v \sim \Delta t;$

Es gilt: $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} = \text{const.};$

Der konstante Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ wird als Beschleunigung a der gleichmäßig beschleunigten Bewegung bezeichnet.

Einheit der Beschleunigung: $1\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$

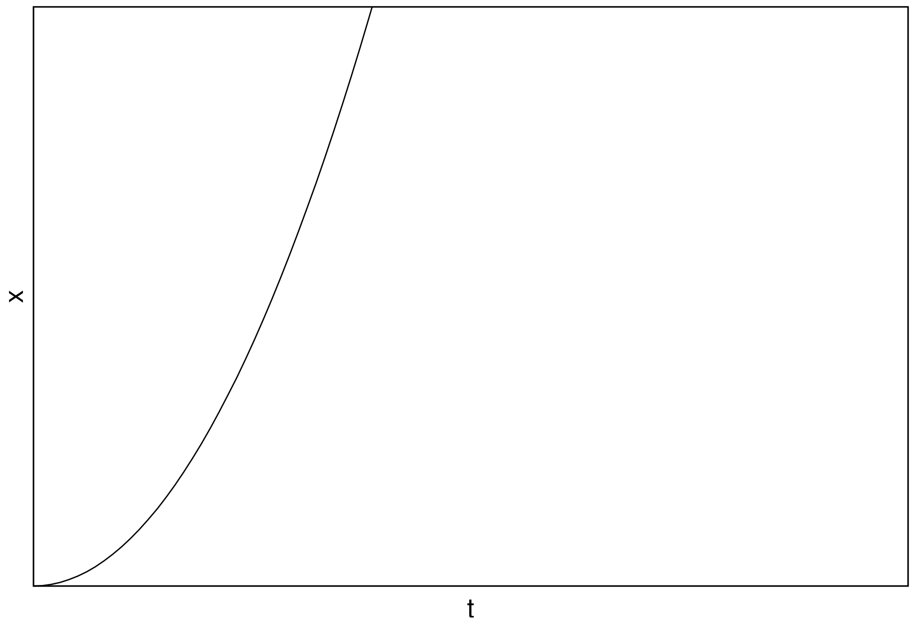
Umrechnung:

- $1\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = \frac{1}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}};$
- $1\frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6\frac{\text{km}}{\text{h}};$

$$\frac{v}{t} = a = \text{const.};$$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $v\,(t) = a{\cdot}t;$ (Geschwindigkeit-Zeit-Funktion)

$s = \overline{v} \cdot t = \frac{v}{2}t = \frac{at}{2}t = \frac{at^2}{2};$
$\Rightarrow x\left(t\right) = \frac{1}{2}a \cdot t^2;$
Weitere Herleitung: Die Fläche $\triangle Otv$ ist ein Maß für die Strecke. $\Rightarrow$ $x\left(t\right) = \frac{1}{2}tv = \frac{1}{2}at^2$; (Dreiecksfläche).



Der Graph ist eine Parabel!

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung	Gleichförmige Bewegung
$a(t) = \text{const.};$ $v(t) = at;$ $x(t) = \frac{1}{2}at^2;$	$a(t) = 0;$ $v(t) = \text{const.};$ $x(t) = vt;$

Zusätzlich: $\left.\begin{array}{l} v^2 = a^2t^2; \Longrightarrow t^2 = \frac{v^2}{a^2}; \\ x = \frac{1}{2}at^2; \end{array}\right\} \Longrightarrow v^2 = 2ax;$

Trägheitssatz von NEWTON:

> Ein Körper behält seinen Bewegungszustand bei, wenn auf ihn keine Kräfte wirken, d.h., er bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig gleichförmig weiter.

Messung:

- $t_1 = 1,4731\text{s}; \ \Delta t_1 = 0,0119\text{s}; \ x_1 = 0,303\text{m};$
- $t_2 = 2,0863\text{s}; \ \Delta t_2 = 0,0083\text{s}; \ x_2 = 0,607\text{m};$
- $t_3 = 2,5552\text{s}; \ \Delta t_2 = 0,0067\text{s}; \ x_3 = 0,906\text{m};$

1. Auswertung nach $a = \frac{v}{t}$:

- $a_1 = \frac{v_1}{t_1} = 0,28\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$
- $a_2 = \frac{v_2}{t_2} = 0,29\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$
- $a_3 = \frac{v_3}{t_3} = 0,29\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$

2. Auswertung nach $a = \frac{2x}{t^2}$:

- $a_1 = \frac{2x_1}{t_1^2} = 0,279\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$
- $a_2 = \frac{2x_2}{t_2^2} = 0,279\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$
- $a_3 = \frac{2x_3}{t_3^2} = 0,278\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$

Geradlinige Bewegungen mit Anfangsgeschwindigkeit

Bewegungsleichungen:

- $v(t) = v_0 + a \cdot t;$
- $x(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2;$
- $v(t)^2 - v_0^2 = 2ax;$

Zum Bremsweg

$v^2 - v_0^2 = 2ax_{Br}; \Longrightarrow x_{Br} = -\frac{v_0^2}{2a}; a = -\frac{v_0^2}{2x};$

Faustregeln aus der Fahrschule

Z: Zahl, die am Tacho abgelesen wird. D.h.: $v_0 = Z\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}};$

Reaktionsweg: Faustregel: $x_R = \frac{Z}{10} \cdot 3\mathrm{m} = 0,3 \cdot Z\mathrm{m};$

„Schrecksekunde“ $t_R = 1\mathrm{s}; \Rightarrow x_R = v \cdot t_R = 0,28 \cdot Z\mathrm{m};$

Bremsweg: $x_{Br} = \left(\frac{Z}{10}\right)^2 \mathrm{m};$

exakt: $x_{Br} = -\frac{v_0^2}{2a};$

Wie groß ist a in der Faustregel? $a = -\frac{v_0^2}{2x_{Br}} \approx -4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

1.1.3 Die Grundgleichung der Mechanik

Wovon hängt die erzielte Beschleunigung ab?

Untersuchung, Teil 1

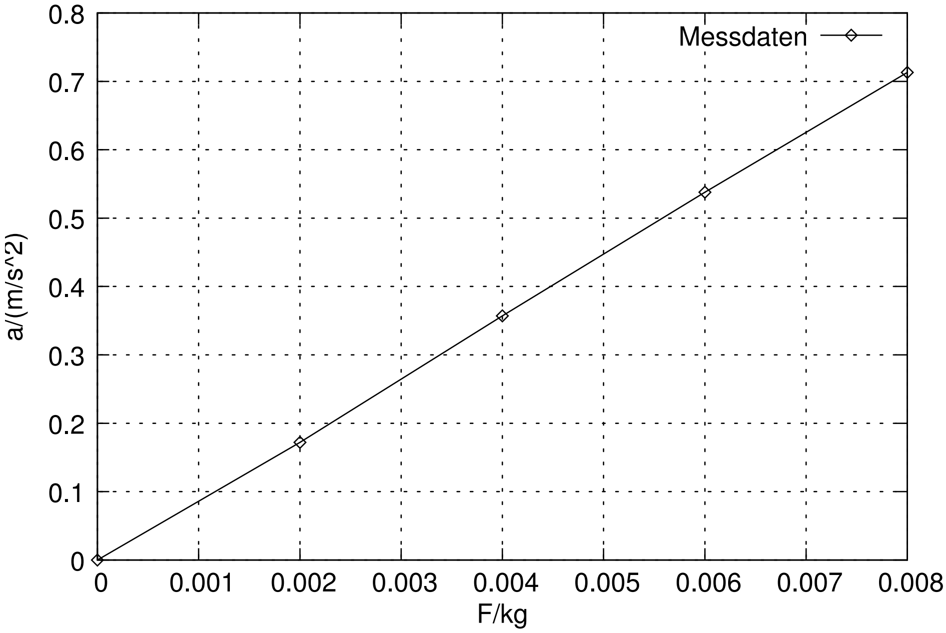
Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung bei konstanter Masse

Wir messen den Weg x vom Start zur Lichtschranke und die benötigte Zeit t. a ergibt sich aus $x = \frac{1}{2}at^2; \Longrightarrow a = \frac{2x}{t^2};$

Messung: $x = 75,0cm;$

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{F}{g \cdot \mathrm{kg}}$	$\frac{a}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$	$\frac{\frac{F}{a}}{\frac{Ns^2}{m}}$
2,95	0,002	0,172	0,114
2,05	0,004	0,357	0,109
1,67	0,006	0,538	0,109
1,45	0,008	0,713	0,110

Diagramm:



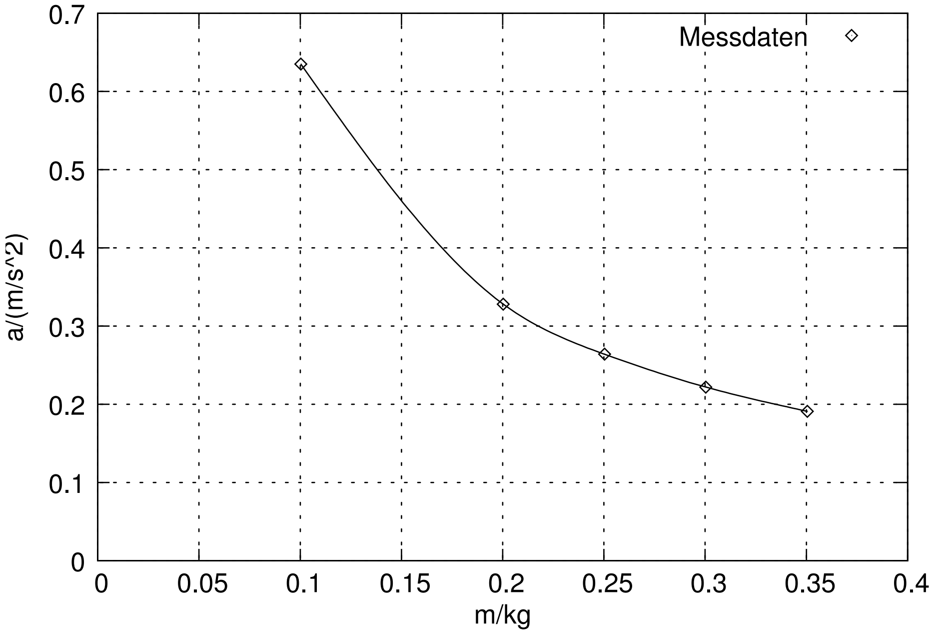
$\Rightarrow$ Ergebnis: $a \sim F$;

Untersuchung, Teil 2

Zusammenhang zwischen Mssage und Beschleunigung bei konstanter Zugkraft

Messung:

$\frac{m}{\mathrm{kg}}$	$\frac{a}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$	$\frac{m \cdot a}{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$	$\frac{k}{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$
0,1003	0,635	0,0637	1,07
0,2003	0,328	0,0657	1,05
0,2503	0,264	0,0661	1,04
0,3003	0,222	0,0667	1,03
0,3503	0,191	0,0664	1,03



$\Rightarrow a \sim \frac{1}{m};$

Zusammenfassung

$$\left.\begin{array}{l} a \sim F; \\ a \sim \frac{1}{m}; \end{array}\right\} \Longrightarrow a \sim \frac{F}{m}; \Longrightarrow$$

$F \sim am; \Longrightarrow$

$F = k\dot{m}a; \Longrightarrow$

$k = \frac{F}{m \cdot a};>$

Im Experiment: $F = 0{,}00700\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0,687\mathrm{N};$

Das Experiment liefert: $k \approx 1{,}05\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}};$

Die Krafteinheit $1\mathrm{N}$ wurde so festgelegt, dass $k = 1$ ist.

$\Rightarrow$ Grundgleichung der Mechanik:

$$F = m \cdot a;$$

Ein Newton ist die Kraft, die einen Körper der Masse $1\mathrm{kg}$ die Beschleunigung $1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ erteilt.

Einheit der Kraft: $1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

Bemerkung:

- $a > 0; \Rightarrow F$ ist in Bewegungsrichtung;
- $a < 0; \Rightarrow F$ wirkt gegen die Bewegungsrichtung;

1.1.4 ATWOODsche Fallmaschine

a) Beschleunigung der Masse ($m = 100\text{g}$, $m_2 = 2{,}0\text{g}$) durch die Gewichtskraft von m_2:

$F_G = m_2 g = 0{,}020\text{N};$

$a = \frac{F_G}{2m_1+m_2} = 0{,}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$

b) Geschwindigkeit nach $t = 2{,}0\text{s}$:

$v = a \cdot t = 0{,}10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2{,}0\text{s} = 0{,}20\frac{\text{m}}{\text{s}};$

Weg nach $t = 2{,}0\text{s}$:

$x = \frac{1}{2}at^2 = 0{,}20\text{m};$

c) Seilkraft im Punkt A:

Gleichgewicht: $F_s = 1 \cdot mg;$

Nicht im Gleichgewicht: $F_s = F_{G_m} + F_{beschl_m};$
$F_{G_m} = m \cdot g;$
$F_{beschl_m} = m \cdot a;$
$a = 0,10\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$

Im Versuch: $m = 50\text{g}; F_G = 0{,}49\text{N}; a = \frac{100\text{g}\cdot g}{150\text{g}} = \frac{mg}{3\cdot m} = \frac{g}{3};$

1.1.5 Freier Fall

Freier Fall: Bewegung eines Körpers nur unter dem Einfluss der Gewichtskraft F_G.

Einheit der Fallbeschleunigung (aka Ortsfaktor): $1\frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{1\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{kg}} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$
Bewegungsgleichungen für den freien Fall:

- $v(t) = -gt;$
- $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2;$

- $v^2(y) = -2gy;$

$\Rightarrow$ Unabhängigkeit der Gleichungen von m; $\Rightarrow$ Bewegung für alle Körper gleich;

Versuch:

a) Feder und Bleistück in luftgefüllter Röhre: Feder fällt aufgrund des Luftwiderstands langsamer.

b) In der evakuierten Röhre fallen Feder und Bleistück gleich schnell.

$\Rightarrow$ Die Fallbeschleunigung ist am gleichen Ort für alle Körper gleich.

Bestimmung der Fallbeschleunigung

Messung: Fallhöhe $h = 1{,}20\mathrm{m}$, Fallzeit $t = 480\mathrm{ms}$

$g = -\frac{2x}{t^2} = 10{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

Präzisionsmessung:

Augsburg
$g = 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

Äquator
$g = 9{,}78\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

Pol
$g = 9{,}83\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

Senkrechter Wurf

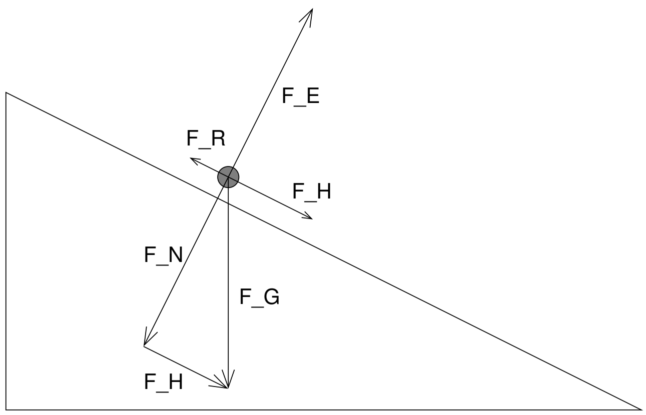
Freier Fall mit Anfangsgeschwindigkeit.

Bewegungsgleichungen:

- $v(t) = -gt + v_0;$
- $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t;$
- $v^2(t) - v_0^2 = -2gy(t);$

Wurf nach unten (oben): $v_0 < 0$; ($v_0 > 0$;)

1.1.6 Bewegungen auf der Schiefen Ebene



Gesamtkraft: $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_H} + \overrightarrow{F_R}$;

$\sin\alpha = \frac{F_H}{F_G} = \frac{F_H}{mg}; \Rightarrow F_H = mg \cdot \sin\alpha;$

$\cos\alpha = \frac{F_N}{F_G} = \frac{F_N}{mg}; \Rightarrow F_N = mg \cdot \cos\alpha;$

$F_R = \mu \cdot F_N = \mu mg \cdot \cos\alpha;$

$F = F_H - F_R = mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right);$

$a = \frac{F}{m} = g \cdot \left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right);$

1.1.7 Mechanische Arbeit

$[W] = [F \cdot s] = \mathrm{J}; \overrightarrow{F} = \text{const.}; \overrightarrow{F} \| \overrightarrow{s};$

Die Kraft F verrichtet die Arbeit W.

Im Allgemeinen sind Kraft und Weg nicht parallel.

Insgesamt: $W = Fs\cos\alpha$; mit $F = \left|\overrightarrow{F}\right|; s = |\overrightarrow{s}|; \alpha = \angle(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{s});$

Arbeit wird von außen verrichtet. $\Rightarrow$ Arbeit W ist die Änderung ΔE der Energie eines Körpers.

$W < 0; \Rightarrow \Delta E < 0; \Leftrightarrow$ Energie des Körpers nimmt ab.

$W > 0; \Rightarrow \Delta E > 0; \Leftrightarrow$ Energie des Körpers nimmt zu.

Kinetische Energie

Ein Körper der Masse m wird aus der Ruhe durch eine Kraft $\overrightarrow{F}$ längs der Strecke Δx auf die Geschwindigkeit v beschleunigt, Beschleunigungsarbeit muss geleistet werden.

$W_B = F\Delta x = ma\Delta x = \frac{1}{2}mv^2;$

$\Rightarrow E_{kin}(v) = \frac{1}{2}mv^2;$

Anfangsgeschwindigkeit v_0: $W_B = \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right);$

$v_0 > v; \Rightarrow W_B < 0;$ (Der Körper verliert kinetische Energie (Bremsung).)

Beispiel: Breimskraft F, $W_R = -Fs$, kinet. Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$, $E_{kin} + W_R = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - Fs = 0; \Rightarrow s = \frac{mv^2}{2F};$

Potentielle Energie

Höhenenergie
: Wird ein Körper der Masse m von der Höhe $y = 0$ auf die Höhe $y = h$ gehoben, so wird die Hubarbeit $W_H = mgh$ verrichtet.

  $W_H = \Delta E_{pot}; E_{pot}(h = 0) = 0; E_{pot} = mgh;$

  Die Hubarbeit W_H hängt **nicht** vom durchlaufenen Weg ab!

  Negative Hubarbeit: Beispiel: Herablassen einer Last: $\overrightarrow{F}$ ist antiparallel zu $\overrightarrow{s}$; $\Rightarrow \alpha = 180°; \cos\alpha = -1; \Rightarrow$ Potentielle Energie wird kleiner.

  Negative potentielle Energie: Körper befindet sich unterhalb des Nullniveaus.

Federenergie
: Eine Feder (der Federhärte D) wird in die Strecke s gedehnt.

  $W = Fs\cos\alpha;$ $\overrightarrow{F}$ ist nicht konstant: $F = Ds;$

  $W_F = \frac{1}{2}Fs = \frac{1}{2}Ds^2;$

  $W_F = \Delta E_F; E_F(s = 0) = 0; E_F = \frac{1}{2}Ds^2;$

  Dehnung einer vorgespannten Feder:
  $W_F = \frac{1}{2}D\left(s^2 - s_0^2\right);$

Energieerhaltungssatz: In einem reibungsfreien, abgeschlossenen System ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie konstant. (Anm. von mir: Falsch, die Summe ist **immer** konstant).

1.1.8 Das 3. NEWTONsche Gesetz (Wechselwirkungsgesetz)

Kraft und Gegenkraft sind entgegengesetzt gerichtet.

3. NEWTONsche Gesetz: Kraft $\vec{F_A}$ und Gegenkraft $\vec{F_B}$ verhalten sich wie $\vec{F_A} = -\vec{F_B}$;

In Worten: „Actio gegengleich reactio“

$\vec{F_A}$ und $\vec{F_B}$ heißen Wechselwirkungskräfte.

1.1.9 Der Impuls

Kugelexperiment:

Verbunden: $E_{\mathrm{ges}} = E_F = \frac{1}{2}Ds^2$;

Gelöst: $E_{\mathrm{ges}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$;

$\frac{1}{2}Ds^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$;

$\Rightarrow$ Eine Gleichung für zwei Unbekannte.

$\Rightarrow$ Energieerhaltung genügt nicht zur Beschreibung der Bewegung.

Betrachte die Kräfte:

3. NEWTONsche Gesetz: $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$;

$\Rightarrow m_1a_1 = -m_2a_2; \Rightarrow m_1\frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = -m_2\frac{\Delta v_2}{\Delta t_2}; \Rightarrow m_1\Delta v_1 = -m_2\Delta v_2; \Rightarrow m_1v_1 = -m_2v_2;$

Beide Gleichungen beschreiben die Bewegung vollständig.

Definition: Unter dem Impuls p verstehen wir das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit $[p] = [m \cdot v] = 1\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}} = 1\mathrm{Ns}$;

$m_1v_1' + m_2v_2' = 0 = p_{\mathrm{ges}}$;

Vor dem Lösen der Verbindung: $v_1 = v_2 = 0; \Rightarrow p_1 = p_2 = 0; \Rightarrow p_{\mathrm{ges}} = p_1 + p_2 = 0;$

1.1.10 Der Impulserhaltungssatz

Ist der Gesamtimpuls eine Erhaltungsgröße?

Betrachte Stoß zwischen Wagen (m_1 und m_2) mit den Anfangsgeschwindigkeiten v_1 und v_2:

$p_{\mathrm{ges}} = p_1 + p_2 = m_1v_1 + m_2v_2$;

Nach dem Stoß:

- $v_1' = v_1 + \Delta v_1;$
- $v_2' = v_2 + \Delta v_2;$

$\Delta v_1, \Delta v_2$: Geschwindigkeitsänderungen beim Stoß.

$p'_{\text{ges}} = p'_1 + p'_2 = m_1 \left(v_1 + \Delta v_1\right) + m_2 \left(v_2 + \Delta v_2\right);$

$m_1 a_1 = -m_2 a_2; \Rightarrow m_1 \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = -m_2 \frac{\Delta v_2}{\Delta t}; \Rightarrow m_1 v_1 = -m_2 v_2;$

$p'_{\text{ges}} = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2;$

$\Rightarrow p'_{\text{ges}} = p_{\text{ges}};$

Impulserhaltungssatz: In einem reibungsfreien, abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls konstant.

$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t};$

1.1.11 Stoßprozesse

Vollkommen unelastischer Stoß

Wie groß ist v'?

Impulserhaltung:

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \left(m_1 + m_2\right) v'; \Rightarrow v' = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2};$

Im Experiment ($m_1 = m_2;\ v_2 = 0;$):
$v' = \frac{m_1 v_1}{2 m_1} = \frac{v_1}{2};$

Energieerhaltung (E_v: Verformungsenergie):
$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E_v + \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2\right) v'^2;$

Im Experiment ($m_1 = m_2 = 0{,}20\text{kg}; v_2 = 0;$):
$E_v = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} 2 m_1 \left(\frac{1}{2} v_1\right)^2 = \frac{1}{4} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} E_{\text{kin}_1} = 30\text{mJ};$

Spezialfälle:

- m_2 sehr groß $\Rightarrow v' \approx v_2;$
- m_1 sehr groß $\Rightarrow v' \approx v_1;$
- $m_1 = m_2; v_1 = -v_2; \Rightarrow v' = 0;$

Elastischer Stoß

Energieerhaltung:
$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v'_2}^2;$

Bekannt: Geschwindigkeiten vor dem Stoß: v_1, v_2

Impulserhaltung:
$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2;$

$$v'_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)\,v_1}{m_1 + m_2};$$

$$v'_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)\,v_2}{m_1 + m_2};$$

1.1.12 Würfe

Waagrechter Wurf

Erklärung: Die Bewegung in x-Richtung und in y-Richtung sind voneinander unabhängig.

Waagrechter Wurf:

- $x(t) = v_{0,x}t;$
- $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2;$

$y(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0,x}}\right)^2 = -\frac{g}{2v_{0,x}^2}\cdot x^2;$ (Bahnkurve)

$\Rightarrow$ Nach unten geöffnete Parabel

Wurfweite: $y_A = -h; \Rightarrow +h = \frac{g}{2v_{0,x}^2}x^2;$

$$\Rightarrow x_A = \sqrt{2\frac{hv_{0,x}^2}{g}} = v_{0,x}\sqrt{2\frac{h}{g}};$$

Beispiel: Sprung von einem Turm mit Anlauf

Bahngeschwindigkeit: $\vec{v}$ ist tangential zur Bahnkurve.

Auftreffwinkel: $\tan\varphi = \frac{|\vec{v}_y|}{|\vec{v}_x|};$

Schiefer Wurf

$v_{0,x} = v_0 \cdot \cos\alpha;$
$v_{0,y} = v_0 \cdot \sin\alpha;$

$x(t) = v_0 t \cdot \cos\alpha; \Rightarrow t = \frac{x(t)}{v_0 \cdot \cos\alpha};$

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \cdot \sin\alpha;$

$\Rightarrow y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha;$

$y(x_A) = 0; \Rightarrow x_A = \frac{2}{g}v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha = \frac{2}{g}v_0^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha;$

Maximal: $2\alpha = \frac{\pi}{2}; \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45°;$

1.1.13 Kreisbewegung

Bogenlänge: $s = \varphi \cdot r;$

Mittlere Geschwindigkeit: $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t};$

Mittlere Winkelgeschwindigkeit: $\overline{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}; \quad [\overline{\omega}] = \frac{1}{\mathrm{s}};$

Konstante Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}; \Rightarrow \omega = \frac{\varphi}{t};$

Umlaufdauer T: $\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad [T] = \mathrm{s};$

Frequenz f: $f = \frac{1}{T}; \quad [f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz};$

$\Rightarrow \omega = 2\pi f;$

Bewegungsgleichungen:

- $x(t) = r \cdot \cos\omega t;$
- $y(t) = r \cdot \sin\omega t;$

Bahngeschwindigkeit: $v = \frac{\varphi r}{t} = \frac{\omega t r}{t} = \omega r;$

Die Bahngeschwindigkeit ist tangential zum Kreis und steht senkrecht zum Ortsvektor $\vec{v}$.

Für die Ablenkung aus der geradlinigen Bahn ist (vgl. Trägheitssatz!) eine Kraft nötig. Bei einer Kreisbahn ist diese Kraft zum Kreismittelpunkt hin gerichtet und heißt **Zentripetalkraft**.

Gleichförmige Bewegung: $|\vec{v}|$ ändert sich nicht.

Symbol für die Zentripetalkraft: $\vec{F}_r$

Nach Newton: $\vec{F}_r = m \cdot \vec{a}_r;$

Bestimmung der Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_r$:

- Richtung von $\vec{a}_r$: radial nach innen
- Betrag von $\vec{a}_r$: $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$: mittlere Beschleunigung im Zeitintervall Δt
  $\Delta t \to 0 \to$ Momentanbeschleunigung
  $\Rightarrow \vec{a}_r = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$;
  [Abb.]
  $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$;
  Wegen ähnlicher Dreiecke folgt: $\dfrac{\Delta v}{v} = \dfrac{\overline{PP'}}{r}$; $\Rightarrow \Delta v = v \cdot \dfrac{\overline{PP'}}{r}$; $\Rightarrow$
  $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v}{\Delta t}\dfrac{\overline{PP'}}{r}$;
  Mit $\Delta t \to 0$ nähert sich $\overline{PP'}$ der Bogenlänge $\Delta s = v \cdot \Delta t$ an.
  $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{v}{\Delta t}\dfrac{\overline{PP'}}{r}$ „=“ $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{v}{r}\dfrac{v\cdot\Delta t}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} = |\vec{a}_r|$;
  Ergebnis: Für den Betrag der Zentripetalbeschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung gilt: $|\vec{a}_r| = a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$;
  Es gilt: $a_r \sim r$;

Folgerung: Für die Zentripetalkraft F_r gilt daher (nach NEWTONs 2. Gesetz): $F_r = m \cdot a_r = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$ mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

[Versuch: Überprüfung unserer deduktiven Herleitung]

Beispiel: Schiffschaukel (vgl. Buch S. 89)

[Abbildung: Kreis, oben A, links B, unten C]

a) In A soll v_A so groß sein, dass ein Gegenstand in der Schaukel nicht herunterfällt (Schwerelosigkeit), d.h. in A wird die Gewichtskraft komplett für die Zentripetalkraft verwendet:

$F_{R_A} = F_G; \Rightarrow m\frac{v_A^2}{r} = mg; \Rightarrow v_A = \sqrt{rg};$

b) Betrag der Geschwindigkeit auf dem Weg von A nach C:

Energieerhaltung $\Rightarrow |\vec{v}|$ nimmt zu.

In C: Nullniveau für E_{pot}

Energiebilanz in der Höhe h: $2mgr + \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_h^2; \Rightarrow v_h = \sqrt{5gr - 2gh}$;

Geschwindigkeit in B: $v_B = \sqrt{5gr - 2gr} = \sqrt{3gr}; \Rightarrow F_{R_B} = 3mg$;

Geschwindigkeit in C: $v_C = \sqrt{5gr - 0} = \sqrt{5gr}; \Rightarrow F_{R_C} = 5mg$;

Kurvenfahrt

F: Kraft der Straße auf das Auto (Gegenkraft der Normalkraft)

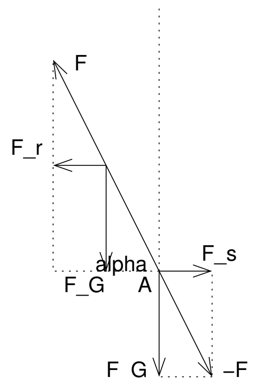
Bei idealer Kuvenüberhöhung liefert $\vec{F} + \vec{G}$ eine Kraft zum Mittelpunkt der Kreisbahn:
$\vec{F}_r = \vec{F} + \vec{G}$;

Bei idealer Kurvenüberhöhung gilt:

$\tan\alpha = \dfrac{F_r}{G} = \dfrac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \dfrac{v^2}{rg}$; (unabhängig von m)

$\Rightarrow v = \sqrt{rg \cdot \tan\alpha}$ ist die optimale Geschwindigkeit für die Kurve.

Radler in der Kurve (ohne Überhöhung)



- Neigung nach innen um α
- $\vec{F}_r$: Zentripetalkraft
- $\vec{F}_s$: Seitliche Kraft
- A: Auflagepunkt

$\vec{F}$ ist die Reactio auf die Kraft des Rades im Auflagepunkt A. Ihre **Vertikalkomponente** hält F_G das Gleichgewicht.

Die **Horizontalkomponente** von $\vec{F}$ ist $\vec{F}_r$. Sie hat keine ersichtliche Gegenkraft[1] und dient als Zentripetalkraft.

[1]Die Gegenkraft ist die Trägheit der Masse.

Für den Neigungswinkel α gilt:
$\tan\alpha = \frac{F_r}{F_g} = \frac{v^2}{rg}$;

In A: F_s muss von der Haftung zwischen Reifen und Fahrbahn aufgebracht werden. Haftkraft $F_H \geq F_s = F_r$;

Wegen $F_H = \mu \cdot F_s$ folgt für die Haftreibungszahl:
$\mu \cdot F_G \geq F_r; \Rightarrow \mu \geq \frac{F_r}{F_G} = \tan\alpha$;

Also sichere Kurvenfahrt, solange $\mu > \tan\alpha$;

Zwei Probleme

- Wie beeinflusst die Erdrotation die Gewichtskraft der Körper auf der Erdoberfläche (am Äquator, in Augsburg (48° n.Br.)) prozentual?

  $$F_r(\alpha) = m\frac{v^2}{r} = m\frac{v^2}{r\cos\alpha};$$

  $$F_e(\alpha) = mg - F_R(\alpha) = m\left[g - \frac{v^2}{r\cos\alpha}\right];$$

  $$\frac{F_e(\alpha)}{mg} = 1 - \frac{v^2}{rg\cos\alpha} = 1 - \frac{4\pi^2r^2}{rgT\cos\alpha} = 1 - \frac{4\pi^2 r}{Tg\cos\alpha};$$

  $\Rightarrow$ Bei 0°: ca. 0,00343%
  $\Rightarrow$ Bei 48°: ca. 0,00513%

- Jeder Massenpunkt der Erdkugel, der nicht auf der Erdachse liegt, erfährt eine Zentrifugalkraft $F_{fl} = m\omega^2 R_E\cos\varphi$. Sie ist senkrecht zur Erdachse gerichtet. F_{fl} kann in zwei Komponenten zerlegt werden:

  – Die senkrecht zur Erdoberfläche gerichtete **Radialkomponente** F_{rad} – Sie bewirkt...
  – Eine tangential zur Erdoberfläche (längs der Meridiane) verlaufende, zum Äquator gerichtete **Tangentialkomponente** F_{tang}. Sie hat die Abplattung der Erde mit dem Wülsten am Äquator verursacht. (Die feste Erdkruste „schwimmt“ auf einem flüssigen Kern!)

1.1.14 Beschreibung des Sonnensystems

Ptolemäus (ca. 90-160 n.Chr.): „Almagest“

Geozentrisches Weltbild

Kopernikus (1473-1543)

1. Sonne steht im Mittelpunkt, ruht.
2. Fixsterne sind auf einer kugelförmigen, unermesslich großen, Sphäre angebracht, unbeweglich.
3. Planeten und Erde auf Kreisbahnen um die Sonne

[Galilei 1564-1642]

Johannes Kepler (1571-1630)

(Die ersten zwei Gesetze schon 1609, das dritte Gesetz erst 1619.)

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der von der Sonne zum Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz).
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten T zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen a ihrer Bahnellipsen.
   $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}; \Rightarrow \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = C_\odot;$

Mittlere Entfernung Erde-Sonne: $1\text{AE} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\text{m} \approx 150 \cdot 10^6\text{km};$

Satelliten der Erde

In 1000km **Höhe**

Monddaten: $r_{\text{Mond}} = 60{,}3R_{\text{Erde}}; \quad T_{\text{Mond}} = 7{,}48 \cdot 10^{-2}\text{a}; \quad r_{\text{Sat}} = 7370\text{km};$

$\frac{T_{\text{Mond}}^2}{T_{\text{Sat}}^2} = \frac{a_{\text{Mond}}^3}{a_{\text{Sat}}^3}; \Rightarrow T_{\text{Sat}} = \sqrt{T_{\text{Mond}}^2 \cdot \frac{a_{\text{Sat}}^3}{a_{\text{Mond}}^3}} = 1{,}74\text{h};$

Geschwindigkeit: $v_{\text{Sat}} = 2\pi \cdot \frac{r_{\text{Sat}}}{T_{\text{Sat}}} = 26613\frac{\text{km}}{\text{h}} = 266 \cdot 10^2\frac{\text{km}}{\text{h}};$

Höhe eines Synchronsatelliten

$T_{\text{Sat}} = T_{\text{Erde}};$

$$\frac{T_{\text{Mond}}^2}{T_{\text{Sat}}^2} = \frac{a_{\text{Mond}}^3}{a_{\text{Sat}}^3}; \Rightarrow a_{\text{Sat}} = \sqrt[3]{a_{\text{Mond}}^3 \cdot \frac{T_{\text{Sat}}^2}{T_{\text{Mond}}^2}} = 42344\text{km} = 423 \cdot 10^2\text{km};$$

Umlaufdauer in Erdnähe ($a_{\text{Sat}} \approx R_{\text{Erde}}$)

$$\frac{T_{\text{Mond}}^2}{T_{\text{Sat}}^2} = \frac{a_{\text{Mond}}^3}{a_{\text{Sat}}^3}; \Rightarrow T_{\text{Sat}} = \sqrt{T_{\text{Mond}}^2 \cdot \frac{a_{\text{Sat}}^3}{a_{\text{Mond}}^3}} = 84{,}0\text{min};$$

Geschwindigkeit: $v_{\text{Sat}} = 2\pi \cdot \frac{r_{\text{Sat}}}{T_{\text{Sat}}} = 7{,}94\frac{\text{km}}{\text{s}}$; („Erste kosmische Geschwindigkeit“)

Das Gravitationsgesetz von NEWTON

Mondbewegung: Kreisbahn um Erdmittelpunkt, dazu ist eine Zentripetalkraft nötig

Zugehörige Zentripetalbeschleunigung:

$$a_{\text{r}} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T_{\text{Mond}}^2} r = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

Vergleich mit der Fallbeschleunigung auf der Erde:

$$\frac{g}{a_{\text{r}}} = \frac{3600}{1} = \frac{r_{\text{Mond}}^2}{R_{\text{Erde}}^2};$$

D.h., bei 60-facher Entfernung vom Erdmittelpunkt ist die Beschleunigung nur noch der 60^2-te Teil.

$$\Rightarrow a_{\text{r}} \sim \frac{1}{r^2}; \Rightarrow F_{\text{r}} \sim \frac{m}{r^2};$$

Zweiter Teil: Auch für Planetenbahn: Zentripetalkraft nötig

$$F_{\text{r}} = m\omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot mr;$$

Nach KEPLER: $\frac{T^2}{r^3} = C_{\odot}; \Rightarrow T^2 = r^3 \cdot C_{\odot};$

$$\Rightarrow F_{\text{r}} = \frac{4\pi^2}{r^3 \cdot C_{\odot}} \cdot mr = \frac{4\pi^2}{C_{\odot}} \frac{m}{r^2};$$

Also auch hier: $F_{\text{r}} \sim \frac{m}{r^2};$

Folgerung: Alle Körper ziehen sich gegenseitig an. $\Rightarrow$ Kraft ist proportional zu den **Massen**!

$F_\mathrm{r} = \frac{4\pi^2}{C_\odot}\frac{m}{r^2} = \frac{4\pi^2}{C_\odot \cdot M_\odot}\frac{m \cdot M_\odot}{r^2};$

$\Rightarrow F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2};$[2] (1688, NEWTON)

Bestimmung von G durch CAVENDISH 1798:
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}};$

Massenbestimmung

Erdmasse

Gewichtskraft = Gravitationskraft; ⇒

$mg = G \cdot \frac{M_\mathrm{Erde} m}{R_\mathrm{Erde}^2}; \Rightarrow M_\mathrm{Erde} = \frac{R_\mathrm{Erde}^2 g}{G} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\mathrm{kg};$

Erddichte

$\varrho = \frac{M_\mathrm{Erde}}{V_\mathrm{Erde}} = \frac{M_\mathrm{Erde}}{\frac{4}{3}\pi R_\mathrm{Erde}^3} = 5{,}51\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm^3}};$

Satellitenbahnen (Kreis)

Idee: $F_\mathrm{r} = F_\mathrm{Grav}; \Rightarrow \frac{m_\mathrm{Sat} v^2}{r} = G \cdot \frac{m_\mathrm{Sat} M_\mathrm{Erde}}{r^2}; \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{M_\mathrm{Erde}}{r}};$

Umlaufdauer T:
$v = 2\pi\frac{r}{T}; \Rightarrow T = 2\pi\frac{r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_\mathrm{Erde}}};$

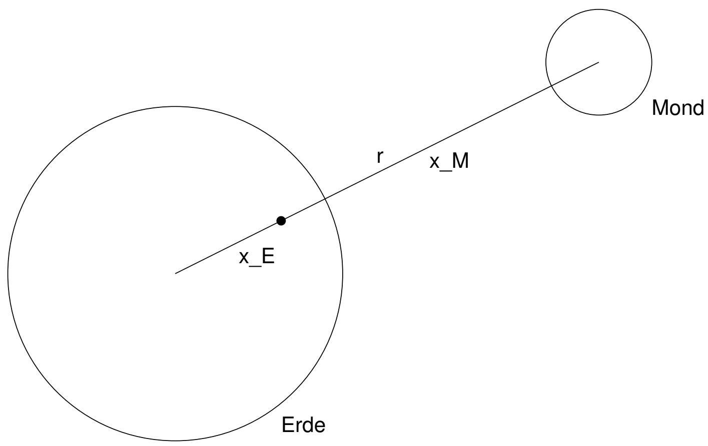
Berechnung der Mondmasse

$F_\mathrm{r} = F_\mathrm{Grav}; \Rightarrow m_\mathrm{Mond}\omega^2 r = G \cdot \frac{m_\mathrm{Mond} \cdot m_\mathrm{Erde}}{r^2};$ (ungeeignet!)

Erde und Mond umlaufen einander!

---

[2] mit $G = \frac{4\pi^2}{C_\odot \cdot M_\odot}$, wobei $C_\odot$ den Faktor $\frac{1}{M_\odot}$ enthält.



$x_{\text{Erde}} + x_{\text{Mond}} = r;$

Zentripetalkräfte der beiden Bewegungen sind gleich (Ursache: Gravitation)

$m_{\text{Erde}}\omega^2 x_{\text{Erde}} = m_{\text{Mond}}\omega^2 x_{\text{Mond}}; \Rightarrow m_{\text{Erde}} x_{\text{Erde}} = m_{\text{Mond}} x_{\text{Mond}};$

$\Rightarrow m_{\text{Erde}} x_{\text{Erde}} = m_{\text{Mond}} \left(r - x_{\text{Erde}}\right);$

Möglichst genaue Werte:

- $r = 3{,}844 \cdot 10^8 \text{m};$
- $T = 27{,}322 \cdot 86400 \text{s};$
- $m_{\text{Erde}} = 5{,}976 \cdot 10^{24} \text{kg};$
- $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kgs}^2};$

Gravitationsgesetz:

$F = G \cdot \frac{m_{\text{Erde}} m_{\text{Mond}}}{r^2} = m_{\text{Mond}}\omega^2 x_{\text{Mond}};$

$\Rightarrow x_{\text{Mond}} = \frac{G}{4\pi^2} m_{\text{Erde}} \frac{T^2}{r^2} = 3{,}8088 \cdot 10^8 \text{m};$

$\Rightarrow x_{\text{Erde}} = r - x_{\text{Mond}} = 3{,}52 \cdot 10^6 \text{m};$

$\Rightarrow m_{\text{Mond}} = m_{\text{Erde}} \frac{x_{\text{Erde}}}{x_{\text{Mond}}} = 5{,}52 \cdot 10^{22} \text{kg};$

(Besserer Wert: $m_{\text{Mond}} = 7{,}35 \cdot 10^{22} \text{kg};$)

Das Gravitationsfeld

Radialsymmetrisches Kraftfeld

$ma = F_{\mathrm{G}} = G\frac{mM}{r^2};$

$\Rightarrow a = \frac{F_{\mathrm{G}}}{m} = \frac{GM}{r^2};$

$\Rightarrow g(r) = \frac{G \cdot M}{r^2};$ (Definition der Gravitationsfeldstärke)

Hubarbeit und potentielle Energie im Gravitationsfeld

Auf der Erde: Hubarbeit $W_{\mathrm{H}} = mgh$ bei größerem h ist g nicht konstant.

$\Rightarrow$ Intergralrechnung liefert:

$W_{\mathrm{H}} = G \cdot mM \left(\frac{1}{r_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{E}}} \right);$ (Hubarbeit im Gravitationsfeld)

Arbeit für den Transport „ins Unendliche“:

$W_{\infty} = \lim_{r_{\mathrm{E}} \to \infty} G \cdot mM \left(\frac{1}{r_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{E}}} \right) = G \cdot mM \cdot \frac{1}{r_{\mathrm{A}}};$

Beispiel: Geschwindigkeit, um einen Körper von der Erdoberfläche ins Weltall abzuschießen (zweite kosmische Geschwindigkeit).

Ansatz: $E_{\mathrm{kin}} = W_{\infty}; \Rightarrow v = \sqrt{2GM_{\mathrm{E}}R_{\mathrm{E}}^{-1}} = 11{,}2\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}};$

1.1.15 Mechanische Schwingungen

Grundgrößen

- Schwingungsdauer T (Periode)
- Frequenz f:

  Quotient aus der Anzahl der Schwingungen n und der dafür benötigten Zeit t

  $f = \frac{n}{t};$

  Speziell für $n = 1$; $\Rightarrow f = \frac{1}{T};$

  Einheit: $1\mathrm{s}^{-1} = 1\mathrm{Hz}$ (HEINZ, err, HERTZ)

- Momentane Auslenkung oder Elongation $y(t)$:
  Zeitabhängig, Abstand des Körpers von der Ruhelage
  Am Gleichgewichtspunkt ist $y = 0$;
- Amplitude A: Maximale Elongation ($A > 0$)
- Die **Rückstellkraft** F ist diejenige Kraft, die auf den ausgelenkten Körper in Richtung der Ruhelage wirkt.

Gleichförmige Kreisbewegung und harmonische Schwingung

Es gilt:

$$\left.\begin{array}{rcl} y(t) & = & A \cdot \varphi; \\ \varphi & = & \omega t; \end{array}\right\} \Rightarrow y(t) = A \cdot \sin \omega t; \Rightarrow y(t) = A \cdot \sin(2\pi \tfrac{t}{T});$$

Die Schattenprojektor der Kreisbewegung führt eine **Sinusschwingung** aus. Man nennt periodische Sinusschwingungen auch **harmonische Schwingungen**.

Eigenschaften harmonischer Schwingungen

- Weg-Zeit-Funktion: $y(t) = A \cdot \sin \omega t;$
- Geschwindigkeit-Zeit-Funktion: $v(t) = \dot{y}(t) = A\omega \cdot \cos \omega t;$
- Beschleunigung-Zeit-Funktion: $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{y}(t) = -A\omega^2 \cdot \sin \omega t;$
  Folgerung: $\ddot{y}(t) = -\omega^2 \cdot y(t);$
  $a(t) = -\omega^2 \cdot y(t); \Rightarrow a(t) \sim y(t)$! (Direkte Proportionalität)

Bei harmonischen Schwingungen ist die Beschleunigung proportional zur Auslenkung.

$a(t) = -\omega^2 \cdot y(t);$

Nach Newton ($F = ma$)

$F(t) = ma(t) = -m\omega^2 \cdot y(t);$ (Rückstellkraft)

Federgesetz (Hooksches Gesetz): $F = -Dy$

$\Rightarrow$ Für Federn gilt: $D = m\omega^2;$

$\omega = \frac{2\pi}{T}; \Rightarrow D = m\frac{4\pi^2}{T^2}; \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}};$ (Schwingungsdauer der Federschwingung)

Harmonische Schwingungen erkennt man an einem linearen Kraftgesetz, die Rückstellkraft ist proportional zur Auslenkung.

[Überprüfung der Formel im Experiment (stimmt T der „Wirklichkeit“ mit dem berechneten Wert überein?)]

[Antwort: Ja, natürlich. »;)«]

Das Fadenpendel

Auslenkung: Bogenstück y

$y = \alpha l;$

$F_\mathrm{R} = F_\mathrm{G} \cdot \sin\alpha = mg \cdot \sin\alpha;$ (Rückstellkraft)

$\sin\alpha = \frac{F_\mathrm{R}}{\mathrm{G}}; \Rightarrow F_\mathrm{R} = mg \cdot \sin\frac{y}{l};$ (Kein lineares Kraftgesetz!)

Aber: Für kleine Auslenkwinkel α gilt $\sin\alpha \approx \alpha$.

$\Rightarrow$ Für kleine α gilt näherungsweise:

$F_\mathrm{R} = mg\frac{y}{l};$ (Lineares Kraftgesetz)

(Spiralfeder: $F_\mathrm{R} = Dy;$)

$F_\mathrm{R} = kg$ mit $k = \frac{mg}{l}$ mit $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}};$

$\Rightarrow$ Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$

1.1.16 Wellenlehre

Grundbegriffe der Wellenlehre

[Graphik]

- Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle: $c = \frac{\Delta x}{\Delta t};$
- [Noch bessere, ausgeteilte Grafik]
  $y(t)$: Auslenkung des Massenpunktes (zur Zeit t)
- x: Ort (Ruhelage) des Massenpunktes
- $f = \frac{1}{T}$: Frequenz der Schwingung des Massenpunktes
- $c = \frac{\lambda}{T}$: Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle
  $c = \lambda \cdot f$ (Grundgleichung der Wellenausbreitung!)
  (c heißt auch **Phasengeschwindigkeit**.)

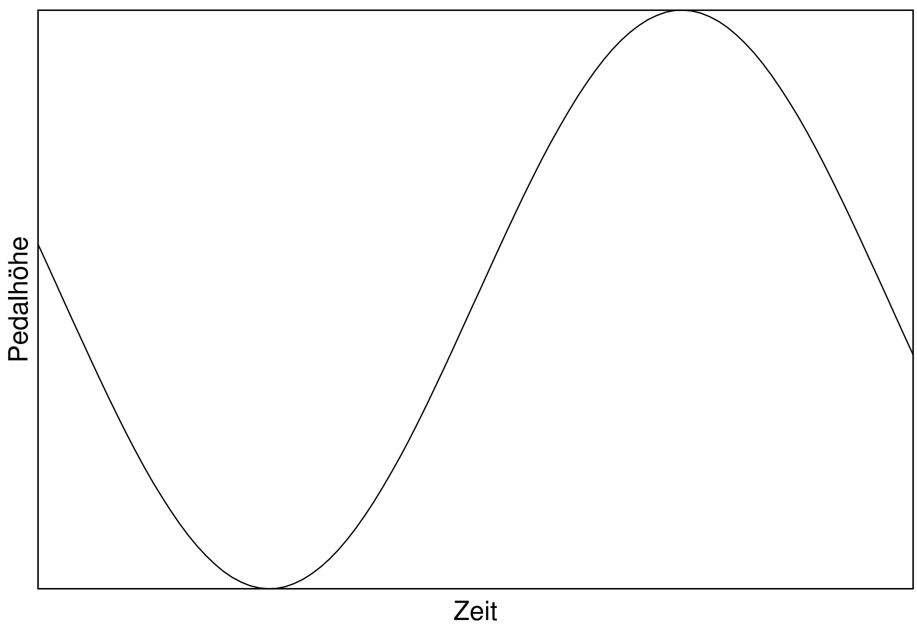
Beschreibung der fortschreitenden Welle
Annahme: Der Erreger am Anfang führt eine Sinusschwingung aus.
Erreger: $y(t) = A \sin \omega t;$
Nach der Zeit t_1 erreicht die Störung die Stelle x_1.
Dabei gilt: $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{x_1}{t_1}; \Rightarrow t_1 = \frac{x_1}{c} = \frac{Tx_1}{\lambda};$
$\Rightarrow$ Ein Masseteilchen im Abstand x_1 vom Erreger schwingt somit mit $y(x_1, t) = A \sin \omega \left(t - t_1\right) = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{Tx_1}{\lambda}\right);$
$\Rightarrow$ Wellengleichung: $y(x,t) = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{T}{\lambda} x\right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right);$
(T: Zeitliche Periode, λ: räumliche Periode)

1.2 Hausaufgaben

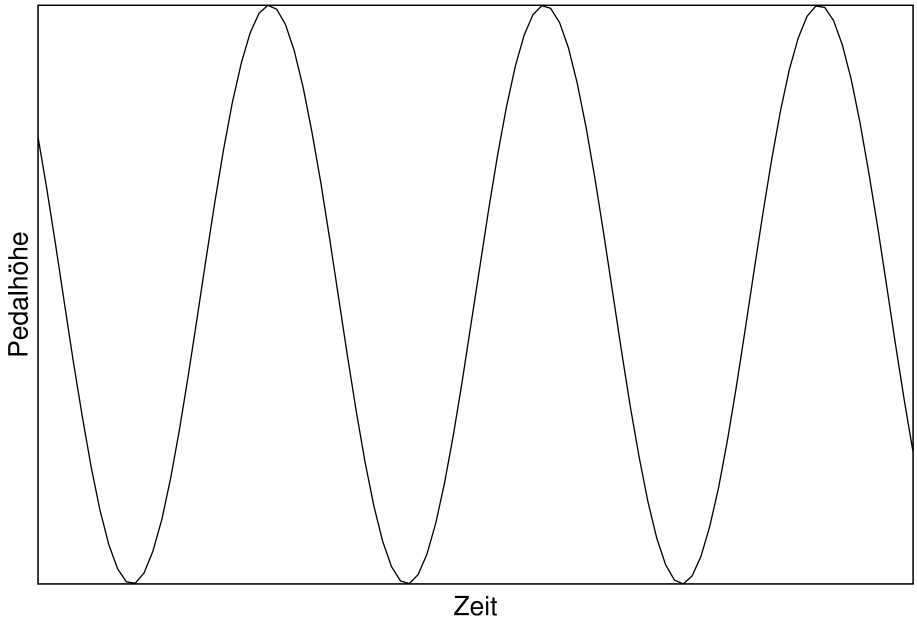
1.2.1 1. Hausaufgabe

„Pedalbewegung“, Bezugssystem:

- Straßenrand: Zusätzlich zur kreisförmigen Pedalbewegung kommt die Bewegung des Fahrrads hinzu. Bei gleichbleibender Pedal- und Fahrradbewegung beschreibt der Graph der Ortsfunktion der Pedale in Abhängigkeit der Zeit eine Sinus-Kurve.



- Auf dem Fahrrad: Die Pedale bewegen sich nur kreisförmig, eindimensional betrachtet also nur auf einer Linie.



- Pedale selbst: Es findet keine Bewegung statt.

1.2.2 2. Hausaufgabe

Buch Seite 9, Aufgabe 1

Welchen Weg legt eine Radfahrerin in $t = 2,0min$ zurück, wenn sie eine konstante Geschwindigkeit von $v = 15kmh^-1$ hat? In welcher Zeit legt sie $x = 2,5km$ zurück?

$s = v \cdot t = 16kmh^-1 \cdot 2,0min = 27 \cdot 10^1 \cdot 2,0 \cdot mmin^-1min = 54mmin^-1;$

$t = \frac{x}{v} = \frac{2{,}5km}{15kmh^-1} = 10min;$

Buch Seite 9, Aufgabe 2

Eine Strecke von $s = 300km$ soll mit einem Wagen zurückgelegt werden. Vergleichen Sie die dazu benötigte Zeit, wenn

a) die Geschwindigkeit immer $v = 75\frac{km}{h}$ beträgt.

$t = \frac{s}{v} = \frac{300km}{75\frac{km}{h}} = 4,0h;$

b) eine Hälfte des Weges mit $v_1 = 50\frac{km}{h}$, die andere mit $v_2 = 100\frac{km}{h}$ zurückgelegt wird.

$t = \frac{s}{2 \cdot v_1} + \frac{s}{2 \cdot v_2} = \frac{300km}{2 \cdot 50\frac{km}{h}} + \frac{300km}{2 \cdot 100\frac{km}{h}} = 3,0h + 1,5h = 4,5h;$

c) die Halbe Fahrzeit mit $v_1 = 50\frac{km}{h}$, die andere mit $v_2 = 100\frac{km}{h}$ gefahren wird.

$t = \frac{s}{v} = \frac{300km}{\frac{v_1+v_2}{2}} = 2 \cdot \frac{300km}{50\frac{km}{h} + 100\frac{km}{h}} = 2 \cdot 2,0h = 4,0h;$

1.2.3 3. Hausaufgabe

Buch Seite 10, Aufgabe 5

Die Bewegung eines Körpers kann auch fotographisch registriert werden. Eine der Möglichkeiten dabei ist das Mehrfach-Lichtblitz-Verfahren (**stroboskopisches Verfahren**): Der bewegte Körper wird im dunklen Raum in gleichen bekannten Zeitintervallen von kurzen Lichtblitzen abgestrahlt und bei geöffnetem Verschluss der Kamera fotografiert.

Woran erkennt man, dass die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit erfolgte? Ermitteln Sie diese Geschwindigkeit.

Der Körper legt gleiche Wege in gleichen Zeitabschnitten zurück, also ist seine Geschwindigkeit im Rahmen der Messungenauigkeit konstant.

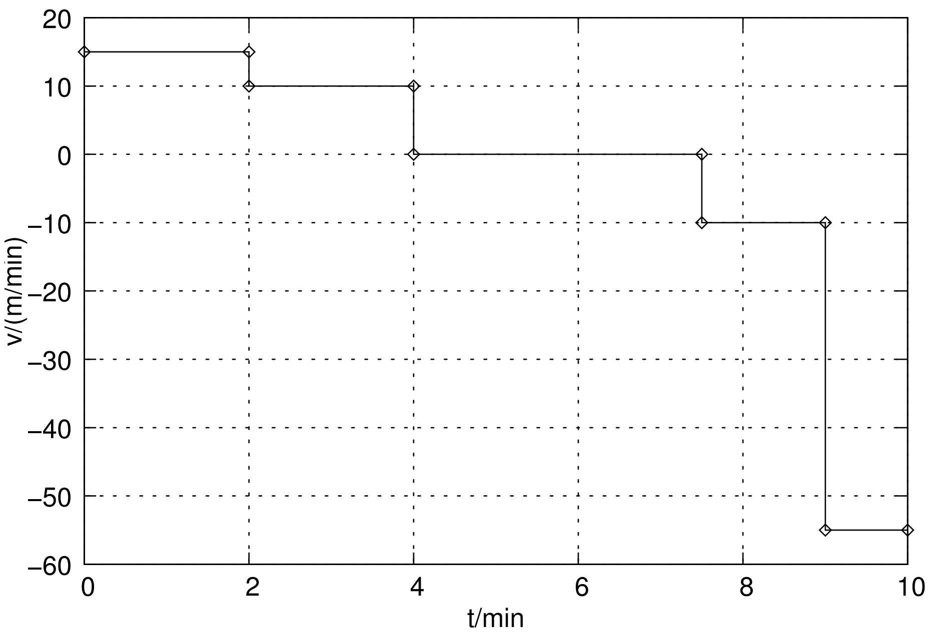
$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1{,}3\text{cm}\cdot 5}{0{,}10\text{s}} = 65\frac{\text{cm}}{\text{s}};$

1.2.4 4. Hausaufgabe

Buch Seite 10, Aufgabe 6

Abbildung B8 (auf Seite 10) zeigt das t-x-Diagramm einer geradlinigen Bewegung. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten in den einzelnen Intervallen, und zeichnen Sie das zugehörige t-v-Diagramm. Erläutern Sie den Bewegungsablauf.

- $v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30m}{2min} = 15\frac{m}{min};$
- $v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20m}{2min} = 10\frac{m}{min};$
- $v_3 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0m}{3{,}5min} = 0\frac{m}{min} = 0;$
- $v_4 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{15m}{1{,}5min} = -10\frac{m}{min};$
- $v_5 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{55m}{1min} = 55\frac{m}{min};$



1.2.5 5. Hausaufgabe

Buch Seite 15, Aufgabe 1

Eine Lokomotive erhält erhält aus dem Stillstand die konstante Beschleunigung $a = 0,750\mathrm{ms}^{-2}$. Nach welcher Zeit hat sie die Geschwindigkeit $v = 65,0\mathrm{kmh}^{-1}$?

$v = at; \Longrightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{65{,}0}{0{,}750} \frac{\mathrm{kmh}^{-1}}{\mathrm{ms}^{-2}} = 24,1s;$

Buch Seite 15, Aufgabe 2

Der Test eines PKW ergab unter anderem folgende Messwerte:

Der Wagen wurde

a) von 0 auf $80\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in $8,0s$,

b) von 0 auf $100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in $12,3s$

gebracht.

Berechnen Sie die jeweiligen mittleren Beschleunigungen und die zurückgelegten Wege.

$v = at; \Longrightarrow a = \frac{v}{t};$

$x = \frac{a}{2}t^2;$

a) $\Delta v = 80\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}; \Delta t = 8,0s;$

$\Longrightarrow a = \frac{80}{8{,}0} \frac{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{s} = 2,8\frac{m}{s^2};$

$\Longrightarrow x = \frac{2{,}8}{2} 8,0^2 \frac{ms^2}{s^2} = 89m;$

b) $\Delta v = 100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}; \Delta t = 12,3s;$

$\Longrightarrow a = \frac{100}{12{,}3} \frac{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{s} = 2,26\frac{m}{s^2};$

$\Longrightarrow x = \frac{2{,}26}{2} 12,3^2 \frac{ms^2}{s^2} = 171m;$

1.2.6 6. Hausaufgabe

Buch Seite 16, Aufgabe 6

Beim Abschuss eines Geschosses tritt eine mittlere Beschleunigung von $a = 4,5 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ auf. Das Geschoss wird auf einem $x = 80\mathrm{cm}$ langen Weg beschleunigt. Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, die das Geschoss nach dieser Beschleunigungsstrecke hat, und die dazu benötigte Zeit.

$v = \sqrt{2ax} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \sqrt{2 \cdot 4,5 \cdot 10^5 \cdot 0,80} = 8,5 \cdot 10^2 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3,1 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}};$

$t = \frac{v}{a} = \mathrm{s} \frac{8,5 \cdot 10^2}{4,5 \cdot 10^5} = 0,0019\mathrm{s} = 19\mathrm{ms};$

Buch Seite 15, Aufgabe 3

Eine U-Bahn fährt mit der konstanten Beschleunigung $a = 0,8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ an. Die Zeitzählung beginnt bei der Ortsmarke Null.

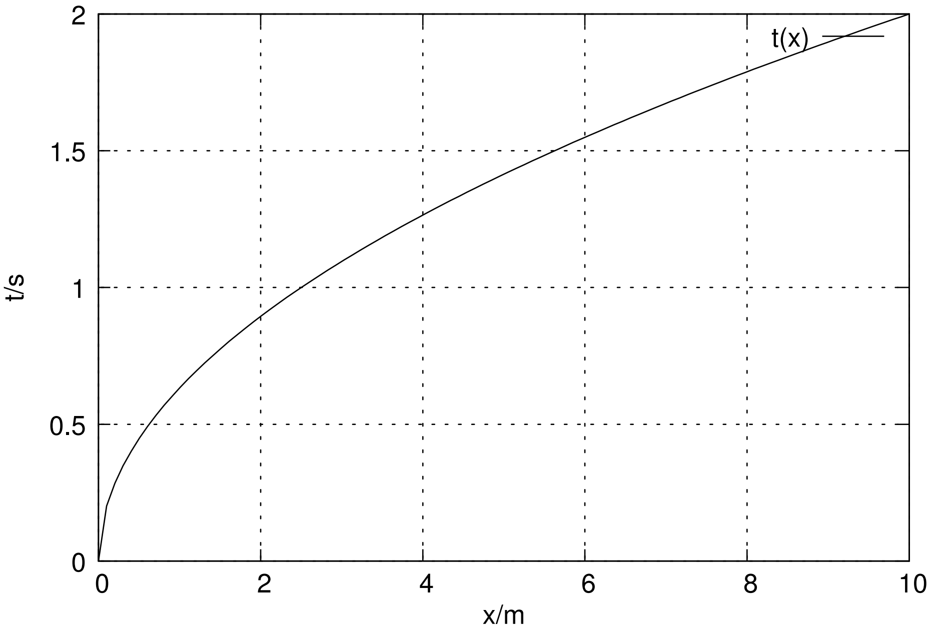
a) Geben Sie die Zeit-Ort-Funktion, die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion und die Zeit-Beschleunigung-Funktion für die Bewegung an.

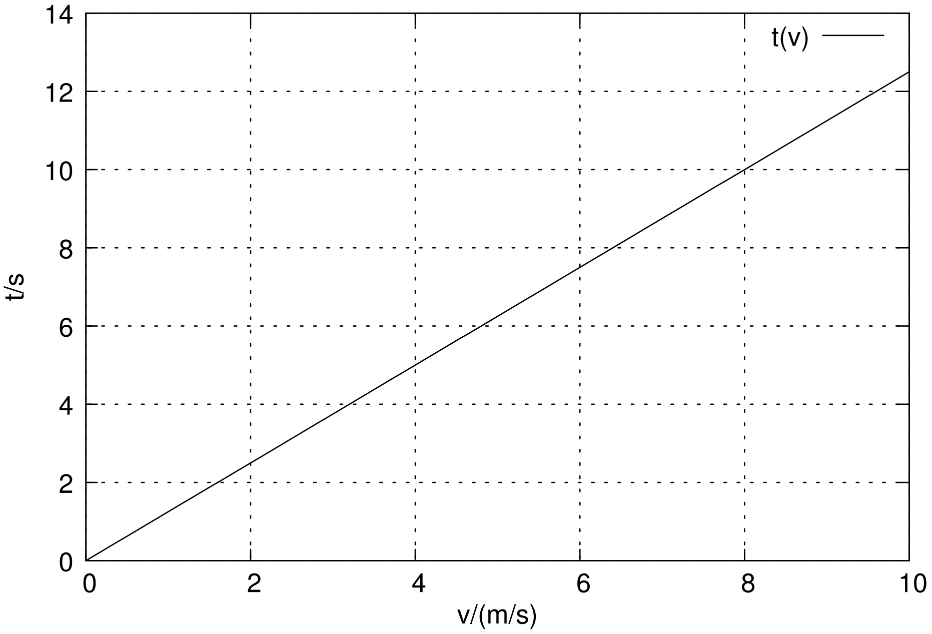
$t(x) = \frac{\sqrt{2ax}}{2};$

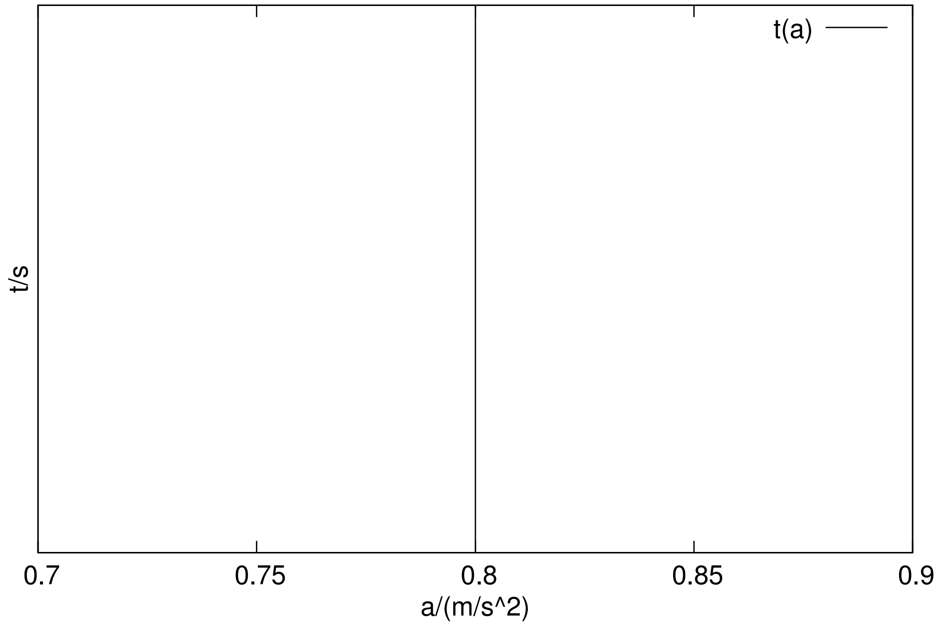
$t(v) = \frac{v}{a};$

$t(a) = \mathrm{undef.};$

a) Zeichnen Sie das t-x-Diagramm, das t-v-Diagramm und das t-a-Diagramm.


t(x)
t/s
x/m
0
0.5
1
1.5
2
0
2
4
6
8
10


t(v)
t/s
v/(m/s)
0
2
4
6
8
10
12
14
0
2
4
6
8
10



1.2.7 7. Hausaufgabe

Buch Seite 15, Aufgabe 5

Ein Zug fährt an. Die Abhängigkeit seiner mittleren Beschleunigung von der Zeit gibt das Diagramm B15.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten, die der Zug nach $20\mathrm{s}$, $60\mathrm{s}$ und $80\mathrm{s}$ hat, und zeichnen Sie das t-v-Diagramm.

$v = a \cdot t;$

$a\,(20\mathrm{s}) = 0,4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}; \Longrightarrow v_1 = 0,4 \cdot 20 \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8,0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

$a\,(60\mathrm{s}) = 0,1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}; \Longrightarrow v_2 = v_1 + 0,1 \cdot 40 \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

$a\,(80\mathrm{s}) = 0,0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}; \Longrightarrow v_3 = v_2 + 0,0 \cdot 20 \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

b) Berechnen Sie mit Hilfe des t-v-Diagramms den zurückgelegten Weg für die gleichen Zeitpunkte, und zeichnen Sie das t-x-Diagramm.

$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2;$

$x_1 = \frac{1}{2}0,4 \cdot 20^2\mathrm{m} = 80\mathrm{m};$

$x_2 = x_1 + 40 \cdot \frac{8+12}{2}\mathrm{m} = 0,48\mathrm{km};$

$x_3 = x_2 + 20 \cdot 12\mathrm{m} = 0,72\mathrm{m};$

1.2.8 8. Hausaufgabe

Buch Seite 21, Aufgabe 3

Ein PKW wird von der Geschwindigkeit $v_1 = 65\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf $v_2 = 5\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ gleichmäßig abgebremst; Er legt dabei eine Strecke von $x = 30\mathrm{m}$ zurück. Berechnen Sie die Bremsdauer.

$$\left.\begin{array}{l} v_2 = v_1 + at; \Longrightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{t}; \\ x = v_1 t + \frac{1}{2}at^2; \Longrightarrow a = 2\frac{x - v_1 t}{t^2}; \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{v_2 - v_1}{t} & = & 2\frac{x - v_1 t}{t^2} & \cdot t \\ v_2 - v_1 & = & 2\frac{x - v_1 t}{t} & \cdot t \\ t\left(v_2 - v_1\right) & = & 2x - 2v_1 t & +2v_1 t \\ t\left(v_2 + v_1\right) & = & 2x & : (\ldots) \\ t & = & \frac{2x}{v_2 + v_1} & \end{array}$$

$\Rightarrow t = 3\mathrm{s};$

1.2.9 9. Hausaufgabe

Buch Seite 19, Aufgabe 2

Für die Bewegung eines Fahrzeugs erhält man das t-v-Diagramm B23 von Seite 19.

a) Berechnen Sie mit dem t-v-Diagramm die Wege, die das Fahrzeug in den Intervallen zurücklegt und berechnen Sie die Gesamtstrecke.

Nach $10\mathrm{s}$

$\Delta t = 10\mathrm{s}; \Delta v = 8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$
$\Longrightarrow \Delta x = \frac{1}{2}\Delta v \Delta t = 4 \cdot 10\mathrm{m};$
$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0,8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

Nach $15\mathrm{s}$

$\Delta t = 5\mathrm{s}; \Delta v = 0;$
$\Longrightarrow \Delta x = 4 \cdot 10\mathrm{m};$
$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0;$

Nach $30\mathrm{s}$

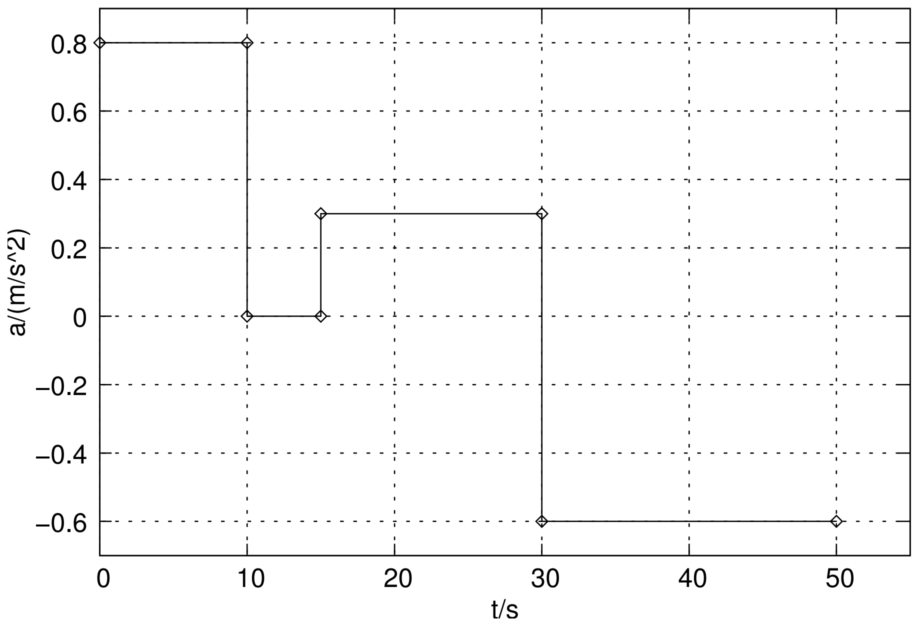
$\Delta t = 15\mathrm{s}; \Delta v = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}; v_0 = 8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$
$\Longrightarrow \Delta x = v\Delta t + \frac{1}{2}\Delta v \Delta t = 2 \cdot 10^2\mathrm{m};$
$a = \frac{v_0 + \Delta v - v_0}{\Delta t} = 0{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

Nach 50s

$\Delta t = 20\text{s}; \Delta v = -12\frac{\text{m}}{\text{s}}; v_0 = 12\frac{\text{m}}{\text{s}};$
$\Longrightarrow \Delta x = \frac{1}{2}\Delta v \Delta t = -12 \cdot 10\text{m};$
$a = \frac{v_0+\Delta v - v_0}{\Delta t} = -0,60\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$

$x = \Sigma\,|\Delta x| = 350\text{m};$

b) Zeichnen Sie das zum gegebenen Diagramm gehörende t-a-Diagramm.



Buch Seite 21, Aufgabe 2 (war nicht Hausaufgabe)

Ein Wagen wird gleichmäßig abgebremst und durchfährt dabei in $t = 20\text{s}$ eine Strecke von $x = 0,46\text{km}$ Länge; Er hat dann die Geschwindigkeit $v_1 = 18\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit und die Beschleunigung mit den Bewegungsgleichungen und über die Trapezfläche im zugehörigen t-v-Diagramm.

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = v_0 + at; \Longrightarrow a = \frac{v_1 - v_0}{t}; \\ x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2; \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

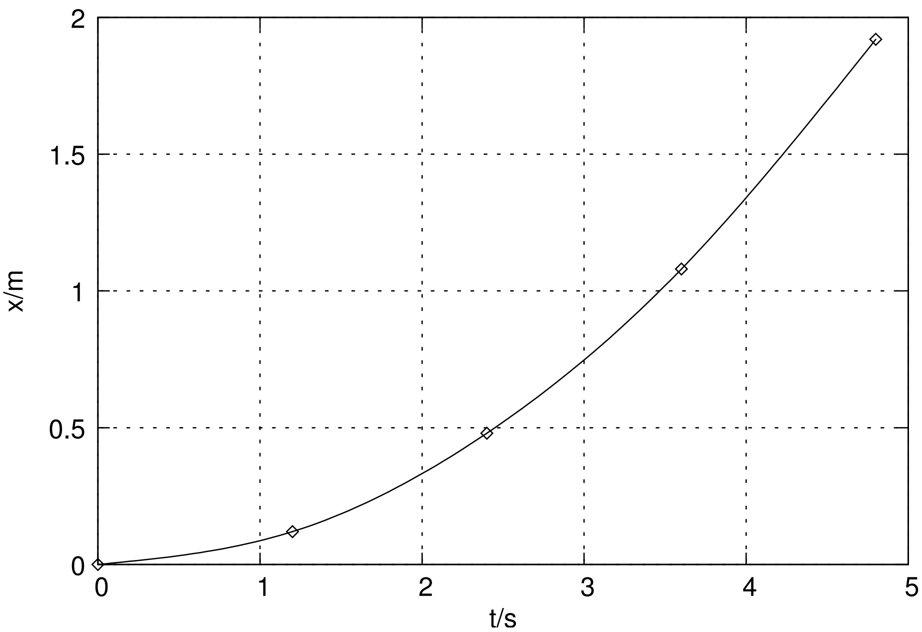
$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}v_1 t - \tfrac{1}{2}v_0 t = \tfrac{1}{2}v_0 t + \tfrac{1}{2}v_1 t;$$
$$\Longrightarrow 2x = v_0 t + v_1 t;$$
$$\Longrightarrow v_0 = \frac{2x - v_1 t}{t};$$

1.2.10 10. Hausaufgabe

Buch Seite 16, Aufgabe 7

Eine Kugel wird ohne Anfangsgeschwindigkeit auf einer geneigten Schiene losgelassen. Die folgende Tabelle gibt die Abhängigkeit der Ortskoordinaten von der Zeit an.

a) Zeichnen Sie das Zeit-Ort-Diagramm.



b) Beweisen Sie rechnerisch, dass es sich bei der Bewegung um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung handelt.

$a = \frac{2x}{t^2}$;

$\frac{x}{\mathrm{m}}$	$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{a}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$
0,12	1,2	0,17
0,48	2,4	0,17
1,08	3,6	0,17
1,92	4,8	0,17

$a = \mathrm{const.}$; $\Rightarrow$ Die Bewegung ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit nach $3{,}0\mathrm{s}$ und $4{,}8\mathrm{s}$.

$v = a \cdot t;$
$\Longrightarrow v_1 = 0,51\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}; \Longrightarrow v_2 = 0,82\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

Nach wie vielen Sekunden vom Start an gerechnet ist die Geschwindigkeit viermal (n-mal) so groß wie $t_1 = 3{,}0\mathrm{s}$ nach dem Start?

$nv_1 = at; \Longrightarrow t = \frac{nv}{a} = n \cdot \frac{v}{a} = n \cdot 3,0\mathrm{s} = 12\mathrm{s};$

Buch Seite 21, Aufgabe 6

Ein Autofahrer fährt mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 54\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf eine ampelgeregelte Straßenkreuzung zu. Als die Ampel von Grün auf Gelb wechselt, schätzt der Autofahrer die Entfernung zur Ampel auf 20 bis 30 Meter. $t = 3{,}0\mathrm{s}$ nach dem Grün-Gelb-Wechsel folgt der Wechsel auf Rot.

a) Würde das Auto noch vor dem Gelb-Rot-Wechsel die Ampel erreichen, wenn es die Geschwindigkeit beibehalten würde und die Entfernungsschätzung des Fahrers richtig wäre?

$t = \frac{x}{v} = \frac{20\mathrm{m}}{54\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = 1{,}3\mathrm{s};$ ⇒ Ja.

b) Nach dem Grün-Gelb-Wechsel beginnt der Fahrer nach einer Reaktionszeit von $t_R = 1{,}0\mathrm{s}$ zu bremsen und kommt gerade beim Gelb-Rot-Wechseln mit dem Wagen vor der Ampel zum Stehen.

Wie groß war dabei die mittlere Verzögerung und die tatsächloche Entfernung des Autos zur Ampel beim beim Grün-Gelb-Wechsel?

$t_{Br} = t - t_R = 2{,}0\mathrm{s};$

$v(t_R) = v + a \cdot t_{Br}; \Longrightarrow a = \frac{v(t_{Br})-v}{t_{Br}} = -\frac{v}{t_{Br}} = -7,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

$x = x_{Br} + v \cdot t_R = -\frac{v^2}{2a} + v \cdot t_R = 30\mathrm{m};$

1.2.11 12. Hausaufgabe

Buch Seite 33, Aufgabe 4

Ein Schispringer (Gesamtmasse $m = 80\mathrm{kg}$) wird beim Anfahren bis zum Schanzentisch in $\Delta t = 5{,}0\mathrm{s}$ von $v_0 = 0$ auf $v_1 = \Delta v = 92\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ beschleunigt. Wie groß ist die mittlere beschleunigende Kraft?

$F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = 80\mathrm{kg}\frac{92\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{5{,}0\mathrm{s}} = 0{,}41\mathrm{kN};$

Buch Seite 33, Aufgabe 8

Ein Fußball (Masse $m = 0{,}5\mathrm{kg}$) fliegt bei einem Elfmeterschuss mit etwa $v = 100\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf das Tor zu (siehe DaAbbildung...).

a) Berechnen Sie die Bremskraft, wenn der Ball dem Torwart direkt auf die Brust trifft und man in diesem Fall für den Bremsweg $x = 10\mathrm{cm}$ ansetzt.

$F = m \cdot -\frac{v^2}{2x} = -2\mathrm{kN};$

b) Wie groß ist die Masse eines Körpers, dessen Gewichtskraft gleich der in a) berechnete Bremskraft ist?

$|F| = gm; \Longrightarrow m = \frac{|F|}{g} = \frac{2\mathrm{kN}}{9{,}81\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}} = 0{,}2\mathrm{t};$

1.2.12 13. Hausaufgabe

Buch Seite 33, Aufgabe 10

Ein Auto fährt mit der Geschwindigkeit $v_0 = -\Delta v = 60\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Der Fahrer muss plötzlich vol bremsen. Nach $x = 18\mathrm{m}$ kommt das Auto zum Stehen.

a) Wie groß ist die mittlere Verzögerung bei dem Bremsvorgang?

$a = \frac{(\Delta v)^2}{2x} = -7{,}7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

b) Wie groß ist die mittlere Bremskraft auf den Fahrer ($m = 75\mathrm{kg}$)? Vergleichen Sie diese Kraft mit der Gewichtskraft F_G des Fahrers.

$F_B = ma = -58 \cdot 10^1\mathrm{N};$

$F_G = mg = 74 \cdot 10^1\mathrm{N};$

Buch Seite 43, Aufgabe 13

Eine B747 (Jumbo) hat die Gesamtmasse $m = 3{,}2 \cdot 10^5\mathrm{kg}$. Die maximale Schubkraft der vier Triebwerke ist insgesamt $F_{max} = 8{,}8 \cdot 10^5\mathrm{N}$. Für den Start wird aus Sicherheitsgründen mit einer Schubkraft von $F_{start} = 8{,}0 \cdot 10^5\mathrm{N}$ gerechnet. Während der Startphase müssen Rollreibungs- und Luftwiderstandskräfte überwunden werden, die im Mittel zusammen $F_{reib} = 2{,}5 \cdot 10^5\mathrm{N}$ betragen. Der Jumbo beginnt zu fliegen, wenn er die Geschwindigkeit $v = 300\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ erreicht hat.

a) Wie lange dauert der Start?

$F_{start} - F_{reib} = a \cdot m; \Longrightarrow a = \frac{F_{start} - F_{reib}}{m} = 1{,}7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

$v = a \cdot t; \Longrightarrow t = \frac{v}{a} = 48\mathrm{s};$

b) Wie lang muss die Startbahn mindestens sein?

$x = \frac{1}{2}at^2 = 2{,}0\mathrm{km};$

c) Aus Sicherheitsgründen sind die Startbahnen etwa $x = 3{,}0\mathrm{km}$ lang. Welche Schubkraft F reicht bei dieser Startbahnlänge aus? Würde der Start noch gelingen, wenn eines der vier Triebwerke ausfällt?

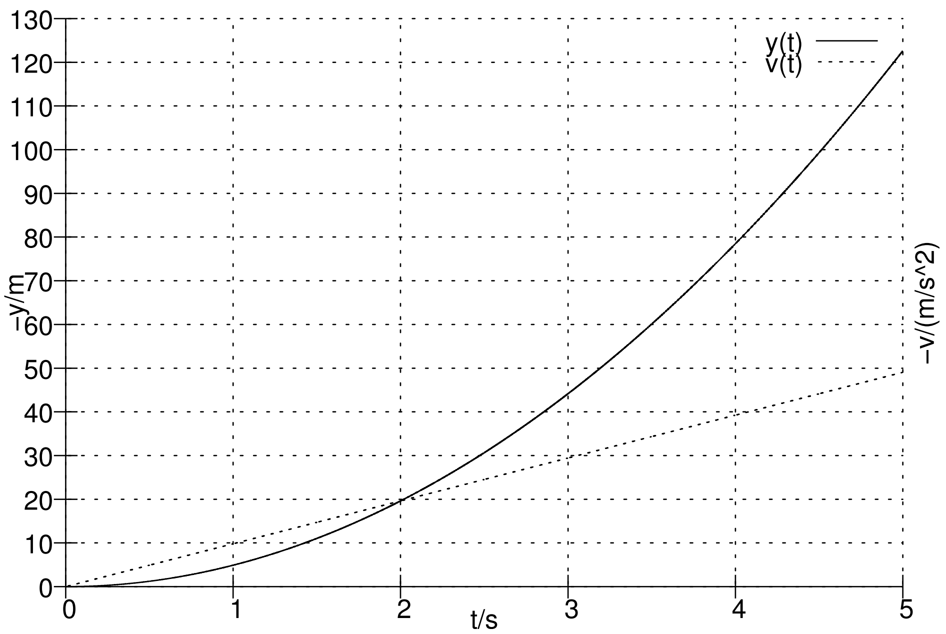
$F = m\frac{v^2}{2x} + F_{reib} = 6,2 \cdot 10^5\mathrm{N};$

$\frac{3}{4}F_{max} = 6,6 \cdot 10^5\mathrm{N} > F; \Rightarrow$ Ja, es würde reichen.

1.2.13 14. Hausaufgabe

Buch Seite 39, Aufgabe 1

Ein Körper fällt im freien Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit. Welche Höhe durchfällt er in $1\mathrm{s}$, $2\mathrm{s}$, $3\mathrm{s}$, $4\mathrm{s}$, $5\mathrm{s}$? Zeichnen Sie das Zeit-Ort-Diagramm und das Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm.



1.2.14 15. Hausaufgabe

Buch Seite 39, Aufgabe 5

Um die Tiefe eines Brunnenschachtes zu bestimmen, lässt jemand einen Stein in den Schacht fallen und stoppt die Zeit, bis er den Aufprall hört. Berechnen Sie die Tiefe des Schachtes, wenn die gestoppte Zeit $t = 4{,}80\mathrm{s}$ beträgt und

a) die Zeit für den Schall vernachlässigt wird.

$$x_a = \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}9{,}81\left(4{,}80\right)^2\mathrm{m} = 113\mathrm{m};$$

b) die Schallgeschwindigkeit von $v_{schall} = 330\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ berücksichtigt wird.

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}gt_{real}^2; \\ t_{real} = t - \frac{x}{v}; \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}g\left(t^2 - 2t\frac{x}{v} + \frac{x^2}{v^2}\right);$$
$$\Longrightarrow 0 = x^2 \cdot \frac{g}{2v^2} + x \cdot \left(-1 - \frac{gt}{v}\right) + \frac{1}{2}gt^2;$$
$$\Longrightarrow x = \frac{1+\frac{gt}{v} \pm \sqrt{1+2\frac{gt}{v}+\frac{g^2t^2}{v^2}-4\cdot\frac{g}{2v^2}\cdot\frac{1}{2}gt^2}}{2\frac{g}{2v^2}} = \frac{1+g\frac{t}{v}\pm\sqrt{1+2g\frac{t}{v}}}{\frac{g}{v^2}};$$
$$\Longrightarrow x_1 = 25{,}3\mathrm{km}; x_2 = 99{,}0\mathrm{m};$$

1.2.15 16. Hausaufgabe

Buch Seite 41, Aufgabe 2

Ein Stein wird senkrecht nach oben geworfen. Er erreicht nach $2t = 3{,}0\mathrm{s}$ wieder die Abwurfstelle. Wie hoch ist er gestiegen?

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t; \\ 0 = -gt + v_0; \Longrightarrow v_0 = gt; \end{array}\right\} \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + gt^2 = \frac{1}{2}gt^2 = 11\mathrm{m};$$

Buch Seite 41, Aufgabe 4

Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss ein Körper senkrecht in die Höhe geworfen werden, damit er $y = 25\mathrm{m}$ hoch steigt? Wie lange steigt er? Welche Zeit dauert der Fall vom höchsten Punkt bis zum Aufschlagpunkt?

$$v^2 - v_0^2 = -2gy; \Longrightarrow v_0^2 = 2gy; \Longrightarrow |v_0| = \sqrt{2gy} = 22\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$$

$$v = -gt + v_0; \Longrightarrow t = \frac{v_0}{g} = 2{,}3\mathrm{s};$$

Die Zeit, die der Fall vom höchsten Punkt bis zum Aufschlagpunkt dauert, kann nicht angegeben werden, da nicht bekannt ist, auf welcher Höhe sich der Aufschlagpunkt befindet.

1.2.16 17. Hausaufgabe

Buch Seite 43, Aufgabe 2

Ein PKW der Masse $m = 1{,}2\mathrm{t}$ soll auf einer Bergstraße mit $\alpha = \arctan 15\% = 8{,}5°$ Steigung hangaufwärts so anfahren, dass er bei konstanter Beschleunigung nach $-x = 100\mathrm{m}$ die Geschwindigkeit $v = 60\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 17\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ hat.

a) Welche Beschleunigung ist dazu nötig?

$v^2 = 2ax; \Rightarrow a = \frac{v^2}{2x} = -1{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

b) Welche Antriebskraft ist vom Motor aufzubringen, wenn die Reibungszahl $\mu = 0{,}10$ beträgt?

$F = am = F_H + F_R - F_Z; \Rightarrow$
$F_Z = F_H + F_R - am = m\left(g \sin\alpha + g\mu\cos\alpha - a\right) = 4{,}6\mathrm{kN};$

Buch Seite 44, Aufgabe 4

Ein Körper gleitet aus der Ruhe reibungsfrei eine schiefe Ebene der Höhe h hinunter.

Zeigen Sie, dass der Körper die gleiche Geschwindigkeit erreicht wie beim freien Durchfallen der Höhe h.

$|v_1| = \sqrt{2gh};$

$$\left.\begin{array}{l} F_H = a_2 m = mg\sin\alpha; \Rightarrow a_2 = g\sin\alpha; \\ \sin\alpha = \frac{h}{x}; \Rightarrow x = \frac{h}{\sin\alpha}; \\ v_2^2 = 2a_2 x; \end{array}\right\} \Rightarrow |v_2| = \sqrt{2g\sin\alpha\frac{h}{\sin\alpha}} = \sqrt{2gh};$$

$\Rightarrow |v_1| = |v_2|;$

1.2.17 18. Hausaufgabe

Buch Seite 56, Aufgabe 1a

Ein Körper der Masse $m = 50{,}0\mathrm{kg}$ soll $h = 2{,}50\mathrm{m}$ hoch gehoben werden, einmal direkt senkrecht nach oben, das andere Mal über eine Rampe von $l = 5{,}00\mathrm{m}$ Länge (die Reibung soll vernachlässigt werden).

Zeigen Sie, dass in beiden Fällen die gleiche Arbeit notwendig ist und berechnen Sie diese.

$W_1 = mgh = 0{,}123\mathrm{kJ} = Fl = mg\sin\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = mgh = W_2;$

1.2.18 19. Hausaufgabe

Buch Seite 52, Aufgabe 1

Ein Lastauto von $F_G = 40\mathrm{kN}$ Gewichtskraft steht auf horizontaler Straße. Vom Stehen soll es in $t = 30\mathrm{s}$ auf die Geschwindigkeit $v = 54\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gebracht werden. Berechnen Sie die Beschleunigungsarbeit und die mittlere Leistung.

$v = at; \Rightarrow a = \frac{v}{t} = 0{,}50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2};$

$v^2 = 2ax; \Rightarrow x = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2\frac{v}{t}} = \frac{vt}{2} = 0{,}23\mathrm{km};$

$W = Fx = a\frac{F_G}{g}x = \frac{v}{t}\frac{vt}{2}\frac{F}{g} = \frac{Fv^2}{2g} = 0{,}46\mathrm{MJ};$

$P = \frac{W}{t} = \frac{Fv^2}{2gt} = 15\mathrm{kW};$

Buch Seite 52, Aufgabe 2

Welche Arbeit verrichtet eine Lokomotive der Masse $m_1 = 100\mathrm{t}$, die 10 Wagen mit je der Masse $m_2 = 25{,}0\mathrm{t}$ auf einer ebenen, $x = 3{,}75\mathrm{km}$ langen Strecke aus dem Stand bei konstanter Beschleunigung auf die Geschwindigkeit $v = 15{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bringt, wenn eine mittlere Fahrwiderstandskraft von $F_R = 30{,}0\mathrm{kN}$ wirkt?

$W = x\left(F_Z + F_R\right) = x\left[\left(m_1 + 10m_2\right)\frac{v^2}{2x} + F_R\right] = 152\mathrm{MJ};$

1.2.19 20. Hausaufgabe

Buch Seite 54, Aufgabe 1

Eine Schraubenfeder wird aus der entspannten Lage durch eine Kraft von $F = 60\mathrm{N}$ um $s_0 = 80\mathrm{cm} = 0{,}80\mathrm{m}$ gedehnt.

a) Welche Spannarbeit wird dabei verrichtet?

$$\left.\begin{array}{l} D = \frac{F}{s_0}; \\ W_F = \frac{1}{2}Ds_0^2; \end{array}\right\} \Rightarrow W_{F_0} = \frac{1}{2}\frac{F}{s_0}s_0^2 = \frac{Fs_0}{2} = 24\mathrm{J};$$

b) Welche zusätzliche Spannarbeit muss man verrichten, um die Feder weitere $\Delta s = s - s_0 = 40\mathrm{cm} = 0{,}40\mathrm{m}$ zu dehnen?

$W_F = \frac{1}{2}D\left(s^2 - s_0^2\right) = \frac{Fs^2}{2s_0} - \frac{Fs_0^2}{2s_0} = \frac{F}{2}\left(\frac{s^2}{s_0} - s_0\right) = 30\mathrm{J};$

c) Welche potentielle Energie steckt in der Fader nach der Dehnung von b)?

$$E_{pot} = W_{F_0} + W_F = \frac{F}{2}\left(\frac{s^2}{s_0} - s_0 + s_0\right) = \frac{Fs^2}{2s_0} = 54\mathrm{J};$$

Buch Seite 56, Aufgabe 1b

Ein Körper der Masse $m = 50{,}0\mathrm{kg}$ soll $h = 2{,}50\mathrm{m}$ hoch gehoben werden, einmal direkt senkrecht nach oben, das andere Mal über eine Rampe von $x = 5{,}00\mathrm{m}$ Länge (die Reibung soll vernachlässigt werden).

Welche potentielle Energie der Erdanziehung erhält der Körper durch das Heben?

$E_{pot} = mgh = 1{,}23\mathrm{kJ};$

Buch Seite 56, Aufgabe 2

Berechnen Sie die Energie

a) eines Kraftwagens von $m = 1{,}0\mathrm{t}$ Masse bei einer Geschwindigkeit von $v = 50\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 14\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

$E = \frac{1}{2}mv^2 = 96\mathrm{kJ};$

b) von $V = 1{,}0\mathrm{m}^3$ Wasser in einer Höhe von $h = 0{,}20\mathrm{km}$ (Walchenseekraftwerk).

$E = mgh = V\varrho_{\text{Wasser}}gh = Vgh \cdot 1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} = 2{,}0\mathrm{MJ};$

c) von $V = 4{,}0 \cdot 10^3\mathrm{m}^3$ Wasser im Rhein bei Worms, wo die Fließgeschwindigkeit des Wassers $v = 1{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ist.

$E = \frac{1}{2}V\varrho_{\text{Wasser}}v^2 = 2{,}0\mathrm{MJ};$

1.2.20 21. Hausaufgabe

Buch Seite 61, Aufgabe 1

Eine Kugel der Masse $m = 20\mathrm{g}$ läuft auf einer horizontalen Rinne AB mit der konstanten Geschwindigkeit $v_A = 6{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Bei B kommt die Kugel in eine nach oben führende Rinne BC von Halbkreisform mit dem Radius $r = 50\mathrm{cm}$. Die Reibung, der Radius der Kugel und die in der Drehung der Kugel steckende Energie sollen vernachlässigt werden.

a) Mit welcher kinetischen Energie und mit welche Geschwindigkeit verlässt die Kugel bei C die Rinne?

$E_{kin} = \frac{1}{2}mv_A^2 - mg2r = 0{,}16\mathrm{J};$

$E_{kin} = \frac{1}{2}mv_C^2; \Rightarrow v_C = \sqrt{2\frac{E_{kin}}{m}} = 4{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

b) Dieselbe Kugel wird mit $v_0 = 6{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht nach oben geworfen. Welche Geschwindigkeit hat sie in $y = 1{,}0\mathrm{m}$ Höhe? In welcher Höhe kehrt sie um? Welche Fallgeschwindigkeit hat sie in $1{,}0\mathrm{m}$ Höhe erreicht?

$v^2 - v_0^2 = -2gy; \Rightarrow v = \sqrt{-2gy + v_0^2} = 4{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

$-v_0^2 = -2gy; \Rightarrow y = \frac{v_0^2}{2g} = 1{,}8\mathrm{m};$

Buch Seite 61, Aufgabe 3

Ein Eisenbahnzug von $m = 4{,}0 \cdot 10^2\mathrm{t}$ Masse wird gebremst und vermindert auf einer Strecke von $x = 1{,}0\mathrm{km}$ seine Geschwindigkeit von $v_0 = 7{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf $v = 4{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Wie groß war die mittlere Bremskraft und die dem System verlorengegangene mechanische Energie?

$F = am = \frac{v^2 - v_0^2}{2x}m = -6{,}6\mathrm{kN};$

$\Delta E = Fx = \frac{v^2 - v_0^2}{2}m = -6{,}6\mathrm{MJ};$

1.2.21 22. Hausaufgabe

Autostraßen großer Steigung besitzen gelegentlich Bremsstrecken (z.B. der Zirler Berg). Versagen die Bremsen eines abwärtsfahrenden Kraftwagens, so kann der Fahrer auf die Bremsstrecke ausweichen und auf dieser zunächst steil ansteigenden Sandstraße den Wagen zum Halten bringen.

Ein Fahrer lenkt seinen Wagen mit der Geschwindigkeit $v_0 = 80\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf die Bremsstrecke, die unter dem Winkel $\alpha = 17°$ (ca. 30% Steigung) gegen die Waagrechte ansteigt. Nach wieviel Metern, vom Beginn der Bremsstrecke an gerechnet, hält der Wagen, wenn man die Fahrwiderstandskraft mit 19% der Gewichtskraft des Wagens in Rechnung setzt?

$F_R = 19\% \cdot F_G;$
$F = F_R - F_H = -mg\left(\sin\alpha + 19\%\right);$
$Fx = \frac{1}{2}mv_0^2; \Rightarrow x = -\frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + 19\%)} = 51\mathrm{m};$

1.2.22 23. Hausaufgabe

Buch Seite 64, Aufgabe 1

Auf der Luftkissenbahn werden zwei Gleiter mit einem Faden zusammengehalten. Zwischen den Gleitern befindet sich eine zusammengedrückte Feder mit der Spannenergie E_p. Für die Massen der Gleiter gilt: $m_2 = 2m_1$;

Berechnen Sie allgemein die Geschwindigkeiten, mit denen die Gleiter nach dem Durchbrennen des Fadens auseinanderfahren.

$p_1 = -p_2; \Rightarrow m_1 v_1 = -2m_1 v_2; \Rightarrow v_1 = -2v_2;$

$E_{kin_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} E_p; \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{E_p}{m_1}};$

$\Rightarrow v_2 = -2v_1 = -2\sqrt{\frac{E_p}{m_1}};$

1.2.23 24. Hausaufgabe

Buch Seite 66, Aufgabe 1

Ein Fischer mit $m_1 = 70\mathrm{kg}$ Masse springt mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 5{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf einen ruhenden Kahn, der die Masse $m_2 = 100\mathrm{kg}$ hat. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich mit dem Kahn weiter, wenn die Reibung zwischen Kahn und Wasser vernachlässigt werden kann?

$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, v_2; \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 2{,}1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

1.2.24 25. Hausaufgabe

Buch Seite 67, Aufgabe 1

Ein Auto fährt mit $v_0 = 72\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ gegen einen starren Pfeiler und kommt nach $t = 0{,}10\mathrm{s}$ zum Stehen. Welche (mittlere) Kraft wirkt, wenn die Masse des Autos $m = 7{,}0 \cdot 10^2\mathrm{kg}$ ist?

$-\overline{F} = \frac{p}{t} = \frac{m v_0}{t} = 1{,}4 \cdot 10^5\mathrm{N};$

Buch Seite 67, Aufgabe 5

Eine Rakete der Masse $m = 200\mathrm{t}$ soll auf der Erde senkrecht starten.

a) Welche Schubkraft muss auf die Rakete wirken, damit sie gerade von der Erdoberfläche abhebt?

$F = gm = 1{,}96\text{MN};$

b) In einer Sekunde werden Verbrennungsgade der Masse $m_V = 0{,}74\text{t}$ mit der Geschwindigkeit $v_0 = 4{,}0\frac{\text{km}}{\text{s}}$ relativ zur Erde ausgestoßen. Welche mittlere Schubkraft wird dadurch hervorgerufen? Mit welcher mittleren Beschleunigung wird die Rakete gehoben?

$\overline{F} = \frac{p}{1\text{s}} = \frac{m_V v_0}{1\text{s}} = 3{,}0\text{MN};$

$a = \frac{F - F_G}{m} = \frac{m_V v_0 - mg}{m 1\text{s}} = 5{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$

1.2.25 26. Hausaufgabe

Buch Seite 71, Aufgabe 1a

Ein mit der Geschwindigkeit $v_1 = 8{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sich nach rechts bewegender Körper der Masse $m_1 = 4{,}0\text{kg}$ stößt zentral auf einen anderen der Masse $m_2 = 3{,}0\text{kg}$, der sich mit der Geschwindigkeit $v_2 = 5{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ in der gleichen Richtung bewegt.

Wie groß sind die Geschwindigkeiten der Körper nach einem Zusammenstoß bei einem vollkommen unelastischem Stoß?

$p = p'; \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v'; \Rightarrow v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 6{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}};$

Buch Seite 71, Aufgabe 7

a) Berechnen Sie jeweils die Deformationsarbeit, falls die Stöße völlig unelastisch sind.

b) Berechnen Sie für den Aufprall auf die Wand die als konstant vorauszusetzende Verzögerung, die beim Stoß auftritt, wenn die Deformationsstrecke $x = 0{,}50\text{m}$ beträgt. Vergleichen Sie mit der Fallbeschleunigung.

Ein Kraftwagen der Masse $m_1 = 1{,}6\text{t}$ fährt mit $v_1 = 90\frac{\text{km}}{\text{h}} \ldots$

- ...einen vor ihm mit $v_2 = 72\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ fahrenden Wagen der Masse $m_2 = 800\mathrm{kg}$.

  $W_v = \frac{1}{2}\left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2)\, v'^2\right] = \frac{1}{2}\left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2}\right] = 6{,}7 \cdot 10^3\mathrm{J};$

- ...eine feste Wand ($v_2 = 0;$).

  $W_v = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 5{,}0 \cdot 10^3\mathrm{J};$

  $\overline{a} = \frac{\overline{F_v}}{m_1} = \frac{E_v}{x \cdot m_1} = 6{,}3 \cdot 10^2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 64g;$

- ...einen mit $-v_2 = 54\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ entgegenkommenden Wagen der Masse $m_2 = 800\mathrm{kg}$.

  $W_v = \ldots = 4{,}3 \cdot 10^5\mathrm{J};$

- ...einen mit $-v_2 = 72\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ entgegenkommenden LKW der Masse $m_2 = 3{,}6\mathrm{t}$.

  $W_v = \ldots = 1{,}1 \cdot 10^6\mathrm{J};$

1.2.26 27. Hausaufgabe

Buch Seite 71, Aufgabe 8

Ein Junge wirft einen Tennisball mit der Geschwindigkeit $v_1 = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht auf die Rückwand eines Lastwagens, der mit der Geschwindigkeit $v_2 = 18\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 5{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ vorwärts fährt.

a) Welche Geschwindigkeit hat der Ball nach dem Aufprall?

(Eigentl. zu wenig Angaben, aber das sehen wir ja nicht so genau...)

$v_1' = -v_2 = -5{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

b) Wie viel Prozent seiner Energie verliert der Ball beim Stoß? Wo verbleibt diese Energie? (Die Masse des Lastwagens ist sehr viel größer als die des Balles. Also kann die Masse des Balles im Vergleich zu der des Lastwagens Null gesetzt werden.)

(Zu wenig Angaben)

1.2.27 29. Hausaufgabe

Buch Seite 78, Aufgabe 1

Um die Austrittsgeschwindigkeit v_0 des Wassers aus der Wasserleitung zu bestimmen, lässt jemand das Wasser horizontal aus einem Gartenschlauch in $h = 1{,}0\mathrm{m}$ Höhe über dem Boden ausströmen. Das Wasser trifft in $x = 2{,}8\mathrm{m}$ Entfernung auf den Boden.

Berechnen Sie die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers unter der Annahme vernachlässigbaren Luftwiderstandes.

$$x = v_0\sqrt{2\frac{h}{g}}; \Rightarrow v_0 = \frac{xg\sqrt{2\frac{h}{g}}}{2h} = 6{,}2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$$

1.2.28 30. Hausaufgabe

Buch Seite 78, Aufgabe 2

Mit einer horizontalen Geschwindigkeit von $v_x = 80{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ wird ein Geschoss $y = 180\mathrm{m}$ über dem waagrechten Erdboden abgeschossen.

a) Nach welcher Zeit und in welcher waagrecht gerechneten Entfernung kommt es am Boden an?

$y = \frac{1}{2}gt^2; \Rightarrow |t| = \sqrt{\frac{2y}{g}} = 6{,}06\mathrm{s};$

$x = v_0 t = v_0\sqrt{\frac{2y}{g}} = 485\mathrm{m};$

b) Welche Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) hat es im Augenblick des Aufschlags?

$v_y^2 = 2gy; \Rightarrow |v_y| = \sqrt{2gy};$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 99{,}7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x}; \Rightarrow \varphi \approx 36{,}6°;$

1.2.29 31. Hausaufgabe

Buch Seite 79, Aufgabe 3a mit $\alpha = 10°$;

Ein Stein wird von einem $h = 45{,}0\mathrm{m}$ hohen Turm unter einem Winkel von $\alpha = 10°$ abgeschleudert und trifft $l = 60{,}0\mathrm{m}$ vom Fußpunkt des Turmes entfernt auf den Erdboden.

Mit welcher Geschwindigkeit wurde der Stein abgeschleudert?

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = h; \\ y(l) = 0; \\ \text{(Schulheft);} \end{array}\right\} \Rightarrow y(x) = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha + h; \Rightarrow |v_0| = \sqrt{-\frac{gx^2}{\cos^2 \alpha \left(y(x) - x \tan \alpha - h\right)}} =$$

$26\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

1.2.30 32. Hausaufgabe

Buch Seite 85, Aufgabe 1

Ein Rad macht bei konstanter Winkelgeschwindigkeit in $t = 10\mathrm{s}$ $u = 53$ Umdrehungen.

a) Berechnen Sie die Frequenz, die Umlaufdauer und die Winkelgeschwindigkeit.

$T = \frac{t}{u} = 0{,}19\mathrm{s}$;

$f = \frac{1}{T} = 5{,}3\mathrm{Hz}$;

$\omega = 2\pi f = 33\frac{1}{\mathrm{s}}$;

b) Welchen Drehwinkel legt das Rad in $t_1 = 2{,}6\mathrm{s}$ zurück?

$\varphi(t_1) = \omega t_1 = 87$;

Buch Seite 86, Aufgabe 2

Bei einer elektrischen Stoppuhr hat der $r_g = 12\mathrm{cm}$ lange „große“ Zeiger die Umlaufdauer $T_g = 100\mathrm{s}$ und der $r_k = 8{,}0\mathrm{cm}$ „kleine“ Zeiger die Umlaufdauer $T_k = 1{,}0\mathrm{s}$.

a) Wie verhält sich die Winkelgeschwindigkeit des großen Zeigers zu der des kleinen?

$\frac{\omega_g}{\omega_k} = \frac{2\pi T_k}{T_g 2\pi} = 0{,}010$;

b) Wie verhalten sich die Bahngeschwindigkeiten der Zeigerspitzen des großen und kleinen Zeigers zueinander?

$\frac{\omega_g r_g}{\omega_k r_k} = \frac{2\pi r_g T_k}{T_g 2\pi r_k} = \frac{T_k r_g}{T_g r_k} = 0{,}015$;

1.2.31 33. Hausaufgabe

Buch Seite 86, Aufgabe 1

Die Bahn der Erde um die Sonne kann mit guter Näherung als Kreis mit dem Radius $r_u = 1{,}5 \cdot 10^{11}\mathrm{m}$ betrachtet werden. Jeder Punkt der Erde nimmt außerdem an der Rotation der Erde um die eigene Achse teil; Der mittlere Erdradius beträgt $r_e = 6{,}4 \cdot 10^6\mathrm{m}$.

a) Wie groß sind die Winkelgeschwindigkeiten beider Bewegungen?

$\omega_u = \frac{2\pi}{1\mathrm{a}} = 2{,}0 \cdot 10^{-7}\frac{1}{\mathrm{s}}$;
$\omega_e = \frac{2\pi}{1\mathrm{d}} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\frac{1}{\mathrm{s}}$;

b) Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit der Erde?

$v = \omega_u r_u = 30\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$;

c) Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit Münchens (geogr. Breite $48°$) bei der Rotation um die Erdachse?

$v = \omega_e r_e \ldots$;

1.2.32 34. Hausaufgabe

Buch Seite 91, Aufgabe 1

Ein Rad vom Radius $r = 2{,}0\mathrm{cm}$ macht $u = 3000$ Umdrehungen in der Minute. Wie groß ist am Rand des Rades die Zentripetalbeschleunigung? Vergleichen Sie diese Beschleunigung mit der Fallbeschleunigung.

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r u)^2}{(60\mathrm{s})^2 r} = \frac{4\pi^2 r^2 u^2}{60^2 r \mathrm{s}^2} = \frac{1}{900}\pi^2 r u^2 \mathrm{s}^{-2} = 2{,}0\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}^2};$$

1.2.33 35. Hausaufgabe

Buch Seite 91, Aufgabe 2

Der Mensch übersteht höchstens Beschleunigungen der neunfachen Fallbeschleunigung. Wie groß muss der Radius einer horizontal liegenden Kurve mindestens sein, die ein Flugzeug mit der Geschwindigkeit $v = 1{,}5 \cdot 10^3\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ beschreibt?

$a_r = 9g = \frac{v^2}{r}; \Rightarrow r = \frac{v^2}{9g} = 2{,}0\mathrm{km}$;

Buch Seite 91, Aufgabe 3

Ein Körper mit der Masse $m = 1{,}0\mathrm{kg}$ wird an einer $l = 40\mathrm{cm}$ langen Schnur auf einem vertikalen Kreis herumgeschleudert. Welcher Kraft würde durch die Schnur im höchsten und welche im tiefsten Punkt der Bahn auf den Körper ausgeübt, wenn die Bahngeschwindigkeit in diesen Punkten jeweils $v = 2{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ betragen würde?

$F_h = m\frac{v^2}{r} + g = 20\mathrm{N};$

$F_t = m\frac{v^2}{r} - g = 0{,}19\mathrm{N};$

1.2.34 36. Hausaufgabe

Buch Seite 91, Aufgabe 4

Ein Körper der Masse $m = 0{,}47\mathrm{kg}$ hängt an einem $r = 1{,}5\mathrm{m}$ langen Faden. Er wird auf einem horizontalen Kreis immer schneller herumgeschleudert, bis der Faden praktisch waagrecht gespannt ist und schließlich reißt.

a) Bei welcher Frequenz reißt der Faden, wenn er eine Reißfestigkeit von $F_f = 100\mathrm{N}$ hat?

$$F_r = F_f; \Rightarrow m\omega^2 r = 4\pi^2 mrf^2 = F_f; \Rightarrow f = \sqrt{\frac{F_f}{4\pi^2 mr}} = 1{,}9\mathrm{Hz};$$

b) Mit welcher Geschwindigkeit wird der Körper nach dem Reißen des Fadens waagrecht weggeschleudert?

$$F_r = m\frac{v^2}{r}; \Rightarrow v = \sqrt{\frac{r}{m}F_r} = 18\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$$

1.2.35 37. Hausaufgabe

Buch Seite 91, Aufgabe 8

$v^2 = 2gh;$

$\cos\alpha = \frac{r-h}{r}; \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{h}{r}; \Rightarrow h = r\left(1 - \cos\alpha\right);$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha \cdot F_G &= F_R; \\
\cos\alpha \cdot gm &= m\tfrac{v^2}{r}; \\
\cos\alpha \cdot g &= \tfrac{v^2}{r}; \\
\cos\alpha \cdot g &= \tfrac{2gh}{r}; \\
\cos\alpha &= \tfrac{2r(1-\cos\alpha)}{r}; \\
\cos\alpha &= 2 - 2\cos\alpha; \\
\cos\alpha &= \tfrac{2}{3}; \\
\alpha &\approx 48{,}2°;
\end{aligned}$$

1.2.36 38. Hausaufgabe

Buch Seite 95, Aufgabe 2

Ein Kraftwagen der Masse $m = 1{,}2\text{t}$ fährt eine Kurve von $r = 30\text{m}$ Krümmungsradius ohne Kurvenüberhöhung.

a) Wie groß muss die seitliche Haftkraft sein, wenn die Geschwindigkeit $v = 40\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt?

$F_H = F_r = m\frac{v^2}{r} = 4{,}9\text{kN};$

b) Mit welcher Höchstgeschwindigkeit darf der Wagen die Kurven durchfahren, wenn die seitliche Haftkraft maximal halb so groß wie die in a) berechnete ist?

$$\frac{F_H}{2} = m\frac{v^2}{r}; \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F_H r}{2m}} = \sqrt{\frac{mv^2 r}{2mr}} = \sqrt{\frac{v^2}{2}} = 28\tfrac{\text{km}}{\text{h}};$$

1.2.37 39. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

Entfernung Mars-Sonne?

$T_{\text{Mars}} = 1{,}88\text{a};$

$$\frac{T_{\text{Erde}}^2}{a_{\text{Erde}}^3} = \frac{T_{\text{Mars}}^2}{a_{\text{Mars}}^3}; \Rightarrow a_{\text{Mars}} = \sqrt[3]{\frac{T_{\text{Mars}}^2}{T_{\text{Erde}}^2} \cdot a_{\text{Erde}}^3} = 1{,}523\text{AE};$$

1.2.38 40. Hausaufgabe

Buch Seite 103, Aufgabe 5

Kometen sind kleine Himmelskörper von wenigen Kilometern Durchmesser, die die Sonne auf langgestreckten Ellipsenbahnen umlaufen. Dabei wird in Sonnennähe gefrorene Materie an der Oberfläche erhitzt und teilweise abgedampft. So entsteht der weithin sichtbare Kometenschweif.

a) Wieso haben Kometen im Vergleich zu Planeten eine relativ kurze Lebensdauer?

Siehe Aufgabenstellung.

b) Der Halleysche Komet hatte 1986 seinen letzten Periheldurchgang im Abstand von $0{,}6\mathrm{AE}$ zur Sonne. Seine große Bahnhalbachse beträgt $a_{\mathrm{Komet}} = 18{,}0\mathrm{AE}$.

Für welches Jahr erwartet man seinen nächsten Periheldurchgang?

$\frac{T_{\mathrm{Erde}}^2}{a_{\mathrm{Erde}}^3} = \frac{T_{\mathrm{Komet}}^2}{a_{\mathrm{Komet}}^3}; \Rightarrow T_{\mathrm{Komet}} = T_{\mathrm{Erde}} \sqrt{\left(\frac{a_{\mathrm{Komet}}}{a_{\mathrm{Erde}}}\right)^3} = 76{,}4\mathrm{a};$

$\Rightarrow 1986\mathrm{a} + T_{\mathrm{Komet}}\mathrm{Komet} = 2062\mathrm{a} = 2{,}06\mathrm{ka};$

c) Wie ist es zu erklären, dass die spektakuläre Phase seiner Schweifbildung ebenso wie die Möglichkeit, ihn von der Erde aus zu beobachten, nur wenige Wochen dauert, während er sich sehr lange Zeit unbeobachtbar in den äußeren Gefilden des Planetensystems aufhält? Zwischen welchen Planetenbahnen liegt sein Aphel?

Kein Schweif, da zu weit von der Sonne weg.

1.2.39 41. Hausaufgabe

Buch Seite 108, Aufgabe 1

Berechnen Sie die Gravitationskraft zwischen zwei Menschen von jeweils $m = 70\mathrm{kg}$ Masse, deren Schwerpunkte $r = 80\mathrm{cm}$ entfernt sind.

$F = G \cdot \frac{m \cdot m}{r^2} = 0{,}5\mu\mathrm{N};$

Buch Seite 108, Aufgabe 3

Berechnen Sie die Kraft, mit der die Erde den Mond anzieht. Mit welcher Kraft zieht der Mond die Erde an?

$F = F_{\text{Erde}\to\text{Mond}} = F_{\text{Mond}\to\text{Erde}} = G \cdot \frac{m_{\text{Erde}} \cdot m_{\text{Mond}}}{r^2} = 1{,}99 \cdot 10^{20}\text{N};$

1.2.40 42. Hausaufgabe

Buch Seite 110, Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Masse des Jupiters mit den Daten seines Mondes Io: Der mittlere Bahndurchmesser ist $2r = 8{,}43 \cdot 10^5\text{km}$, und die Umlaufzeit beträgt $T_{\text{Io}} = 42{,}5\text{h}$.

$m_{\text{Io}} \frac{v_{\text{Io}}^2}{r} = m_{\text{Io}} \frac{4\pi^2 r}{T_{\text{Io}}^2} = G \cdot \frac{m_{\text{Io}} \cdot m_{\text{Jupiter}}}{r^2}; \Rightarrow$

$m_{\text{Jupiter}} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{r^3}{T_{\text{Io}}^2} = 1{,}89 \cdot 10^{27}\text{kg};$

b) Wie groß ist die mittlere Dichte des Jupiters? Welche Schlüsse lassen sich aus dem Ergebnis über die Beschaffenheit des Planeten ziehen?

$R_{\text{Jupiter}} = 11{,}2 \cdot R_{\text{Erde}};$

$\varrho = \frac{m_{\text{Jupiter}}}{\frac{4}{3}\pi R_{\text{Jupiter}}^3} = 1{,}24 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3};$

1.2.41 43. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

Wie groß wäre die Umlaufzeit des Mondes, wenn er die doppelte Geschwindigkeit hätte? Wie groß ist dann sein Bahnradius?

$v_0 = 2\pi \frac{r_0}{T_0};$

$v = 2v_0 = 4\pi \frac{r_0}{T_0};$

$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_{\text{Erde}}}{r}}; \Rightarrow r = G \cdot \frac{M_{\text{Erde}}}{v^2};$

$4\pi \frac{r_0}{T_0} = 2\pi \frac{r}{T} = G \cdot M_{\text{Erde}} \cdot \frac{T_0^2}{T} \cdot \frac{1}{16\pi \cdot r_0^2};$

$\Rightarrow T = G \cdot M_{\text{Erde}} \cdot \frac{T_0^3}{r_0^3} \cdot \frac{1}{32\pi^2} = 3{,}38\text{d};$

$\Rightarrow r = G \cdot M_{\text{Erde}} \cdot \frac{T_0^2}{r_0^2} \cdot \frac{1}{16\pi^2} = 93{,}7 \cdot 10^6\text{m};$

1.2.42 44. Hausaufgabe

Buch Seite 113, Aufgabe 1

a) Wie groß ist die Fallbeschleunigung in 0km, $3{,}2 \cdot 10^3\text{km}$ und $6{,}4 \cdot 10^3\text{km}$ Höhe über dem Erdboden?

$F = gm; \Rightarrow g = \frac{F}{m} = \frac{G\frac{mM}{r^2}}{m} = G\frac{M}{r^2};$

$\Rightarrow g(0\text{km}) = 1 \cdot 10^1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$
$\Rightarrow g(3{,}2 \cdot 10^3\text{km}) = 4{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$
$\Rightarrow g(6{,}4 \cdot 10^3\text{km}) = 2{,}4\frac{\text{m}}{\text{s}^2};$

b) Welche Geschwindigkeiten müssen Satelliten in den angegebenen Höhen haben, damit sie die Erde auf einer Kreisbahn umlaufen?

$v = \sqrt{G\frac{M}{r^2}};$

$\Rightarrow v(0\text{km}) = 8\frac{\text{km}}{\text{s}};$
$\Rightarrow v(3{,}2 \cdot 10^3\text{km}) = 6{,}5\frac{\text{km}}{\text{s}};$
$\Rightarrow v(6{,}4 \cdot 10^3\text{km}) = 5{,}6\frac{\text{km}}{\text{s}};$

c) Wie groß sind die zugehörigen Umlaufzeiten dieser Satelliten?

$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}};$

$\Rightarrow T(0\text{km}) = 1\text{h};$
$\Rightarrow T(3{,}2 \cdot 10^3\text{km}) = 2{,}6\text{h};$
$\Rightarrow T(6{,}4 \cdot 10^3\text{km}) = 4{,}0\text{h};$

1.2.43 45. Hausaufgabe

Buch Seite 113, Aufgabe 4

Mit dem Hubble Space Telescope (HST) können Fotoaufnahmen ferner Himmelsobjekte in bislang unerreichter Qualität gemacht werden. Das HST umläuft die Erde einmal in $T = 96{,}7\mathrm{min}$ auf einer kreisähnlichen Bahn.

Berechnen Sie die mittlere Flughöhe über der Erdoberfläche und die durchschnittliche Bahngeschwindigkeit.

1.2.44 46. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

Berechne die Energie, die ein Synchronsattelit der Erde beim Abschuss mitbekommen muss, wenn er $m = 1000\mathrm{kg}$ Masse hat.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}; \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}};$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM\sqrt[3]{\frac{G^2M^2T^4}{16\pi^4}}}{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[6]{\frac{4\pi^2}{T^2}G^2M^2};$

$\Rightarrow W = m\left[GM\left(\frac{1}{R} - \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\sqrt[3]{GMT^2}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{T^2}G^2M^2}\right];$

$\Rightarrow W = 5{,}78 \cdot 10^1\mathrm{GJ};$

1.2.45 47. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

Wie hoch muss die Abschussgeschwindigkeit eines Körpers von der Erdoberfläche sein, damit er $r_1 - r_0 = 6370\mathrm{km}$ hoch fliegt?

$G \cdot mM \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{2}mv^2; \Rightarrow v = \sqrt{2GM \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)} = 7{,}89 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

1.2.46 48. Hausaufgabe

Selbstgestellte Aufgabe

Berechne den Schwarzschild-Radius der Erde.

$W_\infty = GmM\frac{1}{R} = \frac{1}{2}mc^2; \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} = 8{,}86\mathrm{mm};$

1.2.47 49. Hausaufgabe

Arbeitsblatt

Bei einem schwingenden Federpendel mit der Federhärte $D = 50\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ beträgt die Amplitude $A = 5{,}0\mathrm{cm}$.

a) Berechne die maximale Rückstellkraft.

$F = DA = 2{,}5\mathrm{N};$

b) Welche potentielle Energie hat das Pendel bei voller Auslenkung?

$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}DA^2 = 63\mathrm{mJ};$

c) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Pendelkörpers beim Durchgang durch die Ruhelage, wenn die schwingende Masse $m = 0{,}50\mathrm{kg}$ beträgt?

$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2; \Rightarrow v = |a|\sqrt{\frac{D}{m}} = 0{,}50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

d) Das Pendel braucht für $n = 10$ Schwingungen $nT = 6{,}3\mathrm{s}$. Wie groß ist die Auslenkung des Pendelkörpers aus der Ruhelage $0{,}25\mathrm{s}$ nach dem Passieren der Ruhelage?

$\omega = \frac{2\pi}{T};$

$y(0{,}25\mathrm{s}) = A \cdot \sin\left(2\pi\frac{0{,}25\mathrm{s}}{T}\right) = 3{,}0\mathrm{cm};$

- Schwingungsdauer?

  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 0{,}63\mathrm{s};$

- Geschwindigkeit nach $0{,}25\mathrm{s}$:

  $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}};$

  $\Rightarrow v(0{,}25\mathrm{s}) = A\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot \cos(0{,}25\mathrm{s}\sqrt{\frac{D}{m}} = -0{,}40\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};$

1.2.48 50. Hausaufgabe

Buch Seite 125, Aufgabe 1

Ein Körper der Masse $m = 50\mathrm{g}$ schwingt harmonisch. In $8T = 10\mathrm{s}$ vollendet er 8 Schwingungen. Die Zeitrechnung möge beginnen, wenn er die Nullage in Richtung der positiven y-Achse passiert. Der Abstand der Umkehrpunkte beträgt $2A = 18\mathrm{cm}$.

a) An welcher Stelle befindet sich der Körper nach $8{,}0\text{s}$?

$$y(8{,}0\text{s}) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}8{,}0\text{s}\right) = 5\text{cm};$$

b) Wie groß sind Geschwindigkeit und Beschleunigung nach $8{,}0\text{s}$? Geben Sie auch die Richtung dieser vektorellien Größen bezüglich der y-Achse an.

$$v(8{,}0\text{s}) = A\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}8{,}0\text{s}\right) = -0{,}4\tfrac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$a(8{,}0\text{s}) = -A\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{T}8{,}0\text{s}\right) = -1\tfrac{\text{m}}{\text{s}};$$

c) Berechnen Sie die Maxima der Beträge von Geschwindigkeit und Beschleunigung.

$$|v_{\text{max}}| = v(0) = A\frac{2\pi}{T}\cos 0 = A\frac{2\pi}{T} = 0{,}5\tfrac{\text{m}}{\text{s}};$$

$$|a_{\text{max}}| = \left|a\left(\frac{T}{4}\right)\right| = -A\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\tfrac{\pi}{2} = 2\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

d) Wann besitzt der Körper maximale Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsbeträge?

$$t_{\text{max.Geschw.}} = \frac{T}{2}k; \quad k\in\mathbb{N}_0;$$

$$t_{\text{max.Beschl.}} = \frac{T}{4}\left(2k+1\right); \quad k\in\mathbb{N}_0;$$

e) Wie groß ist die Rückstellkraft nach $8{,}0\text{s}$?

$$F(8{,}0\text{s}) = ma(8{,}0\text{s}) = -0{,}07\text{N};$$

f) Zu welchen Zeitpunkten ist der Betrag der Rückstellkraft maximal?

$$t_{\text{max.Rückstellkraft.}} = \frac{T}{4}\left(2k+1\right); \quad k\in\mathbb{N}_0;$$

g) Berechen Sie den Betrag der maximalen Rückstellkraft.

$$|F_{\text{max}}| = m\left|a\left(\frac{T}{4}\right)\right| = 0{,}1\text{N};$$

1.2.49 51. Hausaufgabe

Blatt

$l = 1{,}09\text{m}; \alpha_{\max} = 4{,}0°;$

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \ldots = 2{,}1\text{s};$

$A = l\alpha_{\max} = \ldots = 7{,}6\text{cm};$

b) $v_{\max} = A\omega = A\frac{2\pi}{T} = 0{,}23\frac{\text{m}}{\text{s}};$

c) $\alpha = 2{,}0°;$

$y = l\alpha = A \cdot \sin\omega t = l\alpha_{\max}\sin\left[\frac{2\pi}{T}t\right]; \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha_{\max}} = \sin\left[\frac{2\pi}{T}t\right];$

$\Rightarrow \arcsin\left[\frac{\alpha}{\alpha_{\max}}\right] = \frac{2\pi}{T}t; \Rightarrow t = \frac{T}{2\pi}\arcsin\left[\frac{\alpha}{\alpha_{\max}}\right] = \ldots = 0{,}18\text{s};$

d) $v(t) = A\omega \cdot \cos\omega t;$

$v(0{,}18\text{s}) = \ldots = 0{,}20\frac{\text{m}}{\text{s}};$

1.2.50 52. Hausaufgabe

Zettel

Eine harmonische Schwingung $y(t) = A\sin\omega t$ breite sich vom Nullpunkt als transversale Störung längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit $c = 7{,}5 \cdot 10^{-3}\frac{\text{m}}{\text{s}}$ aus. Es sei weiter $A = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\text{m}$ und $\omega = 0{,}50\pi\text{s}^{-1}$.

a) Berechne die Periodendauer T, die Frequenz f und die Wellenlänge λ.

$\omega = \frac{2\pi}{T}; \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 4{,}0\text{s};$

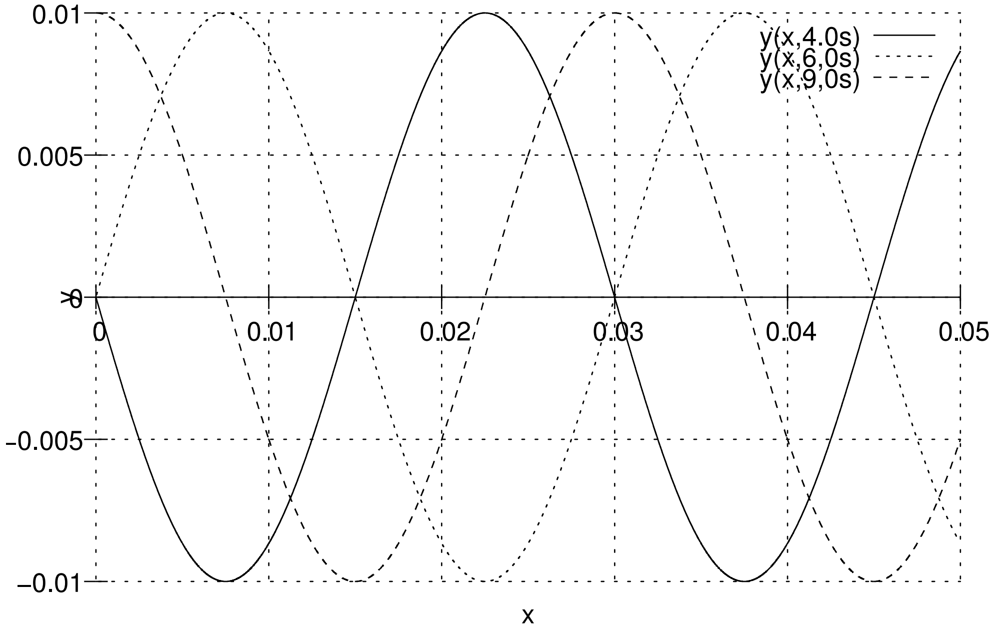
$f = \frac{1}{T} = 0{,}25\text{Hz};$

$c = \frac{\lambda}{T}; \Rightarrow \lambda = cT = 2\pi\frac{c}{\omega} = 0{,}030\text{m};$

b) Wie heißt die Wellengleichung?

$y(x,t) = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\text{m} \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{4{,}0\text{s}} - \frac{x}{0{,}030\text{m}}\right);$

c) Zeichne das Momentbild der Störung nach $t_1 = 4{,}0\mathrm{s}$, nach $t_2 = 6{,}0\mathrm{s}$ und nach $t_3 = 9{,}0\mathrm{s}$ (Zeichnung in Originalgröße).



d) Wie heißen die Schwingungsgleichungen für die Oszillatoren, die in der Entfernung $x_1 = 5{,}25\mathrm{cm}$ bzw. $x_2 = 7{,}5\mathrm{cm}$ vom Nullpunkt der Störung erfasst werden?

$y(x_1, t) = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\mathrm{m} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{4{,}0\mathrm{s}} - 1{,}8\right)$;

$y(x_2, t) = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\mathrm{m} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{4{,}0\mathrm{s}} - 2{,}5\right)$;

1.3 Tests

1.3.1 1. Extemporale aus der Mathematik

Geschrieben am 12.10.2004.

Ein Wagen hat zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit $v_0 = 4{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Er wird zunächst $4{,}0\mathrm{s}$ lang mit $a_1 = 0{,}60\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beschleunigt, anschließend erfolgt eine ebenfalls $4{,}0\mathrm{s}$ lange Abbremsung mit $a_2 = -1{,}6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

a) Berechne die Geschwindigkeit des Wagens nach $4\mathrm{s}$ und nach $8\mathrm{s}$.

$v_1 = v(4\text{s}) = v_0 + a_1 t_1 - 4{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}} + 0{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4\text{s} = 8{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}};$

$v_2 = v(8\text{s}) = v_1 + a_2 t_2 = 7{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}} - 1{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4\text{s} = 0,80\frac{\text{m}}{\text{s}};$

b) Welchen Weg x_1 legt der Wagen in den ersten 4 Sekunden, welchen Weg x_{14} **allein in der 4. Sekunde** zurück?

$x_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 4{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4\text{s} + 0{,}3\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 16\text{s}^2 = 24\text{m};$

$x(3\text{s}) = v_0 \cdot 3\text{s} + \frac{1}{2} a_1 \cdot (3\text{s})^2 = 4{,}8 \cdot 3\text{m} + 0{,}3\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 9\text{s}^2 = 17{,}1m;$

$\Rightarrow x_{14} = x_1 - x(3\text{s}) = 6{,}9m;$

c) Berechne die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ des Wagens für die 8s lange Fahrt.

$x_2 = v_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 7{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4\text{s} - 0{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 16\text{s}^2 = 16\text{m};$

$\overline{v} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = \frac{40\text{m}}{8\text{s}} = 5{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}};$

d) Welche Geschwindigkeit hat der Wagen erreicht, wenn er 12m zurückgelegt hat? Wie lange hat er dafür gebraucht?

$v^2 - v_0^2 = 2a_1 x; \Longrightarrow v^2 = 2a_1 x + v_0^2 = 1{,}2\text{s}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12\text{m} + \left(4{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2; \Longrightarrow v = 6,\frac{\text{m}}{\text{s}};$

$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \Longrightarrow \Delta t = \frac{\Delta v}{a_1} = \frac{6,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 4{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}60\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2{,}2\text{s};$

Ansätze stets mit Formeln, Formeln zunächst allgemein auflösen!

1.3.2 Formelsammlung zur 1. Schulaufgabe

Geradlinige Bewegungen ohne Anfangsgeschwindigkeit

Gleichförmige Bewegung	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit
$a(t) = 0;$	$a(t) = \text{const.};$	$a(t) = \text{const.};$
$v(t) = \text{const.};$	$v(t) = at;$	$v(t) = at + v_0;$
$x(t) = vt;$	$x(t) = \frac{1}{2}at^2;$	$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t;$
	$v^2(x) = 2ax;$	$v^2(x) - v_0^2 = 2ax;$

- Sonderfall Freier Fall: $a = -g; v_0 = 0;$
- Sonderfall Wurf: $a = -g; v_0 =$ Abwurfgeschwindigkeit;
- Bremsung: $x_{\text{Br}} = -\frac{v_0^2}{2a}$; $a = -\frac{v_0^2}{2x_{\text{Br}}}$;

Grundgleichung der Mechanik

$F = am;$

- $a > 0; \Rightarrow F$ ist in Bewegungsrichtung;
- $a < 0; \Rightarrow F$ wirkt gegen die Bewegungsrichtung;

ATWOODsche Fallmaschine

Seilkraft in einem beliebigen Punkt. . .

...im Gleichgewicht:
$F_S = mg;$ (m ist je die gleiche Masse links und rechts.)

...nicht im Gleichgewicht:
$F_S = F_G + F_{\text{Beschl.}};$ (F_G ist die Gewichtskraft der Masse, die an dem Seilzweig, auf dem der ausgewählte Punkt liegt, hängt. $F_{\text{Beschl.}}$ ist die Kraft, die dann zur Beschleunigung führt, $F_{\text{Beschl.}} =$ „Alle Massen“ $\cdot$ Gesamtbeschleunigung;)

Schiefe Ebene

- Hangabtriebskraft: $F_H = mg \sin \alpha;$
- Normalkraft: $F_N = mg \cos \alpha;$
- Reibungskraft: $F_R = \mu F_N = \mu mg \cos \alpha;$

Mechanische Arbeit

Durch Leisten von Arbeit (Variablenname W, Einheit $[W] = 1\text{J} = 1\text{Nm} =!\text{Ws};$) wird die Energie (Variablenname E, Einheit $[W] = [E]\,;$) eines Körpers verändert.

Allgemein: Gleiche Kraft- und Bewegungsrichtung
$W = Fs; [W] = 1\text{J} = 1\text{Nm} = 1\text{Ws};$

Allgemein: Winkel der Größe α zwischen den Vektoren
$W = Fs \cos \alpha;$

Lageenergie

$E_{pot} = mgh;$

Federenergie

$E_F = \frac{1}{2}Ds^2;$

Federhärte: $D = \frac{F}{s};$

Dehnung einer vorgespannten Feder: $W = \frac{1}{2}D\left(s^2 - s_0^2\right);$

Kinetische Energie

$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2;$

1.3.3 Formelsammlung zur 2. Schulaufgabe

Kreisbewegung

- Bogenlänge: $s = \varphi \cdot r;$
- Konstante Winkelgeschwindigkeit: $\omega = \dfrac{\varphi}{t} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f;$
- Frequenz: $f = \dfrac{1}{T};$
- Bahngeschwindigkeit: $v = \omega r;$
- Zentripetalkraft: $F = m\dfrac{v^2}{r} = m\omega^2 r;$

Kreisbewegung: Kurvenüberhöhung

- F: Kraft der Straße auf das Auto (Gegenkraft der Normalkraft)
- Bei idealer Kuvenüberhöhung liefert $\vec{F} + \vec{G}$ eine Kraft zum Mittelpunkt der Kreisbahn:
  $\vec{F}_r = \vec{F} + \vec{G};$
- Bei idealer Kurvenüberhöhung gilt:
  $\tan\alpha = \dfrac{F_r}{G} = \dfrac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \dfrac{v^2}{rg};$ (unabhängig von m)
  Optimale Geschwindigkeit für die Kurve: $v = \sqrt{rg \cdot \tan\alpha};$

Kreisbewegung: Radler in der Kurve

- $\tan\alpha = \dfrac{F_r}{F_g} = \dfrac{v^2}{rg}$;
- Wegen $F_H = \mu \cdot F_s$ folgt für die Haftreibungszahl:
  $\mu \cdot F_G \geq F_r; \Rightarrow \mu \geq \dfrac{F_r}{F_G} = \tan\alpha$;
  Also sichere Kurvenfahrt, solange $\mu > \tan\alpha$;

Kepler-Gesetze und Gravitation

- Drittes Kepler-Gesetz: $\dfrac{T_1^2}{a_1^3} = \dfrac{T_2^2}{a_2^3} = C_\odot$;
- Gravitationsgesetz (M: Masse des Zentralgestirns, m: Masse des umlaufenden Dings): $F_{\text{grav}} = G\dfrac{mM}{r^2}$;
- $G = \frac{4\pi^2}{C_\odot M_\odot}$;
- Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Entfernung: $v = \sqrt{G\dfrac{M}{r}}$;
- Umlaufdauer in Abhängigkeit der Entfernung: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}$;
- Gravitationsfeldstärke: $g = \frac{GM}{r^2}$;
- Hubarbeit im Gravitationsfeld: $W_{\text{H}} = GmM\left(\dfrac{1}{r_{\text{A}}} - \dfrac{1}{r_{\text{E}}}\right)$;
  Hubarbeit „ins Unendliche": $W_\infty = GmM\dfrac{1}{r_{\text{A}}}$;
- Erste kosmische Geschwindigkeit: $v_1 = \sqrt{G \cdot \dfrac{M_{\text{Erde}}}{R_{\text{Erde}}}}$;
  Zweite kosmische Geschwindigkeit: $W_\infty = \frac{1}{2}mv_2^2$;

Mechanische Schwingungen

- Weg: $y(t) = A \cdot \sin \omega t$;
- Geschwindigkeit: $v(t) = \dot{y}(t) = A\omega \cdot \cos \omega t$;
- Beschleunigung: $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{y}(t) = -A\omega^2 \cdot \sin \omega t$;
- Rückstellkraft: $F(t) = ma(t) = -m\omega^2 \cdot y(t)$;
- HOOKsches Gesetz: $F = -Dy$;
- Federhärte: $D = m\omega^2$;
- Schwingungsdauer: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$;
- Harmonische Schwingungen erkennt man an einem linearen Kraftgesetz, die Rückstellkraft ist proportional zur Auslenkung.