Mathematik

Ingo Blechschmidt

22. Januar 2007

Inhaltsverzeichnis

 21.09.2005

Teil I

Mathematik

1 Analysis

1.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1.1.1 Stetigkeit

f stetig in x_0; $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0)$;[1]

1.1.2 Differenzierbarkeit

f ist diffbar an der Stelle x_0; $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(x_0)}{x-x_0}$ existiert;

Dieser Grenzwert heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $\mathrm{f}'(x_0)$ bezeichnet.

(Ist x_0 Randpunkt von D_f, so sind die Grenzwerte einseitige.)

[1] Grenzwert von links und von rechts, wenn möglich

1.1.3 Satz des Hausmeisters

f ist diffbar auf $]a, b[$, stetig auf $]a, b]$ und $\lim\limits_{x \to b-} \mathrm{f}'(x)$ existiert.

$\Rightarrow$ f ist an der Stelle b von links diffbar, und es gilt:

$\mathrm{f}'_{\mathrm{l}}(b) = \lim\limits_{x \to b-} \mathrm{f}'(x);$

Bemerkungen:

- Eine entsprechende Aussage gilt für die rechtsseitige Diffbarkeit.
- f ist an der Stelle x_0 diffbar genau dann, wenn gilt:
  $\mathrm{f}'_{\mathrm{l}}(x_0) = \mathrm{f}'_{\mathrm{r}}(x_0);$

1.1.4 Beispiel

Betrachtet werden die Funktionen f und g mit

$D_{\mathrm{f}} =]a, b]\,; \quad D_{\mathrm{g}} =]b, c[\,;$

und die Funktion h mit

$$\mathrm{h}(x) = \begin{cases} \mathrm{f}(x) & \text{für } x \in]a, b]\,; \\ \mathrm{g}(x) & \text{für } x \in]b, c[\,; \end{cases}$$

d.h. $D_{\mathrm{h}} =]a, c[\,;$

f und g besitzen die Stammfunktionen F und G.

Beschreibe eine Vorgehensweise, um herauszufinden, ob h eine Stammfunktion besitzt und gib gegebenfalls eine an.

Vorläufiges H:

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} \mathrm{F}(x) & \text{für } x < b; \\ \mathrm{G}(x) & \text{für } x > b; \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to b} \mathrm{H}(x) = \mathrm{H}(b);$

$\lim\limits_{x \to b-} \mathrm{H}(x) = \lim\limits_{x \to b-} \mathrm{F}(x);$

$\lim\limits_{x \to b+} \mathrm{H}(x) = \lim\limits_{x \to b+} \mathrm{G}(x);$

1. Fall: Einer der Grenzwerte existiert nicht.

2. Fall: Beide Grenzwerte existieren und stimmen überein.

   Diesen Grenzwerte nehmen wir als $\mathrm{H}(b)$.

3. Fall: Beide Grenzwerte existieren – etwa φ und γ –, aber stimmen nicht überein.

   Wir verwerfen das alte $\mathrm{H}(x)$ und nehmen

   $$\mathrm{H}(x)=\begin{cases}\mathrm{F}(x) & \text{für } x<b;\\ \varphi & \text{für } x=b;\\ \underbrace{\mathrm{G}(x)+\varphi-\gamma}_{\text{Neues } \mathrm{G}(x)} & \text{für } x>b;\end{cases}$$

Überprüfung auf Differenzierbarkeit an der Stelle b:

1. Methode: Grenzwert des Differenzenquotienten

   $\lim\limits_{x\to b-}\frac{\mathrm{H}(x)-\mathrm{H}(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b-}\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{H}(b)}{x-b};$

   $\lim\limits_{x\to b+}\frac{\mathrm{H}(x)-\mathrm{H}(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b+}\frac{\mathrm{G}(x)-\mathrm{H}(b)}{x-b};$

   Stimmen diese Grenzwerte überein, ist H Stammfunktion von h, andernfalls nicht.

2. Methode: Satz des Hausmeisters

   Nach Konstruktion ist H stetig an der Stelle b.

   $\lim\limits_{x\to b-}\mathrm{F}'(x)=\lim\limits_{x\to b-}\mathrm{f}(x);$

   $\lim\limits_{x\to b+}\mathrm{G}'(x)=\lim\limits_{x\to b+}\mathrm{g}(x);$

   Wenn die beiden Grenzwerte existieren und gleich sind, ist $\mathrm{H}(x)$ diffbar. Wenn ferner $\mathrm{H}'(b)=\mathrm{f}(b)$ gilt, ist H eine Stammfunktion von h.

02.10.2005

1.2 Das bestimmte Integral

„Ich geb´ euch immer so dumme Antworten, weil ihr mir in einer Vagheit Fragen stellt – bei denen hab´ ich keine Chance, richtig zu antworten.“

„Vor Newton ist das Fallen eines Steines im wahrsten Sinne des Wortes ungesetzlich gewesen – viele sagen sogar, vor Newton sind Steine [gar] nicht gefallen.“

1.2.1 Spezielle Flächen

$F = \{P(x,y)\,|\,x \in [a,b] \wedge y \in [0,\mathrm{f}(x)] \wedge \mathrm{f}$ stetig auf $[a,b]\}\,;$

Wie lässt sich der Inhalt der Fläche, $\mathrm{A}_a(x)$, bestimmen?

Wie betrachten das Änderungsverhalten von $\mathrm{A}_a(x)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_a(x) + h \min_{[x,x+h]} \mathrm{f}(x) \quad &\leq \quad \mathrm{A}_a(x+h) \quad \leq \quad \mathrm{A}_a(x) + h \max_{[x,x+h]} \mathrm{f}(x); \\ \mathrm{A}_a(x) - h \min_{[x-h,x]} \mathrm{f}(x) \quad &\geq \quad \mathrm{A}_a(x-h) \quad \geq \quad \mathrm{A}_a(x) - h \max_{[x-h,x]} \mathrm{f}(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{[x,x+h]} \mathrm{f}(x) \quad &\leq \quad \tfrac{\mathrm{A}_a(x+h)-\mathrm{A}_a(x)}{h} \quad \leq \quad \max_{[x,x+h]} \mathrm{f}(x); \\ \mathrm{f}(x) \quad &\leq \quad \mathrm{A}'_a(x) \quad \leq \quad \mathrm{f}(x); \end{aligned}$$ 05.10.2005

„Weil die einen Doofen von den anderen Doofen gerne gelobt werden“

Die Flächenfunktion ist eine Stammfunktion der Randfunktion, und zwar die Stammfunktion, für die gilt:

$\mathrm{A}_a(a) = 0;$ 24.10.2005

Für $\mathrm{f}(x) \leq 0$ auf $[a,b]$ soll sein:

$$\int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x := -\int\limits_a^b -\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x \leq 0;$$

[B. S. 41]

[B. S. 46: $\mathrm{F}'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_k^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{f}(x);$] 25.10.2005

f integrierbar über $[a,b]$ und dort $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$.

Dann gilt: $\int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a);$

1.2.2 Eigenschaften des bestimmten Integrals

- $\int\limits_a^b k\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x; \quad k \in \mathbb{R};$

„Ja ich bin nicht meine Skizze“
„Ich bin nicht mal meine Stimme“
„sonst würde ich ja »meine Stimme« heißen“

- $\int\limits_a^b \left[\mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x;$
- $\int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x;$

30.10.2005

$-\int\limits_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x =: \int\limits_b^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x; \quad a < b;$

[in der Ableitung steckt die Richtung] 11.10.2005

1.3 Die Integralfunktion

f stetig auf $[a, b]$.
$k \in [a, b]\,;$
$\phi\colon x \mapsto \int\limits_k^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t; \quad x \in [a, b]\,;$
Es gilt: $\phi' = \mathrm{f};$
„Ist dir der logische Irrsinn deiner Aussage bewusst?“
„Brrr. . . da brauch´ ich ´ne mentale Dusche“ 19.06.2006

1.3.1 Logarithmische Integration

$(\ln \mathrm{f}(x))' = \frac{1}{\mathrm{f}(x)} \cdot \mathrm{f}'(x) = \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)};$
$\mathrm{f}(x) > 0; \quad x \in \mathbb{D}_\mathrm{f};$ 12.10.2005

1.4 Vollständige Induktion (Beweisverfahren für Aussagen $A(n); \quad n \in \mathsf{N}$)

1. Schritt: Induktionsanfang: Die Aussage wird für $n = 1$ bewiesen.
2. Schritt: Induktionsschritt von n auf $n + 1$

   Unter der Voraussetzung, dass die Aussage für n gilt, wird bewiesen, dass die Aussage für $n + 1$ gilt.

„Im Grunde geht es um die Frage »Was ist Realität«“

„Weil sie wissen, dass Sprechen Realität schafft.“

„Wenn ich mich da hineinintegriere [in nicht-algebraischen Kontext], dann [. . .]“

„Und das [was man aufgeschrieben hat] starrt mich an“

„Meine Hand ist nicht deine Hand“

„Und plötzlich entdecke ich hier jemanden von dem ich nie wusste, [dass] er [hier] wohnt“

„*monotone, befehlende Stimme* Die Kreativität ist per Gesetz durchzuführen.“ 08.05.2006

1.5 Die Exponentialfunktion

1.5.1 Einführende Beispiele

[. . .]

Allgemeine Struktur der auftretenden Gleichungen:

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}(x_0)k\,(x - x_0)\,; \quad x \geq x_0$; mit einer Funktion $\mathrm{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

Bemerkungen:

- Wird der Zins dem Kapital zugeschlagen, gilt die angegebene Gleichung nur bis zum Zeitpunkt t_Z des Zuschlags. Für $t > t_Z$ muss $K(t_0)$ durch $K(t_Z)$ ersetzt werden.

  Für je zwei geeignete Zeitpunkte t_1 und t_2 mit $t_1 < t_2$ gilt also:

  $K(t_2) = K(t_1) + K(t_1)k\,(t_2 - t_1)\,;$ 10.05.2006

[Einschub:]
$\mathrm{f}'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)}{x - x_0};$
$\mathrm{f}'(x_0) \approx \frac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)}{x - x_0};$
$\mathrm{f}'(x_0) \cdot (x - x_0) \approx \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0);$
$\mathrm{f}'(x_0) \cdot x - \mathrm{f}'(x_0) \cdot x_0 \approx \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0);$
$\mathrm{f}(x) \approx \underbrace{\mathrm{f}(x_0) + \mathrm{f}'(x_0)x - \mathrm{f}'(x_0)x_0}_{\mathrm{t}(x)};$
$\mathrm{f}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{f}^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^{(k)}}{k!};$ (Taylorreihe, [Lagrangereihe bei negativen k])

- Auch in den restlichen Beispielen gilt die jeweilige Gleichung für $t = t_0 + \Delta t$ bzw. $x = x_0 + \Delta x$ nur für entsprechend kleine Δt bzw. Δx. Beim radioaktiven Zerfell etwa muss nach einer Zeitdauer $\Delta t \ll$ Zerfallsdauer die Zahl der nicht zerfallenen Atome aktualisiert werden.
- Überträgt man obige Überlegung auf f, ergibt sich für beliebige x_1, x_2 unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit
  $\mathrm{f}(x_2) = \mathrm{f}(x_1) + k\mathrm{f}(x_1) \cdot (x_2 - x_1);$
  $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{\mathrm{f}(x_2) - \mathrm{f}(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim\limits_{x_2 \to x_1} k\mathrm{f}(x_1) = k\mathrm{f}(x_1);$

12.05.2006

1.5.2 Wie sieht der Funktionsterm von f aus?

Zurück: $k = 1;$

$\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x);$

Geometrische Bedeutung: Steigung und Funktionswert an einer Stelle sind gleich.

$\mathrm{f}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k;$

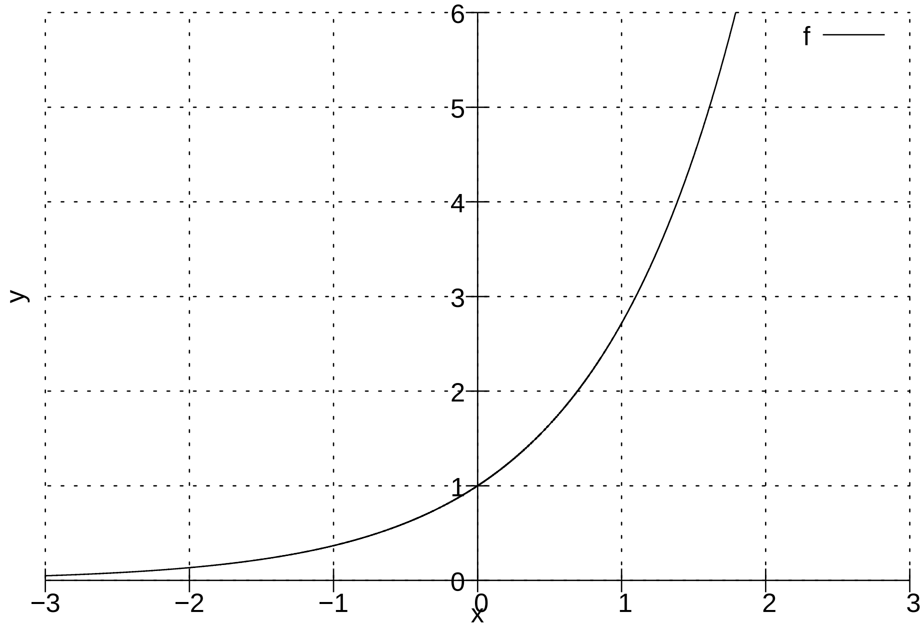
$\mathrm{f}'(x) = 0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{j+1} (j+1) x^j;$

$\mathrm{f}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$

$\mathrm{f}(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R};$

$\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x);$

$\mathrm{f}(0) = 1 = \mathrm{f}'(0);$



$\mathrm{f}(x)$ lässt sich auch in der Form e^x schreiben, also das Exponentialfunktion mit $e = \lim\limits_{|x|\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (EULERsche Zahl, $\approx 2{,}7$).

$\mathrm{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$ (natürliche Exponentialfunktion)

Auch $\varphi(x) = ae^x$, $a \neq 0$ erfüllt die Bedingungen.

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; ($x$-Achse ist Asymptote für $x \to -\infty$)

$k \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$

$\mathrm{f}_k(x) = ae^{kx};$

$\mathrm{f}_k'(x) = ae^{kx}\,(kx)' = kae^{kx} = k\mathrm{f}_k(x);$

Rechengesetze für Potenzen vgl. B. S. 77. 19.05.2006

1.5.3 Ableitung beliebiger Exponentialfunktionen

$\mathrm{g}(x) = b^x; \quad b > 0; x \in \mathbb{R};$

$\mathrm{g}(x) = \left(e^{\ln b}\right)^x = e^{x\cdot\ln b};$

$\mathrm{g}'(x) = x^{x\cdot\ln b} \cdot \ln b = \left(e^{\ln b}\right)^x \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b;$ 29.05.2006

1.6 Funktion und Umkehrfunktion

Eine Funktion $\mathrm{f}\colon A \to B$ ordnet jedem $x \in A$ (**Definitionsmenge**) **genau** einen Wert $y \in B$ (Zielbereich) zu; man schreibt dafür $y = \mathrm{f}(x)$ und nennt $\mathrm{f}(x)$ den Funktionsterm von f für das Argument (die Variable) x.

Ist jedes $y \in B$ auch Funktionswert von f, so heißt f surjektiv.

Folgt für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$, dass $\mathrm{f}(x_1) \neq \mathrm{f}(x_2)$, so heißt f injektiv.

Die Menge aller Funktionswerte von f heißt **Wertemenge** von f.

Die Umkehrfunktion von f **soll** jedem Element aus B „sein" (genau ein) Element aus A zuordnen. Dazu muss f bijektiv[2] sein.

$\mathrm{f}\colon A \leftrightarrow B : \mathrm{f}^{-1}$;

Für alle $a \in A$ gilt: $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(a)) = a$;
Für alle $b \in B$ gilt: $\mathrm{f}(\mathrm{f}^{-1}(b)) = b$;

1.6.1 Speziell [bei der Exponentialfunktion]

$\mathrm{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$;

f ist echt monoton steigend auf der Definitionsmenge, also injektiv. 31.05.2006

„Mathematik ist wie ein Brennspiegel, die nur betrachtet, was eh schon da ist"

„Da ist die alte Frage, mit wem sprech´ ich denn, wenn ich mit spreche. . . ? Und wer bin ich wirklich. . . ?"

Für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{f}(x) = e^x = y$. Also ist f surjektiv.

$\Rightarrow$ f ist umkehrbar. Umkehrfunktion f^{-1} von f:

$\mathrm{f}^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad y = e^x \mapsto x = \ln y$;

Trägt man auch die Argumentwerte von f^{-1} auf der Rechtswertachse und die Funktionswerte von f^{-1} auf der Hochwertachse auf (Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten), ergibt sich der Graph von f^{-1}.

$\mathrm{f}^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln x$;

[2] injektiv und surjektiv

1.6.2 Zusammenhang zwischen der Ableitung von f und f^{-1} an sich entsprechenden Stellen

$\left(\mathrm{f}^{-1}\right)'(x_0) = \frac{1}{\mathrm{f}'(\mathrm{f}^{-1}(x))} \overset{\text{speziell}}{=} \frac{1}{\mathrm{f}(\mathrm{f}^{-1}(x_0))} = \frac{1}{x_0};$

Kurz: $(\ln x)' = \frac{1}{x};$

Folgerungen:

- 1. Fall: $x > 0$: $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C = \ln|x| + C; \quad C \in \mathbb{R};$
- 2. Fall: $x < 0$: $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln -x + C = \ln|x| + C; \quad C \in \mathbb{R};$

$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C; \quad C \in \mathbb{R};$ 13.11.2006

1.7 Uneigentliche Integrale

$F_0(\alpha) = \int\limits_0^\alpha e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^\alpha = 1 - e^{-\alpha};$

$\lim\limits_{\alpha\to\infty} F_0(\alpha) = 1;$

Uneigentliches Integral mit unbeschränktem Integrationswert:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_0^\alpha e^{-x}\,\mathrm{d}x =: \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x;$$

[Kann konvergieren oder bestimmt oder unbestimmt divergieren.]

„es ist nicht schön, dass so hinzuschreiben, aber wir machen jetzt ja grad´ Physik. . . “

$\lim\limits_{\alpha\to-\infty} \int\limits_\alpha^\beta \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{\gamma\to\infty} \int\limits_\beta^\gamma \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x =: \int\limits_{-\infty}^\infty \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x;$

„ein schlechter Kuchen ist nichts schlimmes“

„langsam kommen wir dazu, Mathematik zu machen, aber das Abitur kommt uns dazwischen. . . “

„mein Ziel besteht darin, mich überflüssig zu machen“ 20.11.2006

1.8 Partielle Integration

$(uv)' = u'\,v + u\,v'$;

$u\,v' = (uv)' - u'\,v$;

$\int u\,v'\,\mathrm{d}x = \int (uv)'\,\mathrm{d}x - \int u'\,v\,\mathrm{d}x = uv + C - \int u'\,v\,\mathrm{d}x$; 27.11.2006

1.9 [Integration durch] Substitution

Kettenregel:

$\phi(t) = F(g(t))$; $\quad \dot\phi(t) = F'(g(x)) \cdot g'(t)$;

$\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = F(g(t)) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ mit $x = g(t)$; 22.01.2007

1.10 Asymptote

a ist Asymptote von f für $x \to \infty \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) - a(x)\right] = 0$;

[Speziell für rationale Funktionen:] $f(x) = r(x) : q(x) = \underbrace{k(x)}_{a(x)} + \frac{z(x)}{q(x)}$;

[Polynomdivision!]

„wer hat das [Tafelbild] gemacht? – der Herr Gräupner – ah, ja, ist gut *lobend*“