Aufbau der natürlichen, ganzen, rationalen und surrealen Zahlen

Facharbeitsvorstellung von Ingo Blechschmidt am Tag der Facharbeiten des Holbein-Gymnasiums Augsburg, dem 26. April 2007

Natürliche Zahlen

- Definition eines Nullelements 0, einer Nachfolgerfunktion S und von Zahlensymbolen zur einfacheren Handhabung:
$$\begin{aligned} 1 &:= S(0) \\ 2 &:= S(1) = S(S(0)) \\ 3 &:= S(2) = S(S(S(0))) \\ 4 &:= S(3) = S(S(S(S(0)))) \\ &\vdots \end{aligned}$$
- Definition der Addition, Subtraktion und Multiplikation (n, m natürliche Zahlen):
$$\begin{array}{rcrcl} n & + & 0 & := & n \\ n & + & S(m) & := & S(n+m) \\ \\ n & - & 0 & := & n \\ S(n) & - & S(m) & := & n-m \\ \\ n & \cdot & 0 & := & 0 \\ n & \cdot & S(m) & := & n \cdot m + n \end{array}$$

Ganze Zahlen

- Grundidee: Auffassung ganzer Zahlen als Repräsentanten des *Unterschieds* zwischen zwei natürlichen Zahlen
- Notation als Paare zweier natürlicher Zahlen:
$$\begin{array}{rcl} 0_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (0,0) \equiv (1,1) \equiv (2,2) \equiv \cdots \\ 1_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (1,0) \equiv (2,1) \equiv (3,2) \equiv \cdots \\ 2_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (2,0) \equiv (3,1) \equiv (4,2) \equiv \cdots \\ (-1)_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (0,1) \equiv (1,2) \equiv (2,3) \equiv \cdots \\ (-2)_{\mathbb{Z}} & :\equiv & (0,2) \equiv (1,3) \equiv (2,4) \equiv \cdots \\ & \vdots & \end{array}$$
(Repräsentation von *natürlichen*, nicht *ganzen* Zahlen durch die Zahlensymbole innerhalb der Paare)
- Definition der Addition, Subtraktion und Multiplikation (n, m, ν, μ natürliche Zahlen):
$$\begin{array}{rcrcl} (n,m) & +_{\mathbb{Z}} & (\nu,\mu) & := & (n +_{\mathbb{N}_0} \nu, m +_{\mathbb{N}_0} \mu) \\ (n,m) & -_{\mathbb{Z}} & (\nu,\mu) & := & (n +_{\mathbb{N}_0} \mu, m +_{\mathbb{N}_0} \nu) \\ (n,m) & \cdot_{\mathbb{Z}} & (\nu,\mu) & := & (n\nu +_{\mathbb{N}_0} m\mu, n\mu +_{\mathbb{N}_0} m\nu) \end{array}$$

Hier nicht ausgeführt: Detailliertere Herleitung der Definitionen • Belege, dass die hier aufgeführten Definitionen tatsächlich die bekannten Rechenvorschriften widerspiegeln • Vergleich mit den Rechentechniken von Kindern • Division • Relationen ($\leq$, $<$, $>$, $\geq$) • Diskussion der Nichteindeutigkeit der Repräsentation bei den ganzen Zahlen • Aufbau der rationalen Zahlen • Surreale Zahlen – 1974 entdeckter/erfundener Zahlenbereich, der „unendlich große“ und „unendlich kleine“ Zahlen enthält und trotzdem konsistent ist

Beweis, dass $2+2=4$ (mit natürlichen Zahlen)

$2+2=$	(Schreiben des zweiten Summanden als Nachfolger)
$= 2+S(1) =$	(Anwenden der Additionsvorschrift)
$= S(2+1) =$	(Schreiben des zweiten Summanden als Nachfolger)
$= S(2+S(0)) =$	(Erneutes Anwenden der Additionsvorschrift)
$= S(S(2+0)) =$	(Anwenden der ersten Regel der Additionsvorschrift)
$= S(S(2)) =$	(Schreiben als Dezimalzahl)
$= S(3) = 4$	$\blacksquare$

Facharbeit im PDF-Format: `http://xrl.us/uejj` • Vortragsfolien: `http://xrl.us/vwif`