02.05.2006

0.1 Vektoren

0.1.1 Lineare Abhängigkeit

Die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) heißen linear unabhängig. $\Leftrightarrow$

Aus $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$;

folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$;

(D.h. mit $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ... $\vec{a}_n$ lässt sich nur die triviale Nullsumme bilden.)

[Speziell für] $n = 2$: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ [ist] linear unabhängig. $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ nicht kollinear.

[Ist bereits ein Nullvektor in einer Menge, die man auf lineare Abhängigkeit überprüft, so ist die Menge linear abhängig. (Vgl. mit Multiplikation mit 0!)]

0.1.2 Basis eines Vektorraums [siehe B. S. 126]

$\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, ..., $\vec{b}_n$ sei Basis von V und $v \in V$.

Dann existiert ein eindeutiges n-Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ [die Koordinaten] mit:

$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + \cdots v_n\vec{b}_n$; [wobei die $v_i\vec{b}_i$ Komponenten sind.]

[Beweis der Koordinateneindeutigkeit]

Annahme: Es existiert ein weiteres n-Tupel $(v_1', v_2', \ldots, v_n')$ mit dieser Eigenschaft.

$\vec{v} = v_1'\vec{b}_1 + v_2'\vec{b}_2 + \cdots v_n'\vec{b}_n$;

$\vec{0} = (v_1 - v_1')\,\vec{b}_1 + (v_2 - v_2')\,\vec{b}_2 + \cdots (v_n - v_n')\,\vec{b}_n$;

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ folgt: $v_i - v_i' = 0$, also $v_i = v_i'$. 02.10.2006

0.1.3 Das Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \binom{a_1}{a_2} \cdot \binom{b_1}{b_2} := a_1 b_1 + a_2 b_2;$

Zwei Vektoren [die beide nicht der Nullvektor sind] stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

Wie lässt sich aus den Koordinaten zweier Vektoren der Winkel zwischen ihnen berechnen?

$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi;$

$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\,|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi;$

$\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\,|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi;$

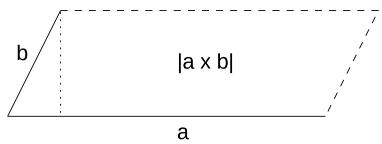
$\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\,|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi;$

$\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \cos\varphi;$ 10.11.2006

0.1.4 Vektorprodukt

- Definition: vgl. B. S. 238
- Was ist $\vec{a} \times \vec{b}$, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind?

  [Kollinearität zweier Vektoren, die beide nicht der Nullvektor sind $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$;]
- Geometrische Eigenschaften: vgl. B. S. 240

  $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b});$
- Rechenregeln:
  - $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$

  - $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
  - $\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b}$;

- Spatvolumen: $\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right| = \left|\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right|$;

  [Für $|\vec{n}| = 1$ gilt: $\vec{a} \cdot \vec{n} = |\vec{a}| \underbrace{|\vec{n}|}_{1} \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{n}) = |\vec{a}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{n}) = \vec{n}_{\vec{a}}$;]