27.01.2007

0.1 128. Hausaufgabe

0.1.1 Stochastik-Buch Seite 223, Aufgabe 23

Gegeben sei eine BERNOULLIkette der Länge 4 und der Trefferwahrscheinlichkeit $0{,}3$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim i-ten Versuch zum ersten Mal einen Treffer zu erzielen ($i = 1, 2, 3, 4$).

Kurzschreibweisen: $s^n = \underbrace{sss\ldots sss}_{n}$; $\quad 1{*}{*}{*} = \left\{(1, a, b, c) \mid a, b, c \in \{0, 1\}\right\}$;

$P(1{*}{*}{*}) = p = 30\,\%$;

$P(01{*}{*}) = qp = 21\,\%$;

$P(001{*}) = q^2 p = 14{,}7\,\%$;

$P(\{0001\}) = q^3 p \approx 10{,}3\,\%$;

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich zum ersten Mal ein Treffer nach höchstens vier Versuchen einstellt?

$P(1{*}{*}{*} \cup 01{*}{*} \cup 001{*} \cup \{0001\}) = p + qp + q^2p + q^3p = p\,(1 + q + q^2 + q^3) = 1 - P(\{0000\}) \approx 76\,\%$;

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Treffer frühstens beim dritten Versuch zum ersten Mal einstellt?

$P(001{*} \cup \{0001\}) = q^2p + q^3p = p\,(q^2 + q^3) \approx 25\,\%$;

0.1.2 Stochastik-Buch Seite 223, Aufgabe 24

Eine Laplace-Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal **Kopf** erscheint, höchstens aber zehn Mal.

a) Konstruieren Sie einen passenden Ergebnisraum.

$\Omega = \{0, 1\}^{10}$;

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt spätestens beim 5. Wurf Kopf?

$P(1*^9 \cup 01*^8 \cup 001*^7 \cup 0001*^6 \cup 00001*^5) = p + qp + q^2p + q^3p + q^4p = p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 \approx 96{,}9\,\%$;

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt frühestens beim 5. Wurf Kopf?

$P(00001*^5) = q^4p = p^5 \approx 3{,}1\,\%$;

„Alternativ“:

$P(0000*^6) = q^4 \approx 6{,}3\,\%$;

d) Mit welcher Anzahl von Würfen ist das Spiel mit mehr als $99\,\%$ Wahrscheinlichkeit spätestens beendet?

$n \geq \frac{\ln[1-99\,\%]}{\ln[1-p]} \approx 6{,}6; \to n \geq 7$;

0.1.3 Stochastik-Buch Seite 223, Aufgabe 25

Ein Laplace-Würfel wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal Augenzahl 6 erscheint, höchstens aber sechs Mal.

a) Suchen Sie einen geeigneten Ergebnisraum.

$\Omega = \{0, 1\}^6$;

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt genau beim 6. Wurf die Zahl 6?

$P(0^51) = q^5p \approx 6{,}7\,\%$;

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt keinmal die Sechs?

$P(0^6) = q^5 \approx 33{,}5\,\%$;

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt frühestens beim 5. Wurf die Sechs?

$P(0^4*^2) = q^4 \approx 48{,}2\,\%$;

0.1.4 Stochastik-Buch Seite 224, Aufgabe 26

Gegeben sei eine BERNOULLIkette mit den Parametern n und p. Wir interessieren uns für die Ereignisse E_k: „In den ersten $(k-1)$ Versuchen kein Treffer, beim k-ten Versuch ein Treffer“ ($k = 0, 1, \ldots, n$).

a) Berechnen Sie $P(E_2)$.

$P(E_2) = qp;$

b) Berechnen Sie $P(E_3)$.

$P(E_3) = q^2 p;$

c) Berechnen Sie $P(E_k)$.

$P(E_k) = q^{k-1} p;$

d) Da wir uns für die Ereignisse E_k interessieren, können wir den Ergebnisraum der BERNOULLIkette vergröbert auch darstellen durch

$$\Omega = \left\{ 1, 01, 001, \ldots, \underbrace{000\ldots000}_{n-1}1, \underbrace{000\ldots000}_{n} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse gleich 1 ist.

$\Omega' = \{0, 1\}^n;$

$$\begin{array}{lrcl} f\colon & \Omega' & \to & \Omega \\ & 1*^{n-1} & \mapsto & 1 \\ & 01*^{n-2} & \mapsto & 01 \\ & 001*^{n-3} & \mapsto & 001 \\ & & \vdots & \end{array}$$

Mit $\omega \in \Omega$: $P(\omega) = P(\{\omega' \in \Omega' \mid f(\omega') = \omega\});$

Da $P(\Omega') = 1$ und die Zerlegung über das Urbild der Elementarereignisse von Ω unter f disjunkt ist, muss auch $P(\Omega) = 1$ gelten.

Alternativ:

$P(\Omega) = p + pq + pq^2 + \cdots + pq^{n-1} + q^n = p\,(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) + q^n = p \cdot \left[\frac{q^n - 1}{q-1} \cdot 1 \right] + q^n = -q^n + 1 + q^n = 1;$