02.11.2005

0.1 18. Hausaufgabe

0.1.1 Analysis-Buch Seite 70, Aufgabe 33

Gegeben sind die Funktionen

$\mathrm{p}\colon x \mapsto \mathrm{p}(x) := -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{9}{2};\quad D_{\mathrm{p}} = \mathbb{R};$

$\mathrm{g}_a\colon x \mapsto \mathrm{g}_a(x) := ax;\quad D_{\mathrm{g}_a} = \mathbb{R};\quad a \in \mathbb{R};$

a) Berechne den Inhalt A der Fläche, die von der Parabel und der x-Achse eingeschlossen ist.

$\mathrm{p}(x) = 0; \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0;$

$\Rightarrow x_1 = 0;\quad -\frac{1}{2}x_2 = -3; \Rightarrow x_2 = 6;$

$\Rightarrow \mathrm{p}(x) = -\frac{1}{2}x\,(x-6)\,;$

$\Rightarrow$ VZW von $-$ nach $+$ bei 0 und von $+$ nach $-$ bei 6;

$\Rightarrow A = \int\limits_0^6 \mathrm{p}(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^6 = 18;$

b) Berechne die Koordinaten der Punkte P und Q, in denen sich G_{p} und G_{g_a} schneiden.

$\mathrm{p}(x) = \mathrm{g}_a(x); \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 3x = ax;$

$\Rightarrow x_3 = 0;\quad -\frac{1}{2}x_4^2 + (3-a) = 0; \Rightarrow x_4 = 6 - 2a;$

$\Rightarrow P(0,0);\quad Q(6-2a, 6a-2a^2);$

c) Berechne den Inhalt $B(a)$ der Fläche, die zwischen G_{p} und G_{g_a} liegt.

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(a) \;:=\; & \left|\int\limits_0^{6-2a} \mathrm{p}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^{6-2a} \mathrm{g}_a(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^{6-2a} - \left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^{6-2a}\right| = \\ & \left|-\frac{1}{6}(6-2a)^3 + \frac{3}{2}(6-2a)^2 - \frac{a}{2}(6-2a)^2\right| = (6-2a)^2\left|-1 + \frac{1}{3}a + \frac{3}{2} - \frac{a}{2}\right| = \\ & \left|\frac{1}{12}(6-2a)^3\right| = \frac{2}{3}\left|3-a\right|^3;\end{aligned}$$

d) Für welchen Wert von a liegt zwischen G_{p} und G_{g_a} keine Fläche? Welche besondere Lage hat dann G_{p} zu G_{g_a}?

$\mathrm{B}(a) = 0; \Rightarrow 3 - a = 0; \Rightarrow a = 3;$

G_{g_a} ist dann Tangente von G_{p} an der Stelle 0. (Beweis: $\mathrm{g}_3'(0) = \mathrm{p}'(0)$;)

e) Eine Gerade durch den Ursprung geht durch den Scheitel der Parabel; diese Gerade zerlegt die Fläche A von a) in zwei Teilflächen. Berechne das Verlältnis: größere Teilfläche durch kleinere Teilfläche.

$\mathrm{p}'(x_5) = 0; \Rightarrow x_5 = 3; \quad \mathrm{p}(3) = 9;$

$\mathrm{u}(x) := \frac{\mathrm{p}(3)}{6} x = \frac{3}{2} x;$

$$\Rightarrow \frac{A - \left(\int\limits_0^3 \mathrm{p}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 \mathrm{u}(x)\,\mathrm{d}x \right)}{\int\limits_0^3 \mathrm{p}(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^3 \mathrm{u}(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{A}{9 - \frac{27}{4}} - 1 = 7;$$

f) Für welchen Wert von a ist $\mathrm{B}(a)$ achtmal so groß wie die Fläche zwischen der Parabel und der x-Achse?

$\mathrm{B}(a) = 8A; \Rightarrow \frac{2}{3} \left|3 - a\right|^3 = 8A; \Rightarrow (3 - a)^3 = \pm 12A; \Rightarrow a = 3 - \sqrt[3]{\pm 12A}$ „=“ $3 - \sqrt[3]{\pm 216}$ „=“ $3 - \pm 2 \cdot 3; \Rightarrow a_1 = -3; \quad a_2 = 9;$

g) $\int\limits_c^x \mathrm{p}(t)\,\mathrm{d}t =: \mathrm{I}_c(x);$

Berechne die Integralfunktion I_c von p.

$\mathrm{I}_c(x) = \int\limits_c^x \mathrm{p}(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{2} x^2 \right]_c^x = \frac{1}{6} \left(-x^3 + 9x^2 + c^3 - 9c^2 \right);$

h) Für welche Werte von c ist I_c symmetrisch zum Koordinatensystem?

$\mathrm{I}_c(x) = \mathrm{I}_c(-x); \Rightarrow -1 = 0;$

$\mathrm{I}_c(x) = -\mathrm{I}_c(-x); \Rightarrow$ (Keine von x unabhängige Aussage)

$\Rightarrow$ Es gibt kein $c \in \mathbb{R}$, für welches I_c symmetrisch zum Koordinatensystem ist;

i) Für welche Werte von c geht I_c durch den Ursprung?

$\mathrm{I}_c(0) = 0; \Rightarrow -x^3 + 9x^2 + c^3 - 9c^2 = 0;$

$\Rightarrow c_1 = 0; \quad c_2 - 9 = 0; \Rightarrow c_2 = 9;$

0.1.2 Analysis-Buch Seite 72, Aufgabe 61

$\mathrm{f}_a(x) := -\frac{4}{a^2}\,(8-a)\,(x^2-ax)\,; \quad D_{\mathrm{f}_a} = \mathbb{R}; \quad a \neq 0;$

a) Bestimme den Flächeninhalt $\mathrm{A}(a)$ der Fläche zwischen G_{f_a} und der x-Achse.

$\mathrm{f}_a(x) = 0; \Rightarrow x^2 - ax = 0;$

$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 - a = 0; \Rightarrow x_2 = a;$

$\Rightarrow \mathrm{f}_a(x) = -\frac{4}{a^2}\,(8-a)\cdot x\,(x-a)\,;$

$$\mathrm{A}(a) = \left|\int\limits_0^a \mathrm{f}_a(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|-\frac{4}{a^2}\,(8-a)\left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_0^a\right| = \frac{2}{3}\left|(8-a)\,a\right|;$$

b) Für welche a ist der Inhalt der Fläche $\mathrm{A}(a)$ gleich 8?

$\mathrm{A}(a) = 8; \Rightarrow \frac{2}{3}\,(8-a)\,a = \pm_1 8; \Rightarrow (8-a)\,a = \pm_1 12; \Rightarrow -a^2 + 8a \mp_1 12 = 0;$

$$\Rightarrow a_{1,2,3,4} = \frac{-8 \pm_2 \sqrt{64 + 4\cdot \mp_1 12}}{-2} = \frac{-8 \pm_2 4\sqrt{4 \mp_1 3}}{-2} = 4 \mp_2 2\sqrt{4 \mp_1 3};$$

$\Rightarrow a_1 = 2; \quad a_2 = 6;$
$\Rightarrow a_3 = 4 + 2\sqrt{7}; \quad a_4 = 4 - 2\sqrt{7};$

(Kontrolle durch Einsetzen in Anfangsgleichung beweist Korrektheit.)

Es gibt aber kein globales Maximum, da $\mathrm{A}(a) \to \infty$ für $a \to \pm\infty$.

c) Bestimme a so, dass $\mathrm{A}(a)$ möglichst groß wird. Gib den maximalen Flächeninhalt an.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\mathrm{A}(a) = \operatorname{sgn}\!\left(\frac{2}{3}\,(8-a)\,a\right)\cdot\frac{2}{3}\,(8-2a) = 0;$ (für $a \neq 0$)

$\Rightarrow 8 = 2a_5; \Rightarrow a_5 = 4;$ (VZW gegeben)

$\mathrm{A}(4) = \frac{32}{3};$

d) $\mathrm{F}_4(x) := \int\limits_4^x \mathrm{f}_4(t)\,\mathrm{d}t;$

Bestimme den Term $\mathrm{F}_4(x)$ und alle Nullstellen von F_4.

$\mathrm{F}_4(x) = \int\limits_4^x \mathrm{f}_4(t)\,\mathrm{d}t \int\limits_4^x \mathrm{f}_4(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{32}{3};$

Nullstellen: $\mathrm{F}_4(x) = 0; \Rightarrow x_3 = -2; \quad x_4 = 4;$

e) Berechne die Hoch-, Tief- und Wendepunkte von $\mathrm{G}_{\mathrm{F}_4}$.

$\mathrm{f}_4(x) = -x\,(x-4)\,;$

$\Rightarrow$ VZW von f_4 von $-$ nach $+$ bei 0 und von $+$ nach $-$ bei a;

$\Rightarrow P_{\mathrm{HOP}}(4, 0);$

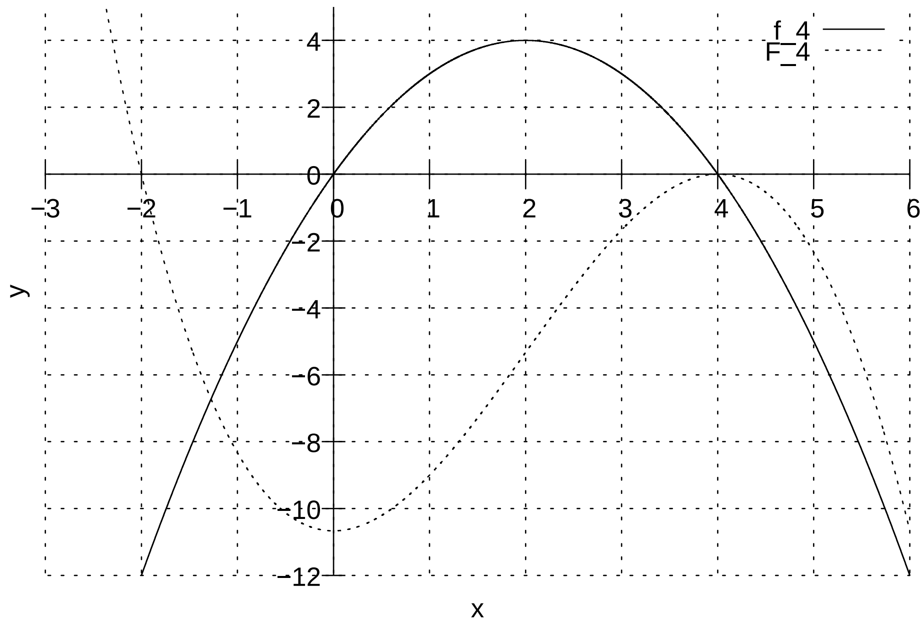
$\Rightarrow P_{\mathrm{TEP}}\left(0, -\frac{32}{3}\right)\,;$

$\mathrm{f}_4'(x) = 4 - 2x = -2\,(x-2)\,;$

$\Rightarrow$ VZW von f_4' von $+$ nach $-$ bei 2;

$\Rightarrow P_{\mathrm{WEP}}\left(2, -\frac{16}{3}\right)\,;$

f) Skizziere G_{f_4} und G_{F_4} in ein und demselben Koordinatensystem.



07.11.2005

„Und das kann man zweimal unterstreichen, wenn das einen befriedigt“

„[Jeder ist] defizitär“

„Mei´ Doofheit hat halt keine Grenzen“