30.01.2006

0.1 49. Hausaufgabe

0.1.1 Beweis der Unabhängigkeit von A und $\overline{B}$ unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit von A und B

Voraussetzung: $P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A)P_A(B); \Rightarrow P_A(B) = P(B);$

Vermutung: $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = P(A)\left(1 - P(B)\right);$

Beweis: $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P_A(\overline{B}) = P(A)\left(1 - P_A(B)\right) = P(A)\left(1 - P(B)\right);$

0.1.2 Stochastik-Buch Seite 146, Aufgabe 6

A und B seien zwei unabhängige Ereignisse $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. Man berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse, die durch folgende Aussagen beschrieben werden:

a) „Keines der beiden Ereignisse tritt ein“

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = \frac{1}{12};$

b) „Genau eines der beiden Ereignisse tritt ein“

$P\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = \frac{5}{12};$

c) „Beide Ereignisse treten ein“

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2};$

d) „Mindestens eines von beiden Ereignissen tritt ein“

$P\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] + P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12};$ (XXX: $\frac{11}{12}$?)

e) „Höchstens eines von beiden Ereignissen tritt ein“

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = P(\overline{A})P(\overline{B}) + \ldots = \frac{1}{2};$

0.1.3 Stochastik-Buch Seite 147, Aufgabe 9

Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der Ergebnisraum des Laplace-Experiments „Werfen eines Würfels". Es sei

- A: „Augenzahl größer 4"
- B: „Augenzahl gerade"
- C: „Augenzahl kleinergleich 3"
- D: „Augenzahl größergleich 4"
- E: „Augenzahl kleinergleich 5"
- F: „Augenzahl kleinergleich 4"

Zeigen Sie:

a) A und B sind vereinbar und unabhängig.

$A = \{5, 6\}; \quad B = \{2, 4, 6\};$

$A \cap B = \{6\} \neq \varnothing;$

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2} = P(B);$

b) C und D sind unvereinbar und abhängig.

$C = \{1, 2, 3\}; \quad D = \{4, 5, 6\};$

$C \cap D = \varnothing;$

$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = 0 \neq P(D);$

c) E und F sind vereinbar und abhängig.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \quad F = \{1, 2, 3, 4\};$

$E \cap F = \{1, 2, 3, 4\} \neq \varnothing;$

$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = 1 \neq P(F);$