09.02.2006

0.1 53. Hausaufgabe

0.1.1 Stochastik-Buch Seite 149, Aufgabe 21

Wir betrachten das zweimalige Werfen eines fairen Würfels und die drei Ereignisse A_i für $i = 1, 2, 3$. A_1 bzw. A_2 sei das Ereignis, dass beim 1. bzw. 2. Wurf eine ungerade Augenzahl fällt; A_3 sei das Ereignis, dass die Summe der geworfenen Augenzahlen ungerade ist.

a) Zeigen Sie, dass je zwei dieser drei Ereignisse unabhängig sind.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2;$$

$$A_1 = \{1, 3, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \Rightarrow |A_1| = 3 \cdot 6 = 18;$$

$$A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 3, 5\}; \Rightarrow |A_2| = 6 \cdot 3 = 18;$$

$$A_3 = \{(a, b) | (a + b) \bmod 2 = 1\}; \Rightarrow |A_3| = 6 \cdot 3 = 18;$$

$$\tfrac{1}{4} = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \tfrac{1}{4};$$

$$\tfrac{1}{4} = P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) = \tfrac{1}{4};$$

$$\tfrac{1}{4} = P(A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3) = \tfrac{1}{4};$$

b) Zeigen Sie, dass die A_i abhängig sind.

$$0 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \tfrac{1}{8};$$

0.1.2 Stochastik-Buch Seite 149, Aufgabe 22

Für drei Ereignisse A, B, C mit positiven Wahrscheinlichkeiten gelte

$$P(A) = P_B(A) = P_C(A) = P_{B\cap C}(A);$$

$$P(B) = P_A(B) = P_C(B) = P_{A\cap C}(B);$$

$$P(C) = P_A(C) = P_B(C) = P_{A\cap B}(C);$$

Zeigen Sie, dass diese drei Bedingungen mit den Multiplikationsregeln für drei unabhängige Ereignisse äquivalent sind.

$$P(A) = P_B(A) = \tfrac{P(A\cap B)}{P(B)}; \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B);$$

$P(A) = P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}; \Leftrightarrow P(A \cap C) = P(A)P(C);$

$P(B) = P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}; \Leftrightarrow P(B \cap C) = P(B)P(C);$

$P(A) = P_{B \cap C}(A) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}; \Leftrightarrow$
$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \cap C) = P(A)P(B)P(C);$