03.05.2006

0.1 75. Hausaufgabe

0.1.1 Geometrie-Buch Seite 113, Aufgabe 13a

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien linear unabhängig.
Untersuche $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf lineare Abhängigkeit:
$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{v} = \vec{a} - \vec{b};$
$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{a} - \mu\vec{b} = \vec{a}\,(\lambda + \mu) + \vec{b}\,(\lambda - \mu) = 0;$
$\lambda + \mu = \lambda - \mu = 0; \Leftrightarrow (\lambda, \mu) = (0, 0);$
Also: $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig.

0.1.2 Geometrie-Buch Seite 113, Aufgabe 14

$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien linear unabhängig.
Untersuche $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ auf linear Abhängigkeit:

a) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{v} = \vec{b} + \vec{c}; \quad \vec{w} = \vec{a} + \vec{c};$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{b} + \mu\vec{c} + \nu\vec{a} + \nu\vec{c} = \vec{a}\,(\lambda + \nu) + \vec{b}\,(\lambda + \mu) + \vec{c}\,(\mu + \nu) = 0;$

$\lambda + \nu = \lambda + \mu = \mu + \nu = 0; \Leftrightarrow (\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0);$

Also: $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig.

b) $\vec{u} = \vec{c} - \vec{a}; \quad \vec{v} = \vec{b} - \vec{c}; \quad \vec{w} = \vec{b} - \vec{a};$

$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \lambda\vec{c} - \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} - \mu\vec{c} + \nu\vec{b} - \nu\vec{a} = \vec{a}\,(-\lambda - \nu) + \vec{b}\,(\mu + \nu) + \vec{c}\,(\lambda - \mu) = 0;$

$-\lambda - \nu = \mu + \nu = \lambda - \mu = 0; \Leftrightarrow (\lambda, \mu, \nu) = (-k, -k, k);$

Also: $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig (es gibt nicht nur die triviale Nullsumme).

c) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}; \quad \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}; \quad \vec{w} = \vec{a} - \vec{c};$

$L\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \lambda\vec{c} + \mu\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{a} - \nu\vec{c} = \vec{a}\,(\lambda + \mu + \nu) + \vec{b}\,(\lambda + \mu) + \vec{c}\,(\lambda - \nu) = 0;$

$\lambda + \mu + \nu = \lambda + \mu = \lambda - \nu; \Leftrightarrow (\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0);$

Also: $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig.