23.05.2006

0.1 81. Hausaufgabe

0.1.1 Analysis-Buch Seite 113, Aufgabe 38

$\mathrm{f}_t(x) = (e^x - t)^2; \quad D_{\mathrm{f}_t} = \mathbb{R}; \quad t > 0;$

$\mathrm{f}_t'(x) = 2(e^x - t) \cdot e^x;$

d) G_{f_t}, die zugehörige Asymptote und die Gerade $x = -u$ ($u > 0$) umschließen ein Flächenstück.

Berechne dessen Inhalt. Was ergibt sich für $u \to +\infty$?

$A_t(u) = \int\limits_{-u}^{\ln 2t} (t^2 - \mathrm{f}_t(x))\,\mathrm{d}x = \left[t^2x - \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^xt - t^2x\right]_{-u}^{\ln 2t} = t^2 \cdot \ln 2t - \frac{1}{2}(2t)^2 + 2 \cdot 2t \cdot t - t^2 \cdot \ln 2t + t^2u + \frac{1}{2}e^{-2u} + 2e^{-u}t + t^2u;$

$\lim\limits_{u\to\infty} A_t(u) = \infty;$

e) Zeige, dass sich je zwei Graphen der Schar in genau einem Punkt P schneiden. Wann liegt P auf der y-Achse?

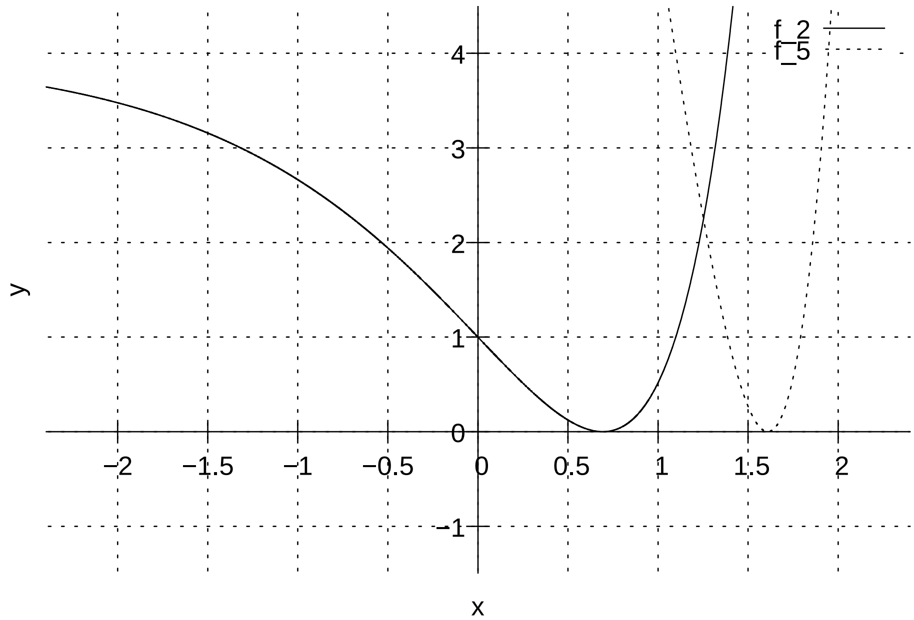
$\mathrm{f}_{t_1}(x) = \mathrm{f}_{t_2}(x);$

$e^x - t_1 = \pm(e^x - t_2) = \pm e^x \mp t_2;$

$e^x(1 \mp 1) = t_1 \mp t_2;$

$x = \ln \frac{t_1+t_2}{2}$; (definiert für alle t_1, t_2) $\to P\left(\ln \frac{t_1+t_2}{2}, \left(\frac{t_1+t_2}{2} - t_1\right)^2\right);$

$x = \ln \frac{t_1+t_2}{2} = 0; \Leftrightarrow \frac{t_1+t_2}{2} = 1; \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 2;$


f_2
f_5
y
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2