05.10.2006

0.1 99. Hausaufgabe

0.1.1 Stochastik-Buch Seite 208, Aufgabe 66

1. Ein Gerätehersteller führt vor jeder größeren Lieferung folgenden Text durch: Es werden nacheinander Geräte „mit Zurücklegen" geprüft, bis das zweite einwandfreie bzw. das zweite mangelhafte Gerät aufgetreten ist. Im ersten Fall wird die Lieferung freigegeben, im zweiten Fall zurückbehalten.

   a) Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum Ω an.
   $\Omega = \{11, 101, 100, 00, 010, 011\}$;

   b) Schreiben Sie das Ereignis L: „es wird geliefert" als Teilmenge von Ω. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_p(L)$ in Abhängigkeit vom Anteil p mangelhafter Geräte in der Lieferung.
   $L = \{11, 101, 011\} \subset \Omega$;
   $P_p(L) = (1-p)^2 + (1-p)^2 p + p(1-p)^2 = 2p^3 - 3p^2 + 1 = (2p+1)(1-p)^2$;

   c) Weisen Sie mit Methoden der Differentialrechnung nach, dass $P_p(L)$ mit wachsendem p monoton abnimmt.
   $\frac{\mathrm{d}P_p(L)}{\mathrm{d}p} = 6p^2 - 6p < 0$ für $p \in \left]0, 1\right[$;

   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit höchstens, dass Lieferungen mit einem Anteil $p \geq 0{,}2$ von mangelhaften Geräten bei diesem Testverfahren freigegeben werden?
   $P_{\geq 0{,}2}(L) \leq 2 \cdot (0{,}2)^3 - 3 \cdot (0{,}2)^2 + 1 = 90\,\%$;

   e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Sendung zurückbehalten, wenn $p = 0{,}1$ gilt?
   $1 - P_{0{,}1}(L) \approx 1 - 97\,\% = 3\,\%$;

2. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der nach dem in Teilaufgabe 1 beschriebenen Verfahren zu prüfenden Geräte an.

   a) Bestätigen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung
   $P(X=2) = 1 - 2p + 2p^2$; $\quad P(X=3) = 2p(1-p)$;
   $P(X=2) = (1-p)^2 + p^2 = 2p^2 - 2p + 1$;

$P(X = 3) = (1-p)^2 p + (1-p)\,p^2 + p^2\,(1-p) + p\,(1-p)^2 = 2p - 2p^2 = 2p\,(1-p)\,;$

b) Zeigen Sie, dass die Verteilung aus Teilaufgabe 2a den Forderungen von Kolmogorow: „nichtnegativ“ und „normiert“ genügt.

$p \in [0, 1]\,;$

$P(X = 2) + P(X = 3) = (2p^2 - 2p + 1) + (2p - 2p^2) = 1;$

$P(X = 3) = 2p\,(1-p) \geq 0$, sofern p wie implizit in der Angabe bestimmt $\in [0, 1]\,;$

$P(X = 2) = 2p^2 - 2p + 1 = (1-p)^2 + p^2 \geq 0$, da eine Summe von Quadraten im Reellen immer ≥ 0;

c) Weisen Sie nach: $E_p(X) = 2\,(1 + p - p^2)\,;$

$E_p(X) = 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) = -2p^2 + 2p + 2;$

d) Für welchen Wert von p müssen im Durchschnitt die meisten Geräte geprüft werden? Wie viele sind dies?

$\frac{\mathrm{d}E_p(X)}{\mathrm{d}p} = -4p + 2 \overset{!}{=} 0;$

$\Leftrightarrow p = \frac{1}{2};$

$E_{\frac{1}{2}}(X) = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 2{,}5;$

(Aus Abiturprüfung 1984.)

0.1.2 Geometrie-Buch Seite 208, Aufgabe 6

Berechne den Umfang des Dreiecks ABC:

b) $A(1, -6, -6);\quad B(2, 2, -2);\quad C(0, -2, 2);$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{CA}\right| = 9 + 6 + 9 = 24;$

c) $A(9, 9, 0);\quad B(-6, 3, 9);\quad C(0, -6, -6);$ Umkreisradius?

$\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{CA}\right| \approx 55{,}5;$

$$\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2 \sin \arccos \frac{\vec{A}\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}} = r;$$

$r = \sqrt{114};$