03.07.2006

0.1 Zufallsgrößen

Eine Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Zufallsgröße (-variable).

„Wenn ich eine Wand sehe, muss ich nicht erst durch sie hindurch gehen, um zu sehen, dass es wirklich eine Wand ist.“ 12.07.2006

0.1.1 Die Wahrscheinlichkeitsfunktion

Geg.: (Ω, P), X auf Ω, P_X auf (Ω, P)

$$\tilde{P}_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\,; \quad x \mapsto \begin{cases} P_X(x) & \text{falls } x \in W_X; \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

0.1.2 Die (kumulative) Verteilungsfunktion

Sei P_X eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf (Ω, P) und dem Wertebereich von X $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Die Funktion $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\,; \quad x \mapsto P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq x\})\,;$ heißt (kumulative) Verteilungsfunktion von X auf (Ω, P).

Folgerungen:

$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} \underbrace{P(X = x_i)}_{P_X(x_i)}$, da $\bigcup_{i=1,2,\ldots,n} \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_i\} = \Omega;$ 23.07.2006

0.1.3 Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung und Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen

$P(X = x \cap Y = y) = P_{X,Y}(x, y);$

(Ω, P) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und X und Y seien Zufallsgrößen auf Ω mit den Wertemengen W_X und W_Y.

a) Die Funktion $P_{X,Y}\colon W_X \times W_Y \to [0,1]\,; (x,y) \mapsto P(X = x \cap Y = y) = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\})$ heißt gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und Y.

b) [Gilt für alle $x \in W_X$ und für alle $y \in W_Y$, dass die Ereignisse $X = x$ und $Y = y$ sind unabhängig sind, so sind X und Y unabhängig.] 25.07.2006

Die Ereignisse $X = x$ und $Y = y$ sind unabhängig **für alle** $x \in W_X$ und $y \in W_Y$. $\Leftrightarrow$

$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ für alle $x \in W_X$ und $y \in W_Y$. $\Leftrightarrow$

$P_{X,Y}(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$ für alle $x \in W_X$, $y \in W_Y$. $\overset{\text{D}}{\Leftrightarrow}$

X und Y sind unabhängig.

15.09.2006

0.1.4 Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsgröße X über (Ω, P) mit der Wertemenge $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$E(X) := x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \cdots + x_n P(X = x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$;

„Im Grund sitzt keiner gescheit, aber alle halbwegs gut"

$E(X) = x_1 \sum\limits_{\omega_i \in (X = x_1)} P(\{\omega_i\}) + x_2 \sum\limits_{\omega_i \in (X = x_2)} P(\{\omega_i\}) + \cdots + x_n \sum\limits_{\omega_i \in (X = x_n)} P(\{\omega_i\}) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$;

„weißt, einmal gehst ´rein [ins Haus] und einmal ´raus; was war jetzt richtig?" 18.09.2006

Rechnen mit Erwartungswerten

- X sei eine Zufallsgröße auf (Ω, P) mit der Wertemenge $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

  $Y := aX + b; \quad a, b \in \mathbb{R}$;

  $Y\colon \Omega \to W_Y = \{ax + b \,|\, x \in W_X\}; \quad \omega \mapsto aX(\omega) + b$;

  $E(Y) = E(aX+b) = \sum\limits_{x \in W_X} (ax + b)\, P(X = x) = \sum\limits_{x \in W_X} [axP(X = x) + bP(X = x)] = a \sum\limits_{x \in W_X} xP(X = x) + b \sum\limits_{x \in W_X} P(X = x) = aE(X) + b$;

- X und Y seien Zufallsgrößen über (Ω, P) mit den Wertemengen $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und $W_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.

  $E(X+Y) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} [X(\omega)P(\{\omega\}) + Y(\omega)P(\{\omega\})] = \sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) + \sum\limits_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\{\omega\}) = E(X) + E(Y);$

20.09.2006

- Seien X und Y unabhängige Zufallsgrößen über (Ω, P) mit den Wertemengen $W_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und $W_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

  $Z\colon \Omega \to W_Z$ (Wertemenge) $\quad \omega \mapsto X(\omega)Y(\omega);$

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{\substack{x\in W_X\\ y\in W_Y\\ xy\in W_Z}} xyP(X = x \cap Y = y) = \\
&= \sum_{\substack{x\in W_X\\ y\in W_Y\\ xy\in W_Z}} xyP(X = x \cap Y = y) + \underbrace{\sum_{\substack{x\in W_X\\ y\in W_Y\\ xy\notin W_Z}} xy\, \underbrace{P(\underbrace{X = x \cap Y = y}_{\varnothing})}_{0}}_{0} = \\
&= \sum_{\substack{x\in W_X\\ y\in W_Y}} xyP(X = x \cap Y = y) = \sum_{\substack{x\in W_X\\ y\in W_Y}} xP(X = x)\, yP(Y = y) = \\
&= \sum_{x\in W_X} xP(X = x) \cdot \sum_{y\in W_Y} yP(Y = y) = \\
&= E(X)E(Y);
\end{aligned}
$$