23.01.2006

0.1 2. Klausur am 11.1.2006

1. Zu Beginn einer Unterrichtsstunde wird in einem Kurs aus vier Mädchen und fünf Jungen eine Anwesenheitskontrolle durchgeführt.

   Beschreibe drei Zufallsexperimente mit den Ergebnisräumen Ω_1, Ω_2 und Ω_3 so, dass Ω_2 eine Vergröberung von Ω_1 und Ω_3 eine Vergröberung von Ω_2 ist.

   Gib die Ergebnisräume beschreibend oder explizit einschließlich ihrer Mächtigkeiten an und stelle die beiden Vergröberungsabbildungen dar. (16 P)

   $\Omega_1 = \{a, \overline{a}\}\,; \quad |\Omega_1| = 2^9;$

   $\Omega_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\,; \quad |\Omega_2| = 10;$

   $\Omega_3 = \{\text{alle da}, \text{nicht alle da}\}\,; \quad |\Omega_3| = 2;$

   $\Omega_1 \to \Omega_2 \quad 9$-Tupel (Anzahl der „$a$" in einem 9-Tupel sei z) $\mapsto z$

   $\Omega_2 \to \Omega_3 \quad 0 \mapsto \text{nicht alle da}, 1 \mapsto \text{nicht alle da}, \ldots, 8 \mapsto \text{nicht alle da}, 9 \mapsto$ alle da

2. Aus einer Urne mit von 1 bis N durchnummerierten Kugeln werden n Kugeln unter Beachtung der Reihenfolge gezogen. Sowohl das Ziehen mit Zurücklegen als auch das Ziehen ohne Zurücklegen werden dabei als Laplace-Experimente angenommen.

   Untersuche, ob es unter den gegebenen Bedingungen sinnvoll ist, auch die beiden anderen Zieharten ohne Beachtung der Reihenfolge als Laplace-Experimente aufzufassen. (5½ P aufs Ziehen ohne Zurücklegen, 6½ aufs Ziehen mit Zurücklegen)

3. In einem Klassenzimmer mit von 1 bis 22 durchnummerierten Tischen soll ein Kurs mit 17 Teilnehmern eine Klausur schreiben. Dabei soll jeder Prüfling allein an einem Tisch sitzen. (22 P)

   a) Bestimme die Anzahl der unterschiedlichen Belegungen, wenn nur darauf geachtet wird, welche Tische von den

Prüflingen benutzt werden. Berechne damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Tische mit den Nummern

$\binom{22}{17} = 26\,334;$

aa)

6 bis 22

$P = \frac{1}{26\,334} \approx 3{,}1 \cdot 10^{-5};$

ab)

1 und 7

$P = \frac{\binom{20}{15}}{26\,334} \approx 58{,}9\,\%;$

ac)

3 bis 21

$P = \frac{0}{26\,334} = 0;$

ad)

2 bis 8

$P = \frac{\binom{15}{10}}{26\,334} \approx 11{,}4\,\%;$

besetzt sind. (14 P)

b) Bestimme die Anzahl der unterschiedlichen Belegungen, wenn bei jedem Prüflung darauf geachtet wird, an welchem Tisch er sitzt. Berechne damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass (8 P)

$22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot \dots \cdot 7 \approx 9{,}37 \cdot 10^{18};$

ba)

zwei bestimmte Prüflinge an Tischen mit Nummern größer als 15 sitzen.

$P = \frac{(7 \cdot 6) \cdot (20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 6)}{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot \dots \cdot 7} \approx 9{,}1\,\%;$

bb)

zwei Prüflinge an Tischen mit aufeinanderfolgenden Nummern sitzen.

$P = 1;$

4. Vier verschiedene Haarwaschmittel a, b, c und d sollen in einem Testverfahren auf ihre Hautverträglichkeit hin untersucht werden. Dabei wird nur zwischen „hautverträglich“ und „nicht hautverträglich“ unterschieden. Die möglichen Ergebnisse sollen durch geeignete Viertupel beschrieben werden. (22 P)

   a) Erläutere die Bedeutung der von die verwendeten Viertupel und gib den Ergebnisraum dieses Tests durch Auflisten der Ergebnisse an. Verwende dazu ein Baumdiagramm. (11 P)

b) Beschreibe die folgenden Sachverhalte durch jeweils ein Ereignis und berechne seine Wahrscheinlichkeit. (11 P)

- A: Nur das Haarwaschmittel a ist hautverträglich.
- B: Mindestens zwei Haarwaschmittel sind hautverträglich.
- C: Das Haarwaschmittel a ist hautverträglich.

5. Bestimme die Anzahl der Teiler von $13 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23$ unter Erläuterung deiner Überlegungen. 24.01.2006

- Nicht zerlegbare Teiler: 5
- Teiler aus zwei Primfaktoren: $\binom{4}{2} + 1 + 1 = 8;$
- Teiler aus drei Primfaktoren: $\binom{4}{3} + \binom{3}{1} + \binom{3}{1} = 10;$
- Teiler aus vier Primfaktoren: $\binom{4}{4} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + 1 = 8;$
- Teiler aus fünf Primfaktoren: 4
- Teiler aus sechs Primfaktoren: 1

[Oder: $|\{0,1\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}| = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36;$]