22.06.2006
04.07.2006
08.07.2006

0.1 4. Klausur am 21.6.2006

1. Untersuche, ob $V = \{\binom{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mit $\binom{a_1}{b_1} + \binom{a_2}{b_2} = \binom{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ und $k \cdot \binom{a_1}{b_1} = \binom{k \cdot a_1}{b_1}$, $k \in \mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. (6 P)

   $\lambda \binom{a}{b} + \mu \binom{a}{b} = \binom{\lambda a}{b} + \binom{\mu a}{b} = \binom{\lambda a + \mu a}{2b} = \binom{(\lambda+\mu)a}{2b} \neq \binom{(\lambda+\mu)a}{b} = (\lambda + \mu) \binom{a}{b}$ für $b \neq 0$;

   $\rightarrow V$ ist kein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

2. Untersuche, ob aus der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die lineare Unabhängigkeit von $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{z}$ folgt, wenn gilt:

   $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ und
   $\vec{w} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ und
   $\vec{z} = \vec{b} - \vec{c}$. (10 P)

   $k\vec{v} + l\vec{w} + m\vec{z} = k\left(\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}\right) + l\left(2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}\right) + m\left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a}\,(k + 2l) + \vec{b}\,(2k - l + m) + \vec{c}\,(3k + 2l - m) = \vec{0}$;

   $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear unabhängig, also:

   $k + 2l = 0; \quad 2k - l + m = 0; \quad 3k + 2l - m = 0;$

   $\Rightarrow k = l = m = 0$, d.h. $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ linear unabhängig.

3. Gegeben ist für $a \in \mathbb{R}_0^+$ die Funktionenschar f_a mit $\mathrm{f}_a(x) = 4 \cdot e^{-x}\,(a - e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$. (20 P)

   a) Untersuche die Graphen der Scharfunktionen auf Achsenschnittpunkte, relative Hoch- und Tiefpunkte und Wendepunkte. Bestimme gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte. (8 P)

   - Für $a = 0$: $\mathrm{f}_0(x) = -4e^{-2x}$;
     Schnittpunkt mit y-Achse: $(0, -4)$
     Kein Schnittpunkt mit x-Achse
     Keine Extrem- und Wendestellen
   - Für $a > 0$:
     $\mathrm{f}_a'(x) = 4e^{-x}\,(2e^{-x} - a)$;
     $\mathrm{f}_a''(x) = 4e^{-x}\,(a - 4e^{-x})$;
     $\mathrm{f}_a'(x) = 0$ für $x = -ln\frac{a}{2} = \ln\frac{2}{a}$;
     $\mathrm{f}_a''\left(-\ln\frac{a}{2}\right) = -2a^2 > 0$;

Hochpunkt: $\left(-\ln\frac{a}{2}, a^2\right)$
Vorzeichenwechsel von $f_a''(x)$ bei $-ln\frac{a}{4}$, da $4e^{-x}$ stets größer 0 und $(a - 4e^{-x})$ echt monoton wachsend.

b) Bestimme das Verhalten von $f_a(x)$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. (2 P)

$\lim\limits_{x\to\infty} 4e^{-x}\left(a - e^{-x}\right) = 4 \cdot 0 \cdot (a - 0) = 0;$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{4e^{-x}}_{\to+\infty} \underbrace{\left(a - e^{-x}\right)}_{\to-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} 4e^{-2x}\left(\frac{a}{e^{-x}} - 1\right) = -\infty;$

c) Zeige, dass F_a mit $F_a(x) = 2\left(a - e^{-x}\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f_a ist. (2 P)

d) Zeige, dass für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ die Funktion $\tilde{F}_\alpha$ mit $\tilde{F}_\alpha(x) = 2\left(\alpha - e^{-x}\right)^2$, $x \in \left]-\ln\alpha, \infty\right[$ eine Umkehrfunktion hat, und gib Definitionsmenge und Funktionsterm der Umkehrfunktion an. (8 P)

$\tilde{F}_\alpha'(x) = f_\alpha(x)$ für $x \in \left]-\ln a, \infty\right[;$
$\tilde{F}_\alpha'(x)$ hat auf $\left]-\ln a, \infty\right[$ keine Nullstellen, d.h. $\tilde{F}_\alpha$ ist echt monoton auf $\left]-\ln a, \infty\right[$.
Also ist $\tilde{F}_\alpha$ injektiv.
$\tilde{F}_\alpha$ ist surjektiv, falls als Zielbereich $W_{\tilde{F}_\alpha}$ verwendet wird. (2 P)
$D_{\tilde{F}_\alpha^{-1}} = W_{\tilde{F}_\alpha} = \left[0, 2\alpha^2\right[;$ (da $\tilde{F}_\alpha$ stetig und echt monoton)
$\lim\limits_{x\to-\ln\alpha} \tilde{F}_\alpha(x) = 0; \quad \lim\limits_{x\to\infty} \tilde{F}_\alpha(x) = 2\alpha^2;$ (3 P)
$y = 2\left(\alpha - e^{-x}\right)^2 > 0; \quad x > -\ln\alpha;$
$\sqrt{y} = \sqrt{2\left(\alpha - e^{-x}\right)^2} = \sqrt{2}\left|\alpha - e^{-x}\right| = \sqrt{2}\left(\alpha - e^{-x}\right);$
...
$\tilde{F}_\alpha^{-1}(x) = -\ln\left(\alpha - \sqrt{\frac{x}{2}}\right);$

„Ich will gar nicht immer Recht haben... Unter dem Schicksal leide ich schon seit langem...“