06.11.2006 07.11.2006

0.1 Formelsammlung zur 5. Klausur

0.1.1 Analytische Geometrie

Umrechnungen zwischen Parameter- und Koordinaten/Normalenform

- Umrechnung der Parameterform einer Ebene mit Aufpunkt A und Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in die Normalenform:
  - $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}; \quad n_0 = -\vec{n}\vec{A};$
    $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0;$
  - $\det\left(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}\right) \stackrel{!}{=} 0$, da $\left\{\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}\right\}$ komplanar ist/sein muss.
- Umrechnung der Koordinatenform einer Ebene in die Parameterform:

  Definition: $x_2 := \lambda; \quad x_3 := \mu;$

  Koordinatenform nach x_1 auflösen $\rightarrow$ Term für x_1

  x_1, $x_2 = \lambda$ und $x_3 = \mu$ in $\vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ einsetzen und nach 1, λ und μ gruppieren.

Winkel

- Winkel $\angle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0°, 180°]$ zwischen zwei Vektoren:

  $\cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|};$
- Winkel $\angle(g, h) \in [0°, 90°]$ zwischen zwei Geraden mit Richtungsvektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$:

  $\cos\angle(g, h) = \left|\frac{\vec{g}\vec{h}}{|\vec{g}||\vec{h}|}\right|;$
- Winkel $\angle(g, E) \in [0°, 90°]$ zwischen einer Geraden mit Richtungsvektor $\vec{g}$ und einer Ebene mit Normalenvektor $\vec{n}$:

  $\cos\left[90° - \angle(g, E)\right] = \sin\angle(g, E) = \left|\frac{\vec{g}\vec{n}}{|\vec{g}||\vec{n}|}\right|;$

- Winkel $\angle(E,F) \in [0°, 90°]$ zwischen zwei Ebenen mit Normalenvektoren $\vec{e}$ und $\vec{f}$:

  $\cos\angle(E,F) = \left|\frac{\vec{e}\vec{f}}{|\vec{e}||\vec{f}|}\right|;$

Abstände, Normalen

- Abstand $d(P,Q)$ von zwei Punkten:

  $d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\overrightarrow{PQ}^2};$

- Abstand $d(P,g)$ von einem Punkt zu einer Geraden mit Richtungsvektor $\vec{g}$ und Laufparameter λ:

  - Allgemeinen Abstand $d(P, X_g(\lambda))$ berechnen (in Abhängigkeit von λ), diesen dann ableiten, auf Null setzen und dann nach λ auflösen
    Kurz: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{PX_g(\lambda)}\right|^2 \overset{!}{=} 0;$
  - $d(P,g) = d(P,F) = \left|\overrightarrow{PF}\right|$, wobei $\underbrace{\overrightarrow{PF}}_{\overrightarrow{PX(\lambda)}} \cdot \vec{g} = 0;$
  - Hilfsebene H (Normalenvektor $\vec{h}$) durch P senkrecht zu g legen:
    $\vec{h} := \vec{g}; \quad h_0 = -\vec{h}\vec{P};$
    Dann $\vec{X}_g$ in die Normalenform von H einsetzen, auflösen (eine Gleichung; Unbekannte ist λ)
    Dann weiter wie oben.

- Abstand $d(P,E)$ von einer Ebene mit Normalenvektor $\vec{n}$ zu einem Punkt:

  $d(P,E) = d(P,F)$ mit $E \cap n = \{F\}$ und $n\colon \vec{X} = \vec{P} + \lambda\vec{n};$

- Abstand $d(g,E)$ von einer Ebene zu einer parallelen Geraden:

  $d(g,E) = d(P,E)$, mit P als beliebigen festen Punkt von g

- Abstand $d(E,F)$ von zwei parallenen Ebenen:

  $d(E,F) = d(P,F)$, mit P als beliebigen festen Punkt von E

Projektion

- (Senkrechte) Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf einen Vektor $\vec{n}$:

  $\vec{n}_{\vec{a}} = \vec{n}^0 \cdot |\vec{a}| \cos\varphi$;

- (Senkrechte) Projektion eines Punkts auf eine Gerade:

  Die Projektion ist der Lotfußpunkt des Lots durch den Punkt auf die Gerade.

- (Senkrechte) Projektion eines Punkts P auf eine Ebene (Normalenvektor $\vec{e}$):

  Die Projektion ist der Lotfußpunkt des Lots durch den Punkt auf die Ebene.

  Besonders schneller Weg zur Normalengleichung:

  $n\colon \vec{X} = \vec{P} + \lambda\vec{e}$;

- (Senkrechte) Projektion einer Geraden auf eine Ebene:

  Zwei beliebige feste Punkte der Geraden auf die Ebene projezieren und die Projektionspunkte dann verbinden. (Zweckmäßigerweise ist einer der Punkte der Schnittpunkt von Gerade und Ebene)

0.1.2 Stochastik

Definitionen

– Definitionen zur Zufallsgröße

- Zufallsgröße: $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$;

- Wahrscheinlichkeitsverteilung:

  $P_X\colon W_X \to [0,1]\,; \quad x \mapsto P(X=x)$;

- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

  $\tilde{P}_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\,;$

  x-Werte, die an denen P_X nicht definiert ist, werden auf 0 gesetzt.

- Kumulative Verteilungsfunktion:
  $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\,; \quad x \mapsto P(X \le x);$
- Dichtefunktion
- Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung: $P_{X,Y}\colon W_X \times W_Y \to [0,1]\,;$
- Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen X und $Y \Leftrightarrow$
  $P(X=x)P(Y=y) = P(X=x \cap Y=y)$ für alle $x \in W_X$ und für alle $y \in W_Y$;

– Definitionen zu Charakteristika von Zufallsgrößen

- Erwartungswert $E(X) = \mu \in \mathbb{R}$ einer Zufallsgröße:
  $E(X) = \sum\limits_{x \in W_X} xP(X=x) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})\,;$
- Varianz $\operatorname{Var}(X) = \sigma^2(X) = \sigma^2 \in \mathbb{R}$ einer Zufallsgröße:
  $\operatorname{Var}(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \sum\limits_{x \in W_X} (x - E(x))^2\, P(X=x) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - E(x))^2\, P(\{\omega\})\,;$
- Standardabweichung einer Zufallsgröße: $\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)} \in \mathbb{R}_0^+\,;$

Rechenregeln

– Rechenregeln zum Erwartungswert

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y);$
- $E(aX+b) = aE(X) + b;$
- $E(XY) = E(X)E(Y)$, sofern X und Y unabhängig sind.

– Rechenregeln zur Varianz

- (Spezielle) Verschiebungsregel: $\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X);$
- $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$, sofern X und Y unabhängig sind.
- $\operatorname{Var}(aX+b) = a^2 \operatorname{Var}(X);$

– Rechenregeln zu gemittelten Zufallsgrößen

- $E(\overline{X}) = E(X)$;
- $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \mathrm{Var}(X)/n$;