Tests

Ingo Blechschmidt

1. Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

14.11.2005

1 Tests

1.1 1. Klausur am 9.11.2005

1. Berechne $\int\limits_1^5 \left(\frac{1}{4}x^3 - 3x + 5\right) \mathrm{d}x$.

   $\int\limits_1^5 \left(\frac{1}{4}x^3 - 3x + 5\right) \mathrm{d}x = \ldots = 23;$

2. Berechne den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird. Dabei ist

   $\mathrm{f}(x) = 5x^3 - 2x^2 - 6; \quad x \in \mathbb{R};$ und
   $\mathrm{g}(x) = 3x^3 + 2x^2 + 10x - 18; \quad x \in \mathbb{R};$

   $\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 18;$

   Nullstellen: -2, 1, 3

   $\phi'(x) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x);$

   $\phi(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + 12x;$

   $A = |\phi(1) - \phi(-2)| + |\phi(3) - \phi(1)| = \frac{253}{6};$

   „Aber es ist in keiser Weise stringent[1]“

3. Gegeben sind die Geraden $\mathrm{g} : x = 1$ und $\mathrm{h} : y = 1$ sowie die Funktion f_a, $a \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{f}_a(x) = a \cdot x^2$. [Spätere Ergänzung: $x \geq 0$]

   Berechne den Inhalt der angegebenen Fläche.

   a) Fläche, die von den Geraden g und h und dem Graphen von f_4 eingeschlossen ist.

   $A = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} 4x^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} = \ldots = \frac{2}{3};$

   b) Fläche, die von der Geraden g und h und dem Graphen von $\mathrm{f}_{\frac{1}{5}}$ eingeschlossen ist.

   $A = \sqrt{5} - 1 - \int\limits_{1}^{\sqrt{5}} \frac{1}{5}x^2 \,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{14}{15};$

   „das kann man halt noch eintippen und dann kommt halt irgendwas ´raus“

   c) $A = 1 - 2\int\limits_{0}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3};$

4. Für $0 < a < b$ sei $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_k = a \cdot q^k$, $k = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. 16.11.2005

   a) Zeige, dass gilt: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b;$

   $x_0 = a \cdot q^0 = a;$

   $x_n = a \cdot q^n = a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^n = a \cdot \frac{b}{a} = b;$

   $x_{k+1} = x_k \cdot q > x_k$, da $q > 1$, weil $b > a > 0$.

[1] „folgerichtig, einsichtig, nachvollziehbar“

b) Bestimme für festes n den maximalen Abstand d_n benachbarter Stellen x_k und untersuche das Verhalten von d_n für $n \to \infty$.

$x_{k+1} - x_k = aq^{k+1} - aq^k = aq^k\,(q-1)$, maximal für $k = n-1$.

$d_n = b - a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n-1}{n}} \to b - a\left(\frac{b}{a}\right)^1 = b - b = 0$ für $n \to \infty$.

c) Zeige, dass die Untersumme zur Funktion f_α, $a \in \mathbb{N}$ mit $f_\alpha(x) = x^\alpha$, $x \in [a,b]$ bezogen auf die Stellen x_k gegeben ist durch $a^{\alpha+1} \cdot (q-1) \cdot \left(1 + q^{\alpha+1} + q^{2(\alpha+1)} + \cdots + q^{(n-1)(\alpha+1)}\right)$

$$\begin{aligned} s_n &= (aq-a)\,a^\alpha + (aq^2 - aq)\,(aq)^\alpha + (aq^3 - aq^2)\,(aq^2)^\alpha + \cdots + \\ &+ (aq^n - aq^{n-1})\,(aq^{n-1})^\alpha = \\ &= a \cdot a^\alpha \cdot (q-1) \cdot \left(1 + q \cdot q^\alpha + q^2 \cdot q^{2\alpha} + \cdots + q^{n-1} \cdot q^{(n-1)\alpha}\right) = \\ &= a^{\alpha+1}\,(q-1)\left(1 + q^{\alpha+1} + q^{2(\alpha+1)} + \cdots + q^{(n-1)(\alpha+1)}\right); \end{aligned}$$

14.11.2005

5. Betrachtet werden die auf $[a,b]$ definierten Funktionen f, F_k und F_l mit $\mathrm{F}_k(x) = \int\limits_k^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ und $\mathrm{F}_l(x) = \int\limits_l^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ gemäß folgender Skizze:

   [Skizze]

   a) Skizziere in ein Koordinatensystem möglichst genau die Graphen von F_k und F_l.

   b) Gib einen Zusammenhang zwischen F_k und F_l an.

   c) Skizziere den Graphen einer Stammfunktion von f, die nicht als Integralfunktion darstellbar ist, und begründe deine Wahl.

23.01.2006

1.2 2. Klausur am 11.1.2006

1. Zu Beginn einer Unterrichtsstunde wird in einem Kurs aus vier Mädchen und fünf Jungen eine Anwesenheitskontrolle durchgeführt.

Beschreibe drei Zufallsexperimente mit den Ergebnisräumen Ω_1, Ω_2 und Ω_3 so, dass Ω_2 eine Vergröberung von Ω_1 und Ω_3 eine Vergröberung von Ω_2 ist.

Gib die Ergebnisräume beschreibend oder explizit einschließlich ihrer Mächtigkeiten an und stelle die beiden Vergröberungsabbildungen dar. (16 P)

$\Omega_1 = \{a, \overline{a}\}\,; \quad |\Omega_1| = 2^9;$

$\Omega_2 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\,; \quad |\Omega_2| = 10;$

$\Omega_3 = \{\text{alle da}, \text{nicht alle da}\}\,; \quad |\Omega_3| = 2;$

$\Omega_1 \to \Omega_2 \quad 9$-Tupel (Anzahl der „$a$“ in einem 9-Tupel sei z) $\mapsto z$

$\Omega_2 \to \Omega_3 \quad 0 \mapsto \text{nicht alle da}, 1 \mapsto \text{nicht alle da}, \ldots, 8 \mapsto \text{nicht alle da}, 9 \mapsto$ alle da

2. Aus einer Urne mit von 1 bis N durchnummerierten Kugeln werden n Kugeln unter Beachtung der Reihenfolge gezogen. Sowohl das Ziehen mit Zurücklegen als auch das Ziehen ohne Zurücklegen werden dabei als Laplace-Experimente angenommen.

   Untersuche, ob es unter den gegebenen Bedingungen sinnvoll ist, auch die beiden anderen Zieharten ohne Beachtung der Reihenfolge als Laplace-Experimente aufzufassen. (5½ P aufs Ziehen ohne Zurücklegen, 6½ aufs Ziehen mit Zurücklegen)

3. In einem Klassenzimmer mit von 1 bis 22 durchnummerierten Tischen soll ein Kurs mit 17 Teilnehmern eine Klausur schreiben. Dabei soll jeder Prüfling allein an einem Tisch sitzen. (22 P)

   a) Bestimme die Anzahl der unterschiedlichen Belegungen, wenn nur darauf geachtet wird, welche Tische von den Prüflingen benutzt werden. Berechne damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Tische mit den Nummern

   $\binom{22}{17} = 26\,334;$

   aa)

   6 bis 22

   $P = \frac{1}{26\,334} \approx 3{,}1 \cdot 10^{-5};$

   ab)

   1 und 7

   $P = \frac{\binom{20}{15}}{26\,334} \approx 58{,}9\,\%;$

ac)

3 bis 21
$P = \frac{0}{26\,334} = 0;$

ad)

2 bis 8
$P = \frac{\binom{15}{10}}{26\,334} \approx 11{,}4\,\%;$

besetzt sind. (14 P)

b) Bestimme die Anzahl der unterschiedlichen Belegungen, wenn bei jedem Prüflung darauf geachtet wird, an welchem Tisch er sitzt. Berechne damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass (8 P)

$22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot \dots \cdot 7 \approx 9{,}37 \cdot 10^{18};$

ba)

zwei bestimmte Prüflinge an Tischen mit Nummern größer als 15 sitzen.
$P = \frac{(7 \cdot 6) \cdot (20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 6)}{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot \dots \cdot 7} \approx 9{,}1\,\%;$

bb)

zwei Prüflinge an Tischen mit aufeinanderfolgenden Nummern sitzen.
$P = 1;$

4. Vier verschiedene Haarwaschmittel a, b, c und d sollen in einem Testverfahren auf ihre Hautverträglichkeit hin untersucht werden. Dabei wird nur zwischen „hautverträglich“ und „nicht hautverträglich“ unterschieden. Die möglichen Ergebnisse sollen durch geeignete Viertupel beschrieben werden. (22 P)

   a) Erläutere die Bedeutung der von die verwendeten Viertupel und gib den Ergebnisraum dieses Tests durch Auflisten der Ergebnisse an. Verwende dazu ein Baumdiagramm. (11 P)

   b) Beschreibe die folgenden Sachverhalte durch jeweils ein Ereignis und berechne seine Wahrscheinlichkeit. (11 P)

   - A: Nur das Haarwaschmittel a ist hautverträglich.
   - B: Mindestens zwei Haarwaschmittel sind hautverträglich.
   - C: Das Haarwaschmittel a ist hautverträglich.

5. Bestimme die Anzahl der Teiler von $13 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23$ unter Erläuterung deiner Überlegungen. 24.01.2006

   - Nicht zerlegbare Teiler: 5
   - Teiler aus zwei Primfaktoren: $\binom{4}{2} + 1 + 1 = 8$;
   - Teiler aus drei Primfaktoren: $\binom{4}{3} + \binom{3}{1} + \binom{3}{1} = 10$;
   - Teiler aus vier Primfaktoren: $\binom{4}{4} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + 1 = 8$;
   - Teiler aus fünf Primfaktoren: 4
   - Teiler aus sechs Primfaktoren: 1

   [Oder: $|\{0,1\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \times \{0,1\}| = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36$;]

24.04.2006

1.3 3. Klausur am 5.4.2006

1. Bei der Einschulung wurden alle Schüler eines Jahrgangs einem Eignungstest unterzogen. Am Ende der Schulzeit bestehen $35\,\%$ dieser Schüler die Abschlussprüfung nicht. Davon hatten $85\,\%$ im Eignungstest ein schlechtes Ergebnis. Von den Schülern mit bestandener Abschlussprüfung hatten $2\,\%$ im Eignungstest schlecht abgeschnitten. (6 P)

   a) Stelle diesen Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar und gib dabei für jeden Ast die zugehörige Wahrscheinlichkeit an. (2 P)

   A: Abschlussprüfung bestanden
   E: Eignungstest gut

```
            +---+---+
     0,65 /         \ 0,35
         /           \
        A            _
                     A
0,98 / \ 0,02  0,15 / \ 0,85
    /   \          /   \
   E     E        E     E
```

   b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schüler mit schlechtem Ergebnis im Eignungstest die Abschlussprüfung nicht besteht. (4 P)

   $P_{\overline{E}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(\overline{A} \cap E)}{P(A)P_A(E) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(E)} \approx 95{,}8\,\%$;

2. Aus der Menge der ersten dreißig natürlichen Zahlen wird zufällig eine Zahl ausgewählt. Untersuche, ob die Geradzahligkeit der Zahl selbst stoachstisch unabhängig ist von der Geradzahligkeit ihrer Quersumme. (4 P)

```
    *     *     *     *
 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
    *     *     *     *

                          *
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
*     *     *     *     *  *

   *     *     *     *
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
   *     *     *     *
```

$|G| = 15; \quad |QG| = 14; \quad |G \cap QG| = 9;$

$P(G)P(QG) = \frac{15}{30}\frac{14}{30} = \frac{7}{30} \neq \frac{9}{30} = P(G \cap QG);$

$\Rightarrow$ Grund für QG abhängig.

3. Gegeben sind die Ebene $E\colon x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$ und die Geradenschar $g_a\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ a^2 \end{pmatrix} + k\vec{v_a}$ mit $\vec{v_a} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a, k \in \mathbb{R}$. (6 P)

   a) S_a ist die Spitze des Repräsentanten von $\vec{v_a}$, der den Ursprung als Fußpunkt hat. Beschreibe in Worten die geometrische Bedeutung der Menge $M = \{S_a | a \in \mathbb{R}\}$ möglichst genau. (2 P)

   $\vec{v_a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R};$

   M ist eine Gerade parallel zur x_1-Achse durch den Punkt $(1, 2, 3)$.

   b) Bestimme alle Werte für a, für die gilt: (4 P)

   $g_a \cap E\colon 2 + k\,(1-a) - 3 + 2k + a^2 + 3k - 1 = 0;$

   $k\,(6-a) = 2 - a^2;$

   (a) Fall: $6 - a \neq 0;$
   $k = \frac{2-a^2}{6-a}$, d.h. k ist eindeutig bestimmt.

   (b) Fall: $6 - a = 0;$
   $6 = a;$
   $k \cdot 0 \neq 2 - 36;$
   Es gibt keine Lösung für k.

α)

$|g_a \cap E| = 1;$
$a \neq 6;$

β)

$g_a \cap E = \{\}\,;$
$a = 6;$

γ)

$g_a \cap E = g_a;$
Nicht möglich, d.h. es gibt keinen Fall für a.

4. Gegeben sind der Punkt $A(4,2,6)$, die Geraden

$g_1\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad k \in \mathbb{R};$

$g_2\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad l \in \mathbb{R};$

$g_3\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad m \in \mathbb{R};$ und die Ebene

$F\colon \vec{X} = u \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u, v \in \mathbb{R};$ (24 P)

a) Zeige, dass sich g_1 und g_2 schneiden und berechne ihren Schnittpunkt. Untersuche g_1 und g_3 auf ihre gegenseitige Lage hin. (6 P)

g_1–g_3: Gleichungssystem nicht lösbar

b) Gib eine vektorielle Parameterdarstellung der Ebene E an, die parallel zur x_3-Achse ist und deren Schnittgerade mit der x_1–x_2-Ebene durch $x_1 - 2x_2 - 6 = 0$ beschrieben ist. (3 P)

$g_1 \cap g_2$: $S(0,0,0)$

$x_1 - 2x_2 - 6 = 0;$

$A(6,0,0); \quad B(0,-3,0);$

$s\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varrho \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varrho \in \mathbb{R};$

$E\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varrho \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \varrho, \sigma \in \mathbb{R};$

c) Zeige, dass F echt parallel zu E ist und g_1 und g_2 in der Ebene F liegen. (9 P)

$F \cap x_1$–x_2-Ebene: $\vec{X} = w \begin{pmatrix} -4+2 \\ -2+1 \\ 0 \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad w \in \mathbb{R};$

$(0,0,0) \in F;$

g_1–F [ergibt Lösbarkeit, Abhängigkeit von einem Parameter]

d) Untersuche, ob es eine Gerade h gibt, die parallel zu E ist und die Geraden g_1, g_2 und g_3 schneidet. Gib gegebenfalls eine Gleichung für h an. (6 P)

$E \parallel F$;

$g_1, g_2 \in F$;

$g_1 \cap g_2 = \{(0,0,0)\}$;

h existiert genau dann, wenn $g_3 \cap F \neq \varnothing$;

$g_3 \cap F = \{T\} = \{(4,2,6)\}$;

$h = 0T$;

$h\colon \vec{X} = \mu' \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

22.06.2006
04.07.2006
08.07.2006

1.4 4. Klausur am 21.6.2006

1. Untersuche, ob $V = \left\{\binom{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ mit $\binom{a_1}{b_1} + \binom{a_2}{b_2} = \binom{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ und $k \cdot \binom{a_1}{b_1} = \binom{k \cdot a_1}{b_1}$, $k \in \mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. (6 P)

   $\lambda \binom{a}{b} + \mu \binom{a}{b} = \binom{\lambda a}{b} + \binom{\mu a}{b} = \binom{\lambda a + \mu a}{2b} = \binom{(\lambda+\mu)a}{2b} \neq \binom{(\lambda+\mu)a}{b} = (\lambda + \mu)\binom{a}{b}$ für $b \neq 0$;

   $\rightarrow V$ ist kein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

2. Untersuche, ob aus der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die lineare Unabhängigkeit von $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{z}$ folgt, wenn gilt:

   $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ und
   $\vec{w} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ und
   $\vec{z} = \vec{b} - \vec{c}$. (10 P)

   $k\vec{v} + l\vec{w} + m\vec{z} = k\left(\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}\right) + l\left(2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}\right) + m\left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a}\,(k + 2l) + \vec{b}\,(2k - l + m) + \vec{c}\,(3k + 2l - m) = \vec{0}$;

   $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear unabhängig, also:

   $k + 2l = 0; \quad 2k - l + m = 0; \quad 3k + 2l - m = 0;$

   $\Rightarrow k = l = m = 0$, d.h. $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ linear unabhängig.

3. Gegeben ist für $a \in \mathbb{R}_0^+$ die Funktionenschar f_a mit $\mathrm{f}_a(x) = 4 \cdot e^{-x}\left(a - e^{-x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. (20 P)

   a) Untersuche die Graphen der Scharfunktionen auf Achsenschnittpunkte, relative Hoch- und Tiefpunkte und Wendepunkte. Bestimme gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte. (8 P)

- Für $a = 0$: $\mathrm{f}_0(x) = -4e^{-2x}$;
  Schnittpunkt mit y-Achse: $(0, -4)$
  Kein Schnittpunkt mit x-Achse
  Keine Extrem- und Wendestellen
- Für $a > 0$:
  $\mathrm{f}_a'(x) = 4e^{-x}\left(2e^{-x} - a\right)$;
  $\mathrm{f}_a''(x) = 4e^{-x}\left(a - 4e^{-x}\right)$;
  $\mathrm{f}_a'(x) = 0$ für $x = -ln\frac{a}{2} = \ln\frac{2}{a}$;
  $\mathrm{f}_a''\left(-\ln\frac{a}{2}\right) = -2a^2 > 0$;
  Hochpunkt: $\left(-\ln\frac{a}{2}, a^2\right)$
  Vorzeichenwechsel von $\mathrm{f}_a''(x)$ bei $-ln\frac{a}{4}$, da $4e^{-x}$ stets größer 0 und $(a - 4e^{-x})$ echt monoton wachsend.

b) Bestimme das Verhalten von $\mathrm{f}_a(x)$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. (2 P)

$\lim\limits_{x\to\infty} 4e^{-x}\left(a - e^{-x}\right) = 4 \cdot 0 \cdot (a - 0) = 0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{4e^{-x}}_{\to+\infty} \underbrace{\left(a - e^{-x}\right)}_{\to-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} 4e^{-2x}\left(\frac{a}{e^{-x}} - 1\right) = -\infty$;

c) Zeige, dass F_a mit $\mathrm{F}_a(x) = 2\left(a - e^{-x}\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f_a ist. (2 P)

d) Zeige, dass für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ die Funktion $\tilde{\mathrm{F}}_\alpha$ mit $\tilde{\mathrm{F}}_\alpha(x) = 2\left(\alpha - e^{-x}\right)^2$, $x \in \left]-\ln\alpha, \infty\right[$ eine Umkehrfunktion hat, und gib Definitionsmenge und Funktionsterm der Umkehrfunktion an. (8 P)

$\tilde{\mathrm{F}}_\alpha'(x) = \mathrm{f}_\alpha(x)$ für $x \in \left]-\ln a, \infty\right[$;

$\tilde{\mathrm{F}}_\alpha'(x)$ hat auf $\left]-\ln a, \infty\right[$ keine Nullstellen, d.h. $\tilde{\mathrm{F}}_\alpha$ ist echt monoton auf $\left]-\ln a, \infty\right[$.

Also ist $\tilde{\mathrm{F}}_\alpha$ injektiv.

$\tilde{\mathrm{F}}_\alpha$ ist surjektiv, falls als Zielbereich $W_{\tilde{\mathrm{F}}_\alpha}$ verwendet wird. (2 P)

$D_{\tilde{\mathrm{F}}_\alpha^{-1}} = W_{\tilde{\mathrm{F}}_\alpha} = \left[0, 2\alpha^2\right[$; (da $\tilde{\mathrm{F}}_\alpha$ stetig und echt monoton)

$\lim\limits_{x\to-\ln\alpha} \tilde{\mathrm{F}}_\alpha(x) = 0; \quad \lim\limits_{x\to\infty} \tilde{\mathrm{F}}_\alpha(x) = 2\alpha^2$; (3 P)

$y = 2\left(\alpha - e^{-x}\right)^2 > 0; \quad x > -\ln\alpha$;

$\sqrt{y} = \sqrt{2\left(\alpha - e^{-x}\right)^2} = \sqrt{2}\left|\alpha - e^{-x}\right| = \sqrt{2}\left(\alpha - e^{-x}\right)$;

$\ldots$

$\tilde{\mathrm{F}}_\alpha^{-1}(x) = -\ln\left(\alpha - \sqrt{\frac{x}{2}}\right)$;

„Ich will gar nicht immer Recht haben. . . Unter dem Schicksal leide ich schon seit langem. . . “ 06.11.2006 07.11.2006

1.5 Formelsammlung zur 5. Klausur

1.5.1 Analytische Geometrie

Umrechnungen zwischen Parameter- und Koordinaten/Normalenform

- Umrechnung der Parameterform einer Ebene mit Aufpunkt A und Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in die Normalenform:
  - $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}; \quad n_0 = -\vec{n}\vec{A};$
    $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0;$
  - $\det\left(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}\right) \stackrel{!}{=} 0$, da $\left\{\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}\right\}$ komplanar ist/sein muss.
- Umrechnung der Koordinatenform einer Ebene in die Parameterform:

  Definition: $x_2 := \lambda; \quad x_3 := \mu;$

  Koordinatenform nach x_1 auflösen $\rightarrow$ Term für x_1

  x_1, $x_2 = \lambda$ und $x_3 = \mu$ in $\vec{X} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ einsetzen und nach 1, λ und μ gruppieren.

Winkel

- Winkel $\angle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0°, 180°]$ zwischen zwei Vektoren:

  $\cos\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|};$
- Winkel $\angle(g, h) \in [0°, 90°]$ zwischen zwei Geraden mit Richtungsvektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$:

  $\cos\angle(g, h) = \left|\frac{\vec{g}\vec{h}}{|\vec{g}||\vec{h}|}\right|;$
- Winkel $\angle(g, E) \in [0°, 90°]$ zwischen einer Geraden mit Richtungsvektor $\vec{g}$ und einer Ebene mit Normalenvektor $\vec{n}$:

  $\cos[90° - \angle(g, E)] = \sin\angle(g, E) = \left|\frac{\vec{g}\vec{n}}{|\vec{g}||\vec{n}|}\right|;$

- Winkel $\angle(E,F) \in [0°, 90°]$ zwischen zwei Ebenen mit Normalenvektoren $\vec{e}$ und $\vec{f}$:

  $\cos\angle(E,F) = \left|\frac{\vec{e}\vec{f}}{|\vec{e}||\vec{f}|}\right|;$

Abstände, Normalen

- Abstand $d(P,Q)$ von zwei Punkten:

  $d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{\overrightarrow{PQ}^2};$

- Abstand $d(P,g)$ von einem Punkt zu einer Geraden mit Richtungsvektor $\vec{g}$ und Laufparameter λ:

  - Allgemeinen Abstand $d(P, X_g(\lambda))$ berechnen (in Abhängigkeit von λ), diesen dann ableiten, auf Null setzen und dann nach λ auflösen
    Kurz: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left|\overrightarrow{PX_g(\lambda)}\right|^2 \stackrel{!}{=} 0;$
  - $d(P,g) = d(P,F) = \left|\overrightarrow{PF}\right|$, wobei $\underbrace{\overrightarrow{PF}}_{\overrightarrow{PX(\lambda)}} \cdot \vec{g} = 0;$
  - Hilfsebene H (Normalenvektor $\vec{h}$) durch P senkrecht zu g legen:
    $\vec{h} := \vec{g}; \quad h_0 = -\vec{h}\vec{P};$
    Dann $\vec{X}_g$ in die Normalenform von H einsetzen, auflösen (eine Gleichung; Unbekannte ist λ)
    Dann weiter wie oben.

- Abstand $d(P,E)$ von einer Ebene mit Normalenvektor $\vec{n}$ zu einem Punkt:

  $d(P,E) = d(P,F)$ mit $E \cap n = \{F\}$ und $n\colon \vec{X} = \vec{P} + \lambda\vec{n};$

- Abstand $d(g,E)$ von einer Ebene zu einer parallelen Geraden:

  $d(g,E) = d(P,E)$, mit P als beliebigen festen Punkt von g

- Abstand $d(E,F)$ von zwei parallenen Ebenen:

  $d(E,F) = d(P,F)$, mit P als beliebigen festen Punkt von E

Projektion

- (Senkrechte) Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf einen Vektor $\vec{n}$:

  $\vec{n}_{\vec{a}} = \vec{n}^0 \cdot |\vec{a}| \cos\varphi;$

- (Senkrechte) Projektion eines Punkts auf eine Gerade:

  Die Projektion ist der Lotfußpunkt des Lots durch den Punkt auf die Gerade.

- (Senkrechte) Projektion eines Punkts P auf eine Ebene (Normalenvektor $\vec{e}$):

  Die Projektion ist der Lotfußpunkt des Lots durch den Punkt auf die Ebene.

  Besonders schneller Weg zur Normalengleichung:

  $n\colon \vec{X} = \vec{P} + \lambda\vec{e};$

- (Senkrechte) Projektion einer Geraden auf eine Ebene:

  Zwei beliebige feste Punkte der Geraden auf die Ebene projezieren und die Projektionspunkte dann verbinden. (Zweckmäßigerweise ist einer der Punkte der Schnittpunkt von Gerade und Ebene)

1.5.2 Stochastik

Definitionen

– Definitionen zur Zufallsgröße

- Zufallsgröße: $X\colon \Omega \to \mathbb{R};$

- Wahrscheinlichkeitsverteilung:

  $P_X\colon W_X \to [0,1]\,; \quad x \mapsto P(X = x);$

- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

  $\tilde{P}_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\,;$

  x-Werte, die an denen P_X nicht definiert ist, werden auf 0 gesetzt.

- Kumulative Verteilungsfunktion:
  $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\,; \quad x \mapsto P(X \le x);$
- Dichtefunktion
- Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung: $P_{X,Y}\colon W_X \times W_Y \to [0,1]\,;$
- Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen X und Y $\Leftrightarrow$
  $P(X = x)P(Y = y) = P(X = x \cap Y = y)$ für alle $x \in W_X$ und für alle $y \in W_Y$;

– Definitionen zu Charakteristika von Zufallsgrößen

- Erwartungswert $E(X) = \mu \in \mathbb{R}$ einer Zufallsgröße:
  $E(X) = \sum\limits_{x \in W_X} xP(X = x) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})\,;$
- Varianz $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2(X) = \sigma^2 \in \mathbb{R}$ einer Zufallsgröße:
  $\mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \sum\limits_{x \in W_X} (x - E(x))^2\, P(X = x) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - E(x))^2\, P(\{\omega\})\,;$
- Standardabweichung einer Zufallsgröße: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \in \mathbb{R}_0^+$;

Rechenregeln

– Rechenregeln zum Erwartungswert

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- $E(XY) = E(X)E(Y)$, sofern X und Y unabhängig sind.

– Rechenregeln zur Varianz

- (Spezielle) Verschiebungsregel: $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$;
- $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$, sofern X und Y unabhängig sind.
- $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\, \mathrm{Var}(X)$;

– Rechenregeln zu gemittelten Zufallsgrößen

- $E(\overline{X}) = E(X)$;
- $\text{Var}(\overline{X}) = \text{Var}(X)/n$;

07.11.2006
08.11.2006
10.11.2006

1.6 5. Klausur am 7.11.2006

1. Ein Torwart hält einen Elfmeter mit der Wahrscheinlichkeit $20\,\%$. Im Training schießt ein Spieler solange aus der Elfmeterposition, bis er zwei Tore erzielt hat, jedoch höchstens viermal. (13 P)

   a) Stelle die Trainingseinheit einschließlich der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten in einem Baumdiagramm dar. (5 P)

   [11 Pfade]

   b) Berechne den Erwartungswert der erzielten Tore in einer Trainingseinheit. (8 P)

```
x | 0      | 1            | 2
--+--------+--------------+-------------------------------
P | 0,2^4  | 4*0,8*0,2^3  | 0,8^2+2*0,8^2*0,2+3*0,8^2*0,2
```

   $E(X) = 1{,}9712$;

2. Lackierte Kunststoffteile, z.B. Gehäuse von Außenspiegeln für Fahrzeuge, werden vor der Auslieferung auf optische Mängel hin untersucht. Während seiner gesamten Arbeitszeit fällt ein Kontrolleur bei der Begutachtung eines Kunststoffteils mit $95\,\%$ Wahrscheinlichkeit eine richtige Entscheidung.

   Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl der falschen Entscheidungen des Kontrolleurs, wenn er a) ein Teil (6 P) bzw. b) zweihundert Teile (6 P) überprüft. (12 P)

   a) X_1 = Anzahl der falschen Entscheidungen bei einem Teil;

```
x1 | 0      | 1
---+--------+----
P  | 95 %   | 5 %
```

   $E(X_1) = 0{,}05$;

   $\text{Var}(X_1) = 0{,}05^2 \cdot 0{,}95 + 0{,}95^2 + 0{,}05 = 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}0475$; $\quad \sigma(X_1) \approx 0{,}22$;

b) $X_i =$ Anzahl der falschen Entscheidungen beim i-ten Teil; $i = 1, 2, \ldots, 200$;
$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}$;
$E(X) = 200 \cdot 0{,}05 = 10$;
$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}) = 200\,\mathrm{Var}(X_1) = 9{,}5$; $\sigma(X) \approx 3{,}08$;

3. Gegeben sind die Punkte $A(8,0,0)$, $B(8,3,0)$, $C_t(4t+5, 3, -3t)$ und $D(0,0,6)$. Dabei ist t eine reelle Zahl. (19 P)

   a) Bestimme alle Werte von t, für die das Dreieck ABC_t rechtwinklig und gleichschenklig ist. (6 P)

   b) Berechne den Abstand des Punktes D von der Geraden AC_0 und den Flächeninhalt des Dreiecks AC_0D. (6 P)

   c) Das Volumen der Pyramide $ADBC_t$ ist unabhängig von t (Nachweis nicht verlangt). Gib eine geometrische Deutung dafür an und beweise deine Aussage. (7 P)

4. D, E und F bezeichnen die Mitten der Seiten eines Dreiecks ABC. Gegen den Uhrzeigersinn werden die genannten Punkte in der Abfolge $ADBECF$ durchlaufen. S ist ein Punkt der Ebene, in der das Dreieck liegt. Wir betrachten folgende Aussage:
   Aus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SD} = 0$ und $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SF} = 0$ folgt: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{SE} = 0$. (13 P)

   a) Fertige eine Skizze an, die die Aussagen widerspiegelt, und formulieren den Satz der Dreieckslehre, den die Aussage ausdrückt. (6 P)

   b) Beweise die Aussage. (2 P)

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{SE} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{SD} + \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{DB}} + \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}\right) = \underbrace{\overrightarrow{BA}\overrightarrow{SD}}_{0} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\overrightarrow{AC} +$$
$$\overrightarrow{AC}\overrightarrow{SD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{SD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)}_{\overrightarrow{SF}} = 0;$$

„dann passiert das, wovor ich gewarnt hab´, dass man sich freut. . . “ 18.12.2006
22.01.2007

1.7 6. Klausur am 18.12.2006

1. Gegeben ist die Ebene $E\colon 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 1 = 0$. (12 P)

   a) Erläutere die geometrische Bedeutung der beiden HESSE-normierungen und gib den HESSEterm an. (3 P)

   b) Begründe für einen Punkt im positiven Halbraum von E bezüglich des HESSEvektors mittels einer Skizze die Bedeutung des Werts des HESSEterms für diesen Punkt. (3 P)

   c) Untersuche, welche der Punkte $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 3, 5)$, $C(-2, 3, -5)$ im selben Halbraum bezüglich E liegen, und berechne den Abstand von C zu E. (3 P)

   d) Durch Spiegelung von E am Punkt $P(1, 2, 3)$ entsteht die Ebene E'. Bestimme eine Gleichung von E'. (3 P)

2. Ein Zylinder mit unbegrenzt langer Achse a und Radius $\sqrt{2}$ liegt im 1. und 4. Oktanten so zwischen den Ebenen $E\colon x_1 - x_3 = 0$ und $F\colon x_1 = 0$ eingekeilt, dass er E in der Geraden e und F in der Geraden f berührt. (10 P)

   a) Fertige eine aussagekräftige Skizze an, die den Schnitt der x_1–x_3-Ebene mit dem Zylinder und den Ebenen E und F darstellt. (4 P)

   b) Bestimme eine Gleichung für die Achse a. Verwende dazu möglichst wenig elementargeometrische Rechentechniken, sondern setze die Techniken der Vektorgeometrie ein. (6 P)

3. Bestimme eine Stammfunktion von f. Verwende dazu die partielle Integration oder die Substitutionsmethode. (10 P)

   a) $f(x) = \sin x \cdot \cos x; \quad x \in \mathbb{R}$; (3 P)

   b) $f(x) = \frac{x \ln\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}; \quad x \geq 0$; (7 P)

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$. (12 P)

   a) Untersuche das Monotonieverhalten von f sowie das Verhalten von f für $x \to \infty$. Skizziere den Graphen von f. (6 P)

b) Zeige mittels der Substitutionsmethode, dass F mit $F(x) = -\left(e^x+1\right)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ eine Stammfunktion von f ist. (3 P)

c) Die Gerade $x = t \geq 0$, die x-Achse und der Graph von f begrenzen eine unendlich ausgedehnte Fläche.

Berechne den Inhalt dieser Fläche. (3 P)