01.02.2006

0.1 52. Hausaufgabe

0.1.1 Zusammenfassung der Stunde: Gleichstrom als Spezialfall des Wechselstroms, Wechselstromwiderstand von Spule und Kondensator

Gleichstrom kann als Spezialfall des Wechselstroms angesehen werden, nämlich als ein Wechselstrom mit der Winkelgeschwindigkeit und Frequenz Null. Die jeweiligen Formeln für Wechselstrom ergeben dann die schon bekannten Formeln für Gleichstrom.

Dass Gleichstrom ein Spezialfall sein muss ist auf den ersten Blick vielleicht nicht klar erkennbar, leuchtet jedoch nach genauerer Betrachtung ein: Ein Wechselstrom sehr niedriger Frequenz – sagen wir $0{,}01\,\mathrm{Hz}$ – ändert seine Stromstärke nur äußerst langsam; plottet man $I(t)$, so erhält man eine „fast waagrechte" Kurve.

Regelt man die Frequenz noch weiter herunter, wird die Kurve immer flacher. Nimmt man schließlich Gleich- statt Wechselstrom, so ist die Kurve waagrecht. Der Unterschied der Kurve mit der Steigung Null (Gleichstrom) und der mit einer sehr geringen Steigung (Wechselstrom sehr niedriger Frequenz) ist jedoch sehr gering.

Damit liegt der Schluss nahe, dass auch die physikalischen Auswirkungen von Gleichstrom und Wechselstrom sehr niedriger Frequenz fast identisch sind. Er wäre nun wünschenswert, dies auch in Formeln auszudrücken.

Als Beispiel dient die ideale Spule, also eine Spule ohne OHMschen Widerstand. Offensichtlich ist ihr Widerstand bei Gleichstrom – $\omega = 0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ – gleich $0\,\Omega$. Da aber jede Stromstärkeänderung $\dot{I}$ – also Wechselstrom – eine Gegenspannung induziert (Stichwort Selbstinduktion), nimmt der Widerstand mit steigender Wechselstromfrequenz zu; sein Wert errechnet sich mit $R_L(\omega) = \omega L$.

Setzt man nun für ω $0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ ein – wendet man also die Formel auf Gleichstrom an – so erhält man – wie auch erwünscht – $R_L(0\,\frac{1}{\mathrm{s}}) = 0\,\Omega$.

Fürs bessere Verständnis ist es hilfreich, sich das mechanische Analogon der Spule vorzustellen: Ein Schwungrad ist bei Gleichstrom offensichtlich ein idealer Leiter. Wechselt hingegen die Bewegungsrichtung der Schnur, so wirkt das Rad wegen seiner Trägheit der Bewegung entgegen: Das Rad wechselt seine Drehrichtung nicht sprunghaft, sondern es wird erst abgebremst und beschleunigt dann in die andere Richtung.

Es ist auch möglich, für den Widerstand eines Kondensators solch eine Formel aufzustellen. Bei Gleichstrom ist ein Kondensator offensichtlich ein Nichtleiter, der Widerstand geht also gegen $\infty\,\Omega$. Bei Wechselstrom jedoch fließt durchaus Strom; im entarteten Fall spricht man vom Auflade- bzw. Entladestrom. Mit steigender Wechselstromfrequenz nimmt der Widerstand ab.

Die Höhe des Widerstands errechnet sich zu $R_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}$. Lässt man ω gegen $0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ gehen, so strebt $R_C(\omega)$ – wie erwünscht – gegen $\infty\,\Omega$.

Auch hier hilft wieder das Modell des Schnurstroms: Eine Gummimembran ist bei Gleichstrom offensichtlich ein Nichtleiter. Wechselt aber die Schnurrichtung, so nimmt die Leitfähigkeit mit steigender Frequenz zu.

(Die Gummimembran kann bis zu einem festen Maximalwert ausgelenkt werden. Bis dieser erreicht ist, leitet die Membran. Würde sich die Stromrichtung im voll ausgelenkten Fall nicht umkehren, so wäre kein weiterer Schnurtransport möglich. Kehrt sich jedoch die Richtung um, so lässt die Membran wieder Schnur hindurch: Die Membran entspannt sich, bis sie ihre Ruheposition eingenommen hat, und spannt sich dann erneut, jedoch in die andere Richtung. Während dieses Vorgangs wird offensichtlich Schnur transportiert.)

Mit $R_L(\omega)$ und $R_C(\omega)$ konnten wir also den Gleichstrom als Spezialfall des Wechselstroms ausdrücken. Was noch fehlt ist eine allgemeine Formel für die Spannung $U_\omega(t)$ und $I_\omega(t)$.

Für sinusförmigen Wechselstrom der Winkelgeschwindigkeit ω gilt:

$$U_\omega(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$$
$$I_\omega(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

U_0 bzw. I_0 ist dabei der Maximalwert von U bzw. I. φ kann verwendet werden, um phasenverschobene Wechselströme auszudrücken.

Möchte man diese beiden Formeln nun auf den Gleichstrom übertragen, so muss man – wie oben bereits festgestellt – als Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ nehmen. Dann muss φ noch so gewählt werden, dass für alle Zeitpunkte t gilt:

$U_{0\,\frac{1}{\mathrm{s}}}(t) = U_0$
$I_{0\,\frac{1}{\mathrm{s}}}(t) = I_0$

Der Sinus wird bei $\frac{\pi}{2}$ $(+\,2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z})$ 1; also wird man als φ $\frac{\pi}{2}$ $(+\,2k\pi)$ nehmen. Damit kann man den Gleichstrom als Spezialfall des Wechselstroms betrachten; unser Ziel ist erreicht.

(Benötigte Zeit: 81 min)