28.01.2006

0.1 Differentialgleichungen

Gleichung, deren Lösungsmenge aus Zahlen besteht $\neq$ Gleichung, deren Lösungsmenge aus Funktionen besteht

1. Bekannt:
   $7x^3 - 15x^2 + 2x - 9 = 0;$
   $D = \mathbb{R}; \quad L =$ irgendeine Teilmenge aus $\mathbb{R}$;

2. Neu:
   $5\mathrm{f}'''(x) - \frac{1}{(\mathrm{f}'(x))^2} + \sqrt{\mathrm{f}(x)} + \frac{1}{\lg \mathrm{f}'(x)} = 0;$
   $D =$ Menge von Funktionen, die mindestens dreimal ableitbar sind und deren Funktionswerte größer als 0 sind;

06.02.2006

0.1.1 Aufstellen und Auswerten von Differentialgleichungen in der Physik

Relaxationssystem

Kondensator

[Stromkreis: Kondensator C ($Q = CU$), verbunden mit Widerstand R ($U = R\dot{Q}$)]
Uns interessiert $U(t)$ bzw. $I(t)$.
Maschenregel: $U_1(t) + U_2(t) = 0;$
$\frac{Q(t)}{C} + R\dot{Q}(t) = 0;$
$Q(t) = Q_0\, e^{-\frac{t}{\tau}};$ („intelligent geraten")
$\dot{Q}(t) = Q_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right);$
$\frac{1}{C} Q_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{R}{\tau} Q_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} = 0;$
$\tau = RC;\ \left[1 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} = 1\,\mathrm{s}\right]$
$Q(t) = Q_0\, e^{-\frac{t}{RC}};$
$I(t) = -\underbrace{\frac{Q_0}{RC}}_{I_0}\, e^{-\frac{t}{RC}};$

Spule

[Stromkreis: Spule L ($U = L\dot{I}$), verbunden mit Widerstand R ($U = RI$)]

Uns interessiert $U(t)$ bzw. $I(t)$.

Maschenregel: $U_1(t) + U_2(t) = 0;$

$L\dot{I}(t) + RI(t) = 0;$

$I(t) = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}};$

$\dot{I}(t) = -\frac{I_0}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}};$

$-\frac{I_0}{\tau}L + RI_0 = 0;$

$\tau = \frac{L}{R};$

$I(t) = I_0\, e^{-\frac{R}{L}t};$

Der ungedämpfte Schwingkreis

[Stromkreis: Kondensator C ($Q = CU$), verbunden mit Spule L ($U = L\dot{I} = L\ddot{Q}$; [Ersetzung von $\dot{I}$ mit $\ddot{Q}$] damit nur eine Funktion gesucht ist)]

$U_C(t) + U_L(t) = 0;$

$\frac{Q(t)}{C} + L\ddot{Q}(t) = 0;$

$Q(t) = Q_0 \sin \omega t;$

$\ddot{Q}(t) = -\omega^2 Q_0 \sin \omega t;$

$\frac{Q_0}{C} - L\omega^2 Q_0 = 0;$

$\omega^2 = \frac{1}{LC};\ \left[1\frac{1}{\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}} = 1\frac{1}{\mathrm{s}}\right]$

$\omega = \frac{2\pi}{T};\ \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC};$

13.02.2006

0.1.2 Differentialgleichung für gedämpfte Schwingungen

$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \cos \omega t;$

Die allgemeine Lösung ist:

$x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \cdot e^{-\gamma t} + A_2 \cos(\omega t + \varphi);$

Nach dem Einschwingvorgang bleibt nur der zweite Term:

$x(t) = A_2 \cos(\omega_t + \varphi);$

In die Differentialgleichung eingesetzt ergibt sich für die Phase zwischen Anregungssignal und Antwort des Oszillators:

$\varphi = \arctan - \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2};$

Und für die Amplitude:

$A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega\right)^2}};$

Die Breite der Resonanz ist:

$\Delta w = 2\sqrt{3} \cdot \gamma;$