

(no title)

Ingo Blechschmidt

24. Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

0.1	Differentialgleichungen	1	
0.1.1	Aufstellen und Auswerten von Differentialgleichungen in der Physik	1	
0.1.2	Differentialgleichung für gedämpfte Schwingungen	3	
0.2	Der Kondensator als Leiter? [Wechselstromwiderstand von Kondensator und Spule]	3	28.01.2006

0.1 Differentialgleichungen

Gleichung, deren Lösungsmenge aus Zahlen besteht \neq Gleichung, deren Lösungsmenge aus Funktionen besteht

1. Bekannt:

$$7x^3 - 15x^2 + 2x - 9 = 0;$$

$D = \mathbb{R}; \quad L = \text{irgendeine Teilmenge aus } \mathbb{R};$

2. Neu:

$$5f'''(x) - \frac{1}{(f'(x))^2} + \sqrt{f(x)} + \frac{1}{\lg f'(x)} = 0;$$

$D =$ Menge von Funktionen, die mindestens dreimal ableitbar sind und deren Funktionswerte größer als 0 sind;

06.02.2006

0.1.1 Aufstellen und Auswerten von Differentialgleichungen in der Physik

Relaxationssystem

Kondensator

[Stromkreis: Kondensator C ($Q = CU$), verbunden mit Widerstand R ($U = R\dot{Q}$)]

Uns interessiert $U(t)$ bzw. $I(t)$.

Maschenregel: $U_1(t) + U_2(t) = 0$;

$$\frac{Q(t)}{C} + R\dot{Q}(t) = 0;$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; \text{ („intelligent geraten“)}$$

$$\dot{Q}(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right);$$

$$\frac{1}{C}Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{R}{\tau}Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 0;$$

$$\tau = RC; \left[1 \frac{\text{V}}{\text{A}} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 1 \text{ s}\right]$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}};$$

$$I(t) = - \underbrace{\frac{Q_0}{RC}}_{I_0} e^{-\frac{t}{RC}};$$

Spule

[Stromkreis: Spule L ($U = L\dot{I}$), verbunden mit Widerstand R ($U = RI$)]

Uns interessiert $U(t)$ bzw. $I(t)$.

Maschenregel: $U_1(t) + U_2(t) = 0$;

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = 0;$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$\dot{I}(t) = -\frac{I_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$-\frac{I_0}{\tau}L + RI_0 = 0;$$

$$\tau = \frac{L}{R};$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t};$$

Der ungedämpfte Schwingkreis

[Stromkreis: Kondensator C ($Q = CU$), verbunden mit Spule L ($U = L\dot{I} = L\ddot{Q}$; [Ersetzung von \dot{I} mit \ddot{Q}] damit nur eine Funktion gesucht ist)]

$$U_C(t) + U_L(t) = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{Q(t)}{C} + L\ddot{Q}(t) &= 0; \\ Q(t) &= Q_0 \sin \omega t; \\ \ddot{Q}(t) &= -\omega^2 Q_0 \sin \omega t; \\ \frac{Q_0}{C} - L\omega^2 Q_0 &= 0; \\ \omega^2 &= \frac{1}{LC}; \left[1 \frac{\frac{1}{\text{Vs}} \frac{\text{As}}{\text{V}}}{\text{s}} = 1 \frac{1}{\text{s}} \right] \\ \omega &= \frac{2\pi}{T}; \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}; \end{aligned}$$

13.02.2006

0.1.2 Differentialgleichung für gedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \cos \omega t;$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \cdot e^{-\gamma t} + A_2 \cos(\omega t + \varphi);$$

Nach dem Einschwingvorgang bleibt nur der zweite Term:

$$x(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi);$$

In die Differentialgleichung eingesetzt ergibt sich für die Phase zwischen Anregungssignal und Antwort des Oszillators:

$$\varphi = \arctan -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

Und für die Amplitude:

$$A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}};$$

Die Breite der Resonanz ist:

$$\Delta\omega = 2\sqrt{3} \cdot \gamma;$$

02.02.2006

0.2 Der Kondensator als Leiter? [Wechselstromwiderstand von Kondensator und Spule]

[Der Kondensator leitet Wechselstrom; der Kondensator wird ständig auf- und entladen. Mit höherer Wechselstromfrequenz nimmt die Leitfähigkeit zu. Der Kondensator ist ein Widerstand, an dem **keine** (!) Energie dissipiert wird.]

$$R_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}; \left[\frac{1 \text{ V}}{\frac{1}{\text{s}} \text{ C}} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega \right]$$

entsprechend

$$R_L(\omega) = \omega L; \left[\frac{1 \text{ Vs}}{\text{s A}} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega \right]$$