1 Gretchenfrage bei Transformationsmatrizen

$B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ Basis in V 26.04.2008

Definiere geschlängelte Basis über Gretchenfrage:

$$\tilde{a}_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} a_i,\ k = 1, \ldots, n$$

Das definiert die Transformationsmatrix $S := (\alpha_{ik})$.

Behauptung: $S = M(\mathrm{id}; \tilde{B}, B)$

Bew. (formal): Sei $M(\mathrm{id}; \tilde{B}, B) = (\beta_{ik})$. Nach Definition des M-Operators, also nach der Gretchenfrage, gilt:

$$\mathrm{id}\, \tilde{a}_k = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} a_i,\ k = 1, \ldots, n$$

Andererseits gilt aber:

$$\mathrm{id}\, \tilde{a}_k = \tilde{a}_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} a_i,\ k = 1, \ldots, n$$

Also müssen die β_{ik} und die α_{ik} gleich sein; also ist $M(\mathrm{id}; \tilde{B}, B) = (\beta_{ik}) = (\alpha_{ik}) = S$. $\square$

Bew. (anschaulich): Bei der Definition der geschlängelten Basis geben wir an, wie man einen neuen Basisvektor $\tilde{a}_k$ durch alte Basisvektoren a_i ausdrücken kann. Wir definieren also eine Zuordnung der neuen Basisvektoren zu (Linearkombinationen der) alten Basisvektoren, kurz eine Matrix der neuen zur alten Basis.