1 Rand vom Rand

1. Beh.: $\partial\partial M = \partial M$ gilt nicht für alle Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$

   Bew.: Wähle $M = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^1$. Dann ist nach Übungsaufgabe $\partial M = \mathbb{R}$, aber $\partial\partial M = \varnothing \neq \mathbb{R} = \partial M$.

2. Beh.: $\partial\partial\partial M = \partial\partial M$ für alle Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$

   Bew.:

   - „$\subset$“:
     $\partial\partial M$ ist als Rand einer Menge abgeschlossen, somit liegt der Rand von $\partial\partial M$ ganz in $\partial\partial M$.
   - „$\supset$“:
     Sei $x \in \partial\partial M$, d.h. es gibt Folgen (x_k), $(\tilde{x}_k)$ mit $x_k, \tilde{x}_k \to x$ und $x_k \in \partial M$, $\tilde{x}_k \notin \partial M$.

     Setze $y_k := x \in \partial\partial M$, $\tilde{y}_k := \tilde{x}_k$. $\tilde{y}_k$ liegt nicht in $\partial\partial M$, denn angenommen schon: Dann würde $\tilde{y}_k = \tilde{x}_k$ auch in ∂M liegen, da $\partial\partial M \subset \partial M$; Widerspruch.

     Mit (y_k) und $(\tilde{y}_k)$ sind die hinreichenden Bedingungen der Def. des Randpunkts erfüllt, x ist also ein Randpunkt von $\partial\partial M$ und somit in $\partial\partial\partial M$ enthalten.