# 1 Spiegelungszerlegung

*Beh.*: Aus $A \in L(V,V)$ mit $A^2 = \mathrm{Id}$ folgt nicht die direkte Zerlegbarkeit von $V$ in $V = \mathrm{Kern}(A + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Kern}(A - \mathrm{Id})$.

*Bew.*: Betrachte als Gegenbeispiel den Vektorraum $V = K^2$ über dem Körper $K = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen mit der kanonischen Basis $\{e_1, e_2\}$. Definiere $A \in L(V,V)$ durch lineare Fortsetzung:

$$\begin{aligned} Ae_1 &= e_2 \\ Ae_2 &= e_1 \end{aligned} \qquad \text{also } M(A; B, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt zwar $A^2 = \mathrm{Id}$, aber die Zerlegung erfasst erstens nicht den gesamten Raum $V$, und zweitens ist sie nicht direkt. Bezeichne mit $\tilde{A}$ die Abbildung, von der der Kern genommen wird, also $\tilde{A} := A - \mathrm{Id} = A + (-\mathrm{Id}) = A + \mathrm{Id}$. Dann gilt:

$$\tilde{A}e_1 = \tilde{A}e_2 = e_1 + e_2, \qquad \text{also } M(\tilde{A}; B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Kern}\,\tilde{A}$ ergibt sich damit zu $\mathrm{span}[e_1 + e_2]$; damit ist klar: $\mathrm{Kern}(A + \mathrm{Id}) + \mathrm{Kern}(A - \mathrm{Id}) = \mathrm{Kern}\,\tilde{A} + \mathrm{Kern}\,\tilde{A} = \mathrm{Kern}\,\tilde{A} = \mathrm{span}[e_1 + e_2] \neq V$.