Optimieren

25.8.15, R. Oldenburg

Optimal

- Optimalität -maximal/minimal - ist überall
  - Olympiade
  - Wirtschaft
  - Mathematik und im Rest der Welt

Optimalität ist überall

- GGT, KGV
- Gegeben Zahlen auf dem Zahlenstrahl: Minimaler Abstand zu allen gesucht…. Geogebra
- Für n Zahlen $x_1,\ldots,x_n$ minimiert das arithmetische Mittel $\overline{x}$ die Funktion $Z(X)=(x_1-X)^2+(x_2-X)^2+\ldots+(x_n-X)^2=\sum_i (x_i-X)^2$
- Zentrale Ideen
  - Minimieren der Summe von Quadraten
  - Approximieren durch „wackeln“
- Rechnen: Differenzieren: $Z'(X)=-2(x_1-X)-2(x_2-X)-\ldots-2(x_n-X)=0$ also $x_1+x_2+\ldots+x_n=nX$

Optimieren in der Stochastik

Universität Augsburg University

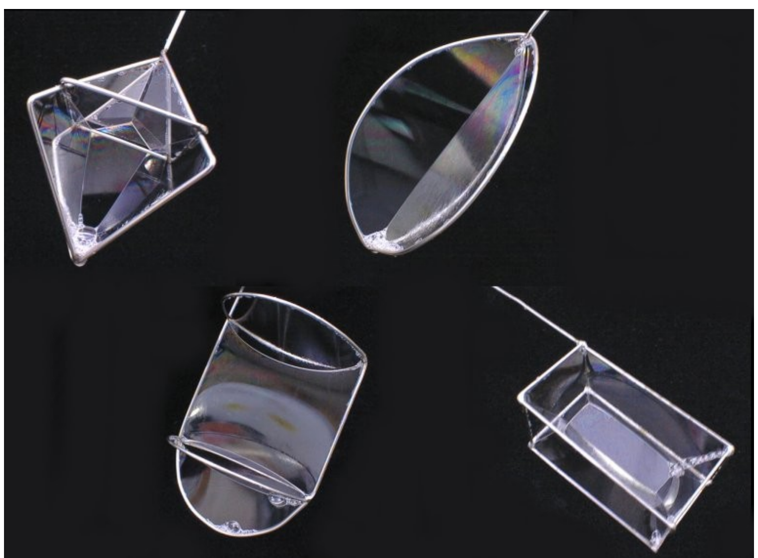
- Design der Benutzeroberfläche eines Smartphones
- Zielfunktion: Zahl der Gesten/Klicks/Berückrungen minimieren
- Man benötigt eine Tabelle mit
  - Aktion i
  - Rel. Häufigkeit h_i
  - Zahl der Tipp- oder Wischvorgänge W_i
- Minimiere $h_1W_1+h_2W_2+\ldots+h_nW_n = \sum_i h_iW_i$
- Wenn das so einfach ist, warum muss ich zur Konfiguration des Hotspots (sehr selten) und zum Einschalten (häufig) des Hotspots gleich viele Schritte machen?

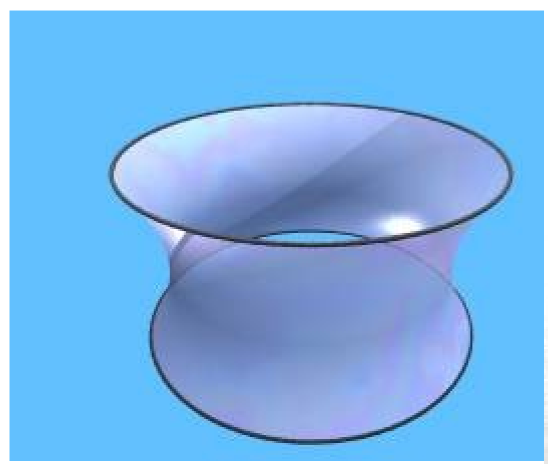
Optimalität in der Geometrie

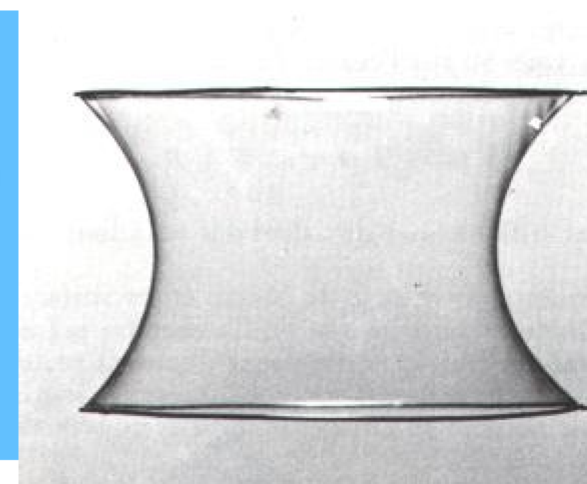
- Optimale Punkte im Dreieck
  - Versorgungszentrum in der Arktis
    - Optimalitätsbedingung A: Alle haben es gleich weit
    - Optimalitätsbedingung B: Summe der Wege minimal
  - Lösung zu A: Geogebra
  - Beweis zu B: fermat1.ggb fermat2.ggb
  - Andere Lösung: Approximativ
    - Kurzvorstellung: Programmierumgebung Scratch
    - Lösung fermat.sb

Optimalität in der Geometrie

- Strecke als kürzeste Verbindung (Gummiband zwischen festen Endpunkte)
- Dual dazu: Mit fester Linienlänge Endpunkte maximal weit auseinander (Faden straff ziehen)
- Flächeninhaltsmaximierung durch Kreis, Quadrat
- Volumenoptimierung; Kugel: Seifenblasen
- Minimalflächen







Funktionswerte minimieren

- Gegeben Funktion: zB $f(x):=-\cos\left(x^2\right)x+x^2+1$
  - Maxima
  - Strategie: Startwert x, Probeauswertung, x verändern, Änderung bei f(x), ggf. x ändern; Schrittweite mit der Zeit verkleinern
- Funktionen in mehreren Variablen

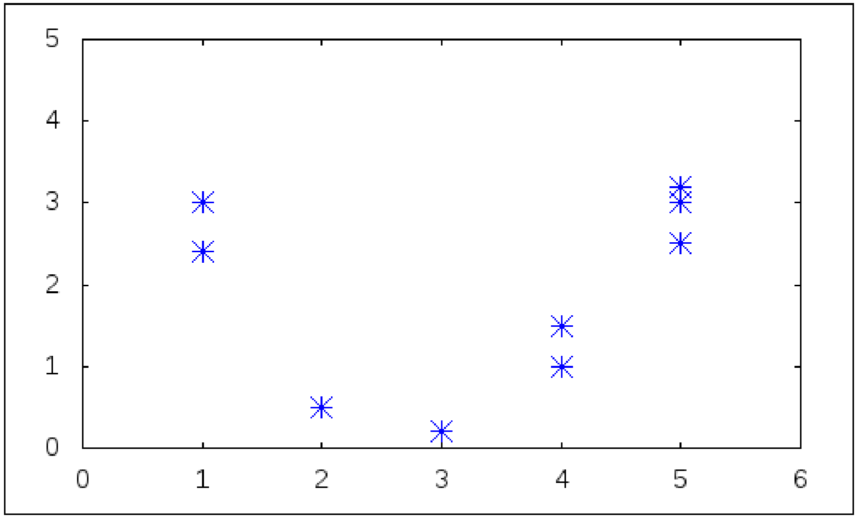
Funktionsbestimmung

- Finde Funktion passend zu Daten
- Man braucht
  - Daten : Paare (x_i,y_i), $1 \le i \le n$

```
(%i3) daten:[[1,3],[1,2.4],[2,0.5],[3,0.2],[4,1],[4,1.5],[5,2.5],[5,3.2],[5,3]];
(%o3) [[1,3],[1,2.4],[2,0.5],[3,0.2],[4,1],[4,1.5],[5,2.5],[5,3.2],[5,3]]
```

```
(%i4) wxdraw2d(xrange=[0,6],yrange=[0,5],point_size = 2,point_type= asterisk,points(daten));
```

(%t4)



Ziel: Gegeben ein x, passende y vorhersagen.
X=2 – einfach?
X=4? Mittelwert
X=1.5 ????
Man benötigt ein Modell

Funktionsbestimmung

- Modell mit Parametern: $f_P(x) = a x^2 + bx + c, P = \{a, b, c\}$
- Optimalitätsbedingung $\min_P \sum_{i=1}^{n} (y_i - f_P(x_i))^2$

```
(%i5) Fmodell(x):=a*x^2+b*x+c;
```

(%o5) $\mathrm{Fmodell}(x) := a\,x^2 + b\,x + c$

```
(%i6) abweichung(f,x,y):= (f(x)-y)^2;
```

(%o6) $\mathrm{abweichung}(f, x, y) := (\mathrm{f}(x) - y)^2$

```
(%i7) gesamtabweichung(f,daten):=sum(abweichung(f,daten[i][1],daten[i][2]),i,1,length(daten));
```

(%o7) $\mathrm{gesamtabweichung}(f, daten) := \sum_{i=1}^{\mathrm{length}(daten)} \mathrm{abweichung}\left(f, (daten_i)_1, (daten_i)_2\right)$

```
(%i8) gesamtabweichung(Fmodell,daten);
```

(%o8) $(c+5\,b+25\,a-2.5)^2+(c+5\,b+25\,a-3)^2+(c+5\,b+25\,a-3.2)^2+(c+4\,b+16\,a-1)^2+(c+4\,b+16\,a-1.5)^2+(c+3\,b+9\,a$

Funktionsbestimmung

- Optimale Parameter suchen. Entweder trial and error…

```
(%i9) subst([a=1,b=0,c=0],gesamtabweichung(Fmodell,daten));
(%o9) 1996.39

(%i10) subst([a=0.5,b=0,c=0],gesamtabweichung(Fmodell,daten));
(%o10) 398.59

(%i11) subst([a=0.5,b=-1,c=0],gesamtabweichung(Fmodell,daten));
(%o11) 101.59
```

- Oder sys-te-ma-tisch

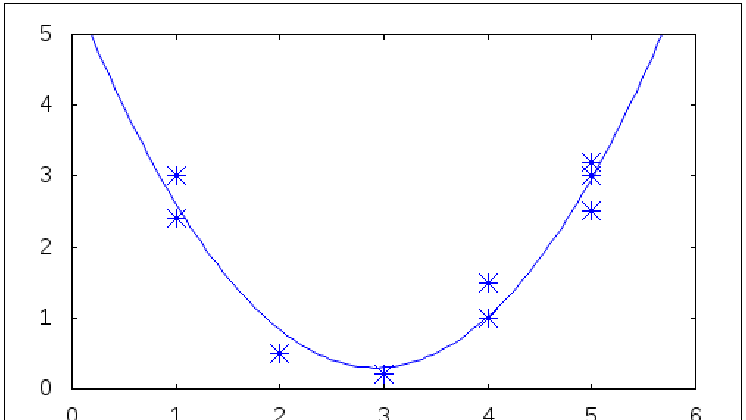
```
(%i17) optimum: lbfgs (gesamtabweichung(Fmodell,daten), [a,b,c],[1,0,0], 1e-3, [-1, 0]);
(%o17) [a=0.622051076760807,b=-3.641217869349752,c=5.627367815459142]

(%i18) Flsg:subst(optimum,Fmodell(x));
```

(%o18) $0.622051076760807\,x^2-3.641217869349752\,x+5.627367815459142$

```
(%i19) wxdraw2d(xrange=[0,6],yrange=[0,5],point_size = 2,point_type= asterisk,
       points(daten), explicit(Flsg,x,0,6));
```

(%t19)



Optimalität in Stochastik

- Was Optimierung leistet – ein extremes Beispiel: Was kosten Ferienhäuser?
  - *Vorhersagen (abhängige Größe): M*=Mietpreis
  - Unabhängige Größen:
  - *B*=Zahl der Betten=Personenanzahl
  - *W*=Wohnfläche in qm
  - *E*=Entfernung zum Meer in m
  - *P*=Pool (0/1)   *H*=Hund erlaubt (0/1)
- Daten

Personen	Wfl	Meerentfern	Pool	Hund erl.	Preis
6	65	300	0	0	720,00 €
4	57	600	0	0	734,00 €
8	127	400	1	0	1.505,00 €
5	56	600	0	1	705,00 €
8	114	100	1	0	1.412,00 €
6	70	200	0	0	864,00 €
5	90	200	0	1	1.046,00 €

Modell(e) $M = a \cdot P + b \cdot \sqrt{W} + c \cdot M + d \cdot P + e \cdot H + f$

Fußball

- Fußball. Ziel: Spielergebnisse vorhersagen
- 1. Daten: Alter Länderspielergebnisse. Konkret 628 Ergebnisse in einer Liste, ein Eintrag bspw: [Grossbritannien, Brasilien,0,2]
- Parameter: Jede der i=1..n Mannschaften wird eine Offensivstärke o_i und eine Definsivstärke d_i zugeschrieben.
  - Bedeutung: Wenn i gegen j spielt, erwartet man, dass i o_i-d_j Tore schießt.
- Man benötigt ein Abstandsmaß dafür, wie weit zwei Ergebnisse auseinander liegen.

```
(%i6) prognose(i,j):=[o[i]-d[j],o[j]-d[i]];
```
(%o6) $\mathrm{prognose}(i,j):=[o_i-d_j,o_j-d_i]$

```
(%i7) abstand(E,F):= (E[1]-F[1])^2+(E[2]-F[2])^2;
```
(%o7) $\mathrm{abstand}(E,F):=(E_1-F_1)^2+(E_2-F_2)^2$

```
(%i8) abstand([2,3],[5,1]);
```
(%o8) 13

Fußball

Universität Augsburg University

```
(%i12) abstandsumme(data):=sum(abstand(prognose(indexOf(data[i][1]),indexOf(data[i][2])),
                         [data[i][3],data[i][4]]),i,1,length(data));
```

(%o12) $\mathrm{abstandsumme}(data) := \sum_{i=1}^{\mathrm{length}(data)} \mathrm{abstand}\left(\mathrm{prognose}\left(\mathrm{indexOf}\left((data_i)_1\right),\mathrm{indexOf}\left((data_i)_2\right)\right),[(data_i)_3,(data_i)_4]\right)$

```
(%i13) prognose(indexOf(data[111][1]),indexOf(data[111][2]));
```

(%o13) $[o_4-d_{19},o_{19}-d_4]$

```
(%i14) params:append(makelist(o[i],i,1,length(laenderliste)),
                makelist(d[i],i,1,length(laenderliste)) );
```

(%o14) $[o_1,o_2,o_3,o_4,o_5,o_6,o_7,o_8,o_9,o_{10},o_{11},o_{12},o_{13},o_{14},o_{15},o_{16},o_{17},o_{18},o_{19},o_{20},o_{21},o_{22},o_{23},o_{24},o_{25},o_{26},o_{27},o_{28},o_2$
$d_{13},d_{14},d_{15},d_{16},d_{17},d_{18},d_{19},d_{20},d_{21},d_{22},d_{23},d_{24},d_{25},d_{26},d_{27},d_{28},d_{29},d_{30},d_{31},d_{32}]$

```
(%i15) optimum:lbfgs(abstandsumme(data),  params,
       makelist(1.0,i,1,2*length(laenderliste)),   1e-2, [-1,0] );
```

(%o15) $[o_1=2.959533143899321,o_2=2.079765587892267,o_3=1.553469912600115,$

```
(%i16) Vorhersage(LandA,LandB):=block([i:indexOf(LandA), j:indexOf(LandB)],
          subst(optimum,prognose(i,j)));
```

(%o16) $\mathrm{Vorhersage}(LandA,LandB) :=$
$\mathrm{block}([i:\mathrm{indexOf}(LandA),j:\mathrm{indexOf}(LandB)],\mathrm{subst}(optimum,\mathrm{prognose}(i,j)))$

```
(%i17) Vorhersage(USA,Deutschland);
```

(%o17) [1.574865805028411,2.207739864343008]

Fußball

- Lehren daraus
  - Fußballwetten sind ein Geschäft. Mathematik kann dabei von Vorteil sein!
  - Es gibt sehr viele alternative Modelle für Fussballergebnisse:
    - Abstand von Ergebnissen anders bewerten
    - Ältere Spiele schwächer gewichten
    - Prognoseterm ändern: Vielleicht spielt eine Mannschaft besser, wenn sie gegen eine gute Mannschaft spielt.

Optimalität

- Ist noch viel mehr
- Physik: Alle Systeme bewegen sich so, dass sie eine bestimmte Größe Minimieren
- Utilitarismus: Moralisch gut ist die Handlung, die das Glück aller Betroffener maximiert
- Wer Lust hat, mit den Dateien zu spielen: reinhard.oldenburg@math.uni-augsburg.de