Hier eine Alternativlösung zur A40. Sie setzt nach der ersten Formel von Markus' Lösung an:

Sei $N = (N_{ik})_{ik}$ die (noch unbekannte) darstellende Matrix von f^T bezüglich der Basis B' im Quellraum V' und B im Zielraum V. Dann gilt

$$N_{ik} = \langle b_i, f^T(b'_k)\rangle = \langle f(b_i), b'_k\rangle = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\langle b'_j, b'_k\rangle = a_{ki}$$

für alle $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$, das war zu zeigen.

Das erste Gleichheitszeichen kann man wie folgt begründen: Ist allgemein $b_1, \dots, b_n$ eine Orthonormalbasis, so lässt sich der Koeffizient γ_i von b_i in der Basisdarstellung eines beliebigen Vektors x,

$$x = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j b_j,$$

über die Formel $\gamma_i = \langle b_i, x\rangle$ berechnen, denn

$$\langle b_i, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \langle b_i, b_j\rangle = \gamma_i.$$