Hilfreiche Schlussregeln

– Um zu zeigen, dass zwei lineare Abbildung $A, B\colon V \to W$ gleich sind, dass also

$$Av = Bv$$

für alle Vektoren $v \in V$ gilt, genügt es, die „Gleichheit auf einer Basis zu testen“, d.h. man muss lediglich zeigen, dass

$$Ab_i = Bb_i$$

für $i = 1, \dots, n$ gilt, wobei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine beliebige Basis von V ist.

– Um zu zeigen, dass ein Vektor $v \in V$ eines euklidischen/unitären Vektorraums V null ist, genügt es zu zeigen, dass er auf allen Vektoren des Vektorraums senkrecht steht, d.h. dass für alle $w \in V$ gilt:

$$\langle v, w \rangle = 0$$

– Um zu zeigen, dass zwei lineare Abbildung $A, B\colon V \to W$ gleich sind (wobei hier nur W ein euklidischer/unitärer Vektorraum sein muss), genügt es, für alle $v \in V$ und alle $w \in W$ zu zeigen, dass gilt:

$$\langle Av, w \rangle = \langle Bv, w \rangle$$

Mit den spitzen Klammern ist hier das Skalarprodukt auf W gemeint.

Orthogonalität von Vektoren

Sei V ein euklidischer/unitärer Vektorraum. Das Skalarprodukt auf V werde als $\langle \cdot, \cdot \rangle$ geschrieben.

Def.: (Orthogonalität von Vektoren)

Eine Menge $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ von Vektoren heißt genau dann *orthogonal* (oder auch *Orthogonalsystem*), wenn für alle $i, j = 1, \dots, k$ mit $i \neq j$ gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0$$

Def.: (Orthonormalität von Vektoren)

Eine Menge $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ von Vektoren heißt genau dann *orthonormal* (oder auch *Orthonormalsystem*), wenn für alle $i, j = 1, \dots, k$ gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Def.: (Orthonormalbasis)

Eine *Orthonormalbasis* (ONB) ist eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ derart, dass die Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ orthonormal ist.

Orthogonalität von Matrizen und linearen Abbildungen

Def.: (Orthogonalität von Matrizen)

Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt genau dann *orthogonal*, wenn schon eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Die Spalten von M bilden bezüglich des Standardskalarprodukts (!) in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ein Ortho*normal*system (!).
2. $\langle Mv, Mw\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ bzw. $v, w \in \mathbb{C}$, wobei die spitzen Klammern wieder das Standardskalarprodukt (!) bezeichnen.
3. $M^\star M = E$. (Dabei ist $M^\star := \overline{M}^{\mathrm{T}}$.)
4. M ist invertierbar mit $M^{-1} = M^\star$.

Def.: (Orthogonalität von linearen Abbildungen)

Eine lineare Abbildung $A\colon V \to V$ heißt *orthogonal*, wenn schon eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in V$.
2. $\|Ax\| = \|x\|$ für alle $x \in V$.
3. $A^\star A = \mathrm{Id}$.
4. A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^\star$.

Satz: (Zusammenhang zwischen Orthogonalität von Matrizen und Abbildungen)

Eine lineare Abbildung $A\colon V \to V$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre Matrix $M(A; B, B)$ bezüglich einer (und dann jeder) Orthonormalbasis B von V orthogonal ist.

Dieser Satz ist so zu verstehen: Hat man eine orthogonale lineare Abbildung, so sind ihre Matrizen bezüglich aller Orthonormalbasen orthogonal. Hat man umgekehrt eine orthogonale Matrix einer linearen Abbildung bezüglich einer Orthonormalbasis, so ist auch die lineare Abbildung orthogonal und damit sind wiederum sogar alle ihre Matrizen bezüglich Orthonormalbasen orthogonal.

Warnung: Der Satz wird falsch, wenn man die Forderung nach Orthonormalität der Basis fallen lässt. Es kann also sein, dass die Matrix einer orthogonalen Abbildung bezüglich einer Nicht-Orthonormalbasis nicht orthogonal ist, es kann aber auch passieren, dass sie es durch Zufall trotzdem ist. Sogar orthogonale Basen funktionieren nicht.

Prop.: (Zusammenhang eines beliebigen Skalarprodukts zum Standardskalarprodukt)

Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Dann gilt für alle Vektoren $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$, $y = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i \in V$:

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i},$$

wobei die spitzen Klammern auf der linken Seite das gegebene Skalarprodukt in V und die auf der rechten Seite das Standardskalarprodukt (!) auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ bezeichnen.

Warnung: Auch diese Proposition wird falsch, wenn die gewählte Basis nicht orthonormal ist.

Symmetrie/Selbstadjungiertheit

Def.: (Adjungierte Matrix)

Zu jeder Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt $M^\star := \overline{M}^{\mathrm{T}}$ die zu M *adjungierte Matrix*. Diese Matrix (und auch nur diese Matrix) erfüllt für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}$ folgende Eigenschaft:

$$\langle Mv, w\rangle = \langle v, M^\star w\rangle$$

Dabei bezeichnen die spitzen Klammern das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$.

Im reellen Fall ist einfach $M^\star = M^{\mathrm{T}}$.

Bem.: Der Begriff der „adjunkten Matrix" ist ein ganz anderer.

Def.: (Symmetrie/Selbstadjungiertheit von Matrizen)

Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt genau dann *symmetrisch/selbstadjungiert*, falls schon eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $M^\star = M$.
2. $\langle Mv, w\rangle = \langle v, Mw\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$.

(Die erste Bedingung kann man natürlich schneller nachrechnen als die zweite.)

Zur Sprechweise: „Symmetrisch" sagt man bei reellen Matrizen, „selbstadjungiert" bei komplexen. Ein Synonym zu „selbstadjungiert" ist „hermitesch".

Def.: (Adjungierte Abbildung)

Zu jeder linearen Abbildung $A\colon V \to V$ gibt es genau eine *adjungierte Abbildung* $A^\star\colon V \to V$, die folgende definierende Eigenschaft für alle $x, y \in V$ erfüllt:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^\star y\rangle$$

In der Praxis findet man die adjungierte Abbildung durch den weiter unten stehenden Satz.

Def.: (Symmetrie/Selbstadjungiertheit von linearen Abbildungen)

Eine lineare Abbildung $A\colon V \to V$ heißt genau dann *symmetrisch/selbstadjungiert*, wenn schon eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ für alle $x, y \in V$.
2. $A^\star = A$.

Satz: (Zusammenhang zwischen der adjungierten Matrix und adjungierten Abbildung)

Sei B eine Orthonormalbasis von V und $A\colon V \to V$ eine beliebige lineare Abbildung. Dann ist die Matrix der zu A adjungierten Abbildung die Adjungierte der Matrix von A:

$$M(A^\star; B, B) = M(A; B, B)^\star$$

Warnung: Der Satz wird abermals falsch, wenn man die Forderung nach Orthonormalität von B fallen lässt: Dann kann es sein, dass $M(A^\star; B, B) \neq M(A; B, B)^\star$ gilt; es kann aber auch zufälligerweise trotzdem stimmen.

Satz: (Zusammenhang zw. Symmetrie/Selbstadjungiertheit von Matrizen und Abbildungen)

Eine lineare Abbildung $A\colon V \to V$ ist genau dann symmetrisch/selbstadjungiert, wenn ihre Matrix $M(A; B, B)$ bezüglich einer (und dann jeder) Orthonormalbasis B von V symmetrisch/selbstadjungiert ist.

Warnung: Auch dieser Satz wird falsch, wenn man Nicht-Orthonormalbasen nutzt. In diesem Fall also kann die Matrix zur Abbildung symmetrisch sein, obwohl es die Abbildung nicht ist, oder umgekehrt. Und es gibt auch Fälle, in denen die Aussage durch Zufall doch stimmt.

Eigenvektoren und Eigenwerte

Sei im Folgenden $A\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Der Vektorraum V muss in diesem Abschnitt nicht mehr notwendigerweise ein euklidischer/unitärer Vektorraum sein.

Def.: (Eigenvektoren und Eigenwerte)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ eine Zahl und $v^{\neq 0} \in V$ ein Vektor. Genau dann heißt v *Eigenvektor* von A zum *Eigenwert* λ, falls gilt:

$$Av = \lambda v$$

Eine Zahl λ heißt genau dann *Eigenwert* von A, falls es einen Eigenvektor zu λ gibt.

Zur Sprechweise: Den Nullvektor bezeichnet man niemals als Eigenvektor.

Def.: (Eigenraum)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Dann heißt der folgende Unterraum *Eigenraum von A zum Eigenwert λ*:

$$\mathrm{Kern}(A - \lambda Id) \subset V$$

Dieser Raum enthält neben dem Nullvektor genau die Eigenvektoren von A zu λ.

Satz: (Finden der Eigenwerte)

Sei $A\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind die Eigenwerte von A genau gegeben durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda\,\mathrm{Id})$.

Bem.: Zum Ausrechnen der Determinante geht man, wie ganz allgemein beim Ausrechnen von Determinanten, zu einer Matrix $M(A - \lambda\,\mathrm{Id}; B, B)$ von $A - \lambda\,\mathrm{Id}$ über, wobei B hier eine ganz beliebige, auch nicht orthonormale Basis sein kann. Diese Basis B muss man aber sowohl im Quell-, als auch im Zielraum nutzen, man darf also nicht etwa zu $M(A - \lambda\,\mathrm{Id}; B, \tilde{B})$ übergehen.

Prop.: (Eigenvektoren bei symmetrischen/selbstadjungierten Abbildungen)

Ist V ein euklidischer/unitärer Vektorraum und die lineare Abbildung A symmetrisch/selbstadjungiert, so stehen Eigenvektoren zu *verschiedenen* Eigenwerten von A stets senkrecht aufeinander.

Warnung: Sie müssen nicht notwendigerweise ortho*normal* sein. Auch müssen Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert nicht notwendigerweise senkrecht aufeinander stehen.

Ferner wird die Aussage falsch, wenn man auf die Symmetrie/Selbstadjungiertheit verzichtet: Dann können Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten aufeinander senkrecht stehen, müssen aber nicht.

Diagonalisierbarkeit

Sei weiterhin $A: V \to V$ eine beliebige lineare Abbildung.

Def.: (Diagonalisierbarkeit)

Die lineare Abbildung A heißt genau dann *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis B gibt, bezüglich der die Matrix $M(A; B, B)$ von A Diagonalgestalt hat.

(Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar, auch nicht im Komplexen.)

Beob.: (Zusammenhang von Diagonalisierbarkeit zu Eigenvektoren)

Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Genau dann ist die Matrix von A bezüglich B in Diagonalform, d.h.

$$M(A; B, B) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

für gewisse Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, wenn für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$Ab_i = \alpha_i b_i,$$

d.h. wenn für $i = 1, \ldots, n$ der Basisvektor b_i ein Eigenvektor von A zu α_i ist.

Die lineare Abbildung A ist also genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis von V gibt, die nur aus Eigenvektoren von A besteht.

Satz: (Diagonalisierbarkeit symmetrischer/selbstadjungierter linearer Abbildungen)

Sei V ein euklidischer/selbstadjungierter Vektorraum. Dann gilt: Ist A symmetrisch/selbstadjungiert, so ist A diagonalisierbar.

Warnung: Die Umkehrung gilt nicht, es gibt also diagonalisierbare lineare Abbildungen, die nicht symmetrisch/selbstadjungiert sind.