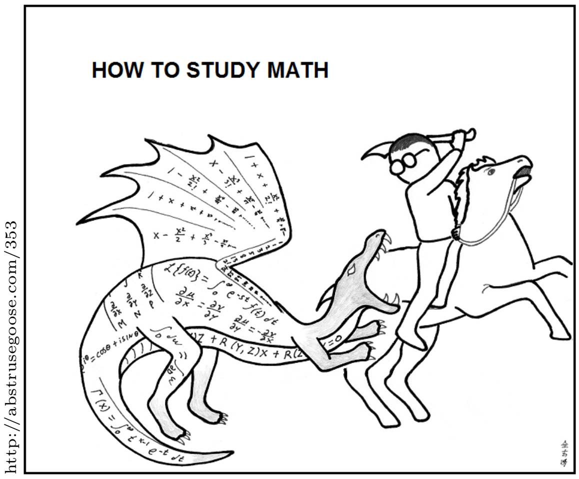
Beweistechniken



Don't just read it; fight it!

--- *Paul R. Halmos*

Bis man zum eigentlichen Kern eines mathematischen Problems vordringt, muss man im Allgemeinen mehrere Definitionen entfalten. Das gelingt meist mit der Technik des direkten Beweisens („immer der Nase nach").

Beispiel. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Wir wollen zeigen:

$$f \text{ injektiv} \wedge g \text{ injektiv} \implies g \circ f \text{ injektiv}.$$

Mit den auf der Rückseite beschriebenen Vorlagen lautet ein sehr ausführlicher Beweis wie folgt:

> Gelte, dass f und g injektiv sind. Um dann die Injektivität von $g \circ f$ zu zeigen, seien $x, \tilde{x} \in X$ beliebig und gelte $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(\tilde{x})$. Nach Definition der Abbildungsverkettung gilt also
>
> $$g(f(x)) = g(f(\tilde{x})).$$
>
> Da g injektiv ist, folgt daraus
>
> $$f(x) = f(\tilde{x}).$$
>
> Da auch f injektiv ist, folgt daraus wiederum
>
> $$x = \tilde{x}.$$
>
> Das war zu zeigen.

Der Kern der Argumentation liegt in den Folgerungen zwischen den drei abgesetzten Gleichungen, der Vorbau ist aber trotzdem wichtig; insbesondere ist es wichtig, die Variablen x und $\tilde{x}$ richtig einzuführen. Setzt man Vertrautheit des Lesers mit den Voraussetzungen der Angabenstellung voraus, kann man den Beweis etwas kürzer auch so formulieren:

> Seien $x, \tilde{x} \in X$ beliebig mit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(\tilde{x})$. Dann folgt:
>
> $$g(f(x)) = g(f(\tilde{x})) \stackrel{g \text{ inj.}}{\implies} f(x) = f(\tilde{x}) \stackrel{f \text{ inj.}}{\implies} x = \tilde{x},$$
>
> das war zu zeigen.

Mathematische Beweise sind in erster Linie (deutsche, englische, ...) *Texte*. Natürlich kommen in Beweisen Formeln durchaus vor, aber von der äußeren Struktur her muss ein Beweis eine logisch schlüssige Argumentation sein. Daher ist folgender Beweisversuch ungenügend:

$$g(f(x)) = g(f(\tilde{x})) \qquad f(x) = f(\tilde{x}) \qquad x = \tilde{x}$$

Direkter Beweis

Konjunktion („und“)

Um $A \land B$ direkt zu zeigen, muss man sowohl A als auch B zeigen.

Vorlage. Da ..., gilt A. Da außerdem ..., gilt auch B.

Disjunktion („oder“)

Um $A \lor B$ direkt zu zeigen, muss man zeigen, dass A oder B (oder beide – das sagt man selten dazu) gelten. Meistens muss man dazu eine Fallunterscheidung führen.

Vorlage. Wegen ... können nur folgende Fälle eintreten:
Fall 1: Wegen ... gilt dann A.
Fall 2: Wegen ... gilt dann B.

Negation (Verneinung)

Um $\neg A$ direkt zu zeigen, zeigt man, dass die Annahme, dass A doch stimmt, zu einem Widerspruch führt.

Vorlage. Angenommen, es gilt doch A. Dann ..., das kann nicht sein.

Implikation („wenn, dann“)

Um $A \Rightarrow B$ direkt zu zeigen, setzt man die Gültigkeit von A voraus und zeigt dann B. Ob A tatsächlich stimmt, ist für die Argumentation nicht relevant, es geht nur um die hypothetische Schlussfolgerung.

Vorlage. Gelte A. Dann ..., daher gilt B.

Äquivalenz („genau dann, wenn“)

Um $A \Leftrightarrow B$ direkt zu zeigen, zeigt man $A \Rightarrow B$ (die sog. Hinrichtung) und $B \Rightarrow A$ (die sog. Rückrichtung). Ob dabei A und B tatsächlich stimmen, ist nicht relevant.

Vorlage. „$\Rightarrow$“: Gelte A. Dann ..., daher gilt B.
„$\Leftarrow$“: Gelte B. Dann ..., daher gilt A.

Manchmal sind die Beweise der beiden Richtungen so ähnlich, dass man sie zu einem zusammenfassen kann:

Vorlage. A gilt genau dann, wenn ...; das ist genau dann der Fall, wenn ...; ...; das ist genau dann der Fall, wenn B gilt.

Oder kürzer notiert:

Vorlage. $A \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow B$.

Allquantifikation („für alle“)

Um $\forall x \in X\colon A(x)$ direkt zu zeigen, zeigt man, dass für jedes $x \in X$ jeweils die Aussage $A(x)$ gilt. Das macht man durch ein einziges, einheitliches Argument.

Vorlage. Sei $x \in X$ beliebig. Da $\ldots$, gilt $A(x)$.

Der bei den Auslassungspunkten auszuführende Beweis darf dabei von x nur voraussetzen, dass es ein Element der Menge X ist: Der Beweis muss mit jedem $x \in X$ zurechtkommen.

Beispiel. Wir möchten zeigen: $\forall x \in \mathbb{R}\colon (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Das geht so: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt $(x+1)^2 = (x+1) \cdot (x+1) = x^2 + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1 = x^2 + 2x + 1$.

Der folgende Versuch gibt dagegen keinen gültigen Beweis ab. Er setzt implizit von x voraus, dass x größer als 2 ist.

Nichtbeispiel. Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen. Wir möchten versuchen, die falsche Behauptung „$\forall x \in \mathbb{P}\colon x$ ist ungerade“ nachzuweisen. Das scheint so zu gehen: Sei $x \in \mathbb{P}$ beliebig. Wenn x durch 2 teilbar wäre, so bestünde x aus mehr als einem Primfaktor und wäre daher nicht prim. Nach Voraussetzung ist x aber prim. Somit ist x nicht durch 2 teilbar, also ungerade.

Existenzquantifikation („es gibt“)

Um $\exists x \in X\colon A(x)$ direkt zu zeigen, gibt man explizit ein $x \in X$ an, für das $A(x)$ gilt. Um eine geeignete Definition für x zu finden, benötigt man meist etwas Kreativität. Gelegentlich kann es helfen, diese Stelle im Beweis zunächst freizulassen und mit dem Rest des Beweises fortzufahren; so kann man auf eine Idee kommen, wie x zu setzen ist.

Vorlage. Setze $x := \ldots$. Dann liegt x in der Tat in X, denn $\ldots$; und wegen $\ldots$ gilt $A(x)$.

Beispiel. Seien $p_1, \ldots, p_n$ irgendwelche Primzahlen. Wir möchten die Behauptung „$\exists x \in \mathbb{N}\colon x$ ist prim und ungleich $p_1, \ldots, p_n$“ zeigen. Das geht so: Wir definieren $N := p_1 \cdots p_n + 1$. Da N mindestens 2 ist, besteht N aus irgendwelchen Primfaktoren. Nennen wir den ersten von ihnen x. [Jetzt haben wir unseren Kandidat für x gefunden!] Diese Zahl x ist also prim und zudem ungleich den $p_1, \ldots, p_n$ (denn N ist durch diese Zahlen nicht teilbar – es bleibt der Rest 1). [Und somit haben wir bestätigt, dass x alle Anforderung erfüllt.]

Bemerkenswert ist, dass die Definition von N (und somit von x) unser eigener Einfall war. In der Formulierung der zu zeigenden Behauptung kam sie nicht vor.

Teilmengenbeziehung

Um $X \subseteq Y$ direkt zu zeigen, wobei X und Y Mengen sind, zeigt man, dass jedes Element von X auch in Y liegt.

Vorlage. Sei $x \in X$ beliebig. Dann $\ldots$, daher gilt $x \in Y$.

Gleichheit von Mengen

Um $X = Y$ direkt zu zeigen, zeigt man $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$.

Vorlage. „$\subseteq$“: Sei $x \in X$ beliebig. Dann $\ldots$, daher gilt $x \in Y$.
„$\supseteq$“: Sei $y \in Y$ beliebig. Dann $\ldots$, daher gilt $y \in X$.

Manchmal kann man die beiden Teilbeweise auch zu einem kombinieren.

Gleichheit von Abbildungen

Um $f = g$ direkt zu zeigen, wobei f und g beides Abbildungen $X \to Y$ sind (also dieselbe Definitions- und Zielmenge haben), zeigt man, dass die beiden Funktionen an allen Stellen ihres Definitionsbereichs übereinstimmen.

Vorlage. Sei $x \in X$ beliebig. Dann ..., daher gilt $f(x) = g(x)$.

Beweis durch Widerspruch

Um eine Aussage A zu zeigen, kann man auch zeigen, dass die Annahme von $\neg A$ zu einem Widerspruch führt.

Vorlage. Angenommen, A wäre falsch. Dann ..., das kann nicht sein.

Beweis durch Kontraposition

Um eine Implikation der Form $A \Rightarrow B$ zu zeigen, kann man auch $\neg B \Rightarrow \neg A$ zeigen, d. h. unter der Voraussetzung von $\neg B$ einen Beweis von $\neg A$ führen. Das ist häufig dann hilfreich, wenn A und B selbst negierte Aussagen sind.

Beispiel. Wenn man sich direkt an einem Beweis der Implikation

$$k \text{ ist undorig} \implies k \text{ ist unfoberant}$$

versucht, wird man durch die vielen Verneinungen vielleicht verwirrt. Möglicherweise ist es daher einfacher, die Kontraposition

$$k \text{ ist foberant} \implies k \text{ ist dorig}$$

zu zeigen.

Beweis durch Induktion

Die Beweistechnik der Induktion kann man (nur) auf Behauptungen der Form „für alle natürlichen Zahlen gilt“ oder „für alle natürlichen Zahlen ab 47 gilt“ anwenden. Wenn man sie verwendet, beweist man eine Allaussage der Form „$\forall n \in \mathbb{N} \colon P(n)$“ weder durch Überprüfen aller unendlich vieler Fälle noch durch einen direkten Beweis („Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt $P(n)$, denn ...“).

Stattdessen weist man getrennt voneinander Induktionsanfang und Induktionsschritt nach:

$$P(0) \qquad \wedge \qquad \forall n \in \mathbb{N} \colon (P(n) \Rightarrow P(n+1))$$

Das notiert man auf die in der Vorlesung und in den Übungen besprochene Art und Weise:

Vorlage. Beweis durch Induktion über n.
Induktionsanfang $n = 0$: Es gilt $P(0)$, denn ...
Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Gelte die Induktionsvoraussetzung $P(n)$. Dann gilt $P(n+1)$, denn ...