UNIVERSITÄT AUGSBURG
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Prof. Dr. Fritz Colonius

Dipl. Math. Torben Stender

„Numerische Mathematik I“

WS 2007/2008 — 1. Klausur — 8.2.2008

Bearbeitungszeit: 14:00 Uhr bis 17:00 Uhr

Aufgabe 1 (Symmetrische Matrizen).

(i) Zeigen Sie, dass symmetrische positiv definite Matrizen stets invertierbar sind.

(ii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $||A||_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$.

Aufgabe 2 (Newton Verfahren).

(i) Zeigen Sie, dass das Newton Verfahren für die Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, x \mapsto x$, immer global konvergiert.

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Funktion mit einer Nullstelle $x^* \in \mathbb{R}^d$ und $Df(x^*) \in GL(d,\mathbb{R})$. Nennen Sie einen Startwert x_0, für den das Newton Verfahren konvergiert.

(iii) Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und $Df(x_0)$ invertierbar. Für $r > 0$ sei $\bar{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : ||x - x_0|| \leq r\}$. Für das vereinfachte Newton Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - Df(x_0)^{-1}f(x_n)$$

gelte $x_n \in \bar{B}_r(x_0)$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ sowie $||\operatorname{id} - Df(x_0)^{-1}Df(x)|| \leq \frac{1}{2}$ für alle $x \in \bar{B}_r(x_0)$. Zeigen Sie, dass $||x_{n+1} - x_n|| \leq \frac{1}{2}||x_n - x_{n-1}||$ gilt, und folgern Sie dann, dass f eine Nullstelle in $\bar{B}_r(x_0)$ besitzt.

Aufgabe 3 (Lineare Ausgleichsprobleme). Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geq n$ eine Matrix vom Rang n, $b \in \mathbb{R}^m$ und $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix mit

$$Q^TA = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } Q^Tb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

wobei $b_1 \in \mathbb{R}^n, b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist.

(i) Zeigen Sie, dass die Lösung x^* des linearen Ausgleichsproblems $||b - Ax|| = \min$ durch $x^* = R^{-1}b_1$ gegeben ist.

(ii) Finden Sie eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $Q^TA = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 20 \\ \sqrt{11} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (Lagrange Interpolationspolynome). Es seien $L_i(t), i = 0, 1, \ldots, n$, die Lagrange Interpolationspolynome zu den paarweise verschiedenen Stützstellen $t_0, \ldots, t_n$. Zeigen Sie

(i) $\sum_{i=0}^{n} L_i(t) = 1$,

(ii) $\sum_{i=0}^{n} L_i(0)\, t_i^j = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n$.

Pro Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.

Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Fritz Colonius
Dipl. Math. Torben Stender

„Numerische Mathematik I“

WS 2007/2008 — 2. Klausur — 11.4.2008

Bearbeitungszeit: 9:00 Uhr bis 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (Normen). Sei $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Spur}(A^t A)}$ die Frobeniusnorm von $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Man zeige folgende Aussagen:

(i) $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$.

(ii) Die Frobeniusnorm ist keine Operatornorm.

Aufgabe 2 (Newton Verfahren).

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Newton Verfahren für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$, immer global konvergiert.

(ii) Zur Bestimmung des Fixpunktes x^* des Diffeomorphismusses $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit $\|F(x)\| \neq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ seien die folgenden Iterationsvorschriften für $k = 0, 1, \ldots$ definiert:

$$x_{k+1} = F(x_k) \qquad \text{und} \qquad x_{k+1} = F^{-1}(x_k).$$

Zeigen Sie, dass mindestens eine der beiden Iterationen lokal konvergiert.

Aufgabe 3 (Ausgleichsproblem für Polynomapproximation). Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $m \geq n$. Gesucht ist ein Polynom n-ten Grades

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(m)} x^i,$$

so dass für $x_j = \frac{j}{m}$ gilt

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m} |f(x_j) - p_m(x_j)|^2 \to \min.$$

a.) Formulieren Sie diese Aufgabenstellung als lineares Ausgleichsproblem

$$a^{(m)} = \operatorname*{arg\,min}_{a\in\mathbb{R}^{n+1}} \|A^{(m)}a - b^{(m)}\|_2.$$

Dabei ist $a^{(m)} = [a_0^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)}]^T$ der Koeffizientenvektor des gesuchten Polynoms. Geben Sie die Matrix $A^{(m)}$ und den Vektor $b^{(m)}$ an.

b.) Zeigen Sie, dass für $n = 3$ die Folge $(a^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ konvergiert, und bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, als dessen Lösung sich der Grenzwert a^* ergibt.

Aufgabe 4 (Hermite-Interpolation). Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 0, \ldots, m$ natürliche Zahlen mit

$$\sum_{i=0}^{m} n_i = n + 1.$$

Zeigen Sie: Zu reellen Zahlen $f_i^{(\nu)}$, $i = 0, \ldots, m$ und $\nu = 0, \ldots, n_i - 1$ gibt es genau ein Polynom $p \in \mathbb{P}_n$, so dass für die ν-te Ableitung $p^{(\nu)}$ von p gilt:

$$p^{(\nu)}(x_i) = f_i^{(\nu)} \qquad \text{für } i = 0, \ldots, m \text{ und } \nu = 0, \ldots, n_i - 1.$$

Pro Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden.