

1 $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, f konvex auf $D \Rightarrow \forall x^0 \in D$ ist $N_f(f(x^0)) \cap D$ konvex.

Seien $x, y \in N_f(f(x^0)) \cap D$ bel., $\lambda \in [0, 1]$ bel.

$\lambda x + (1-\lambda)y \in D$, da D konvex.

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ konvex}}}{\leq} \lambda \underbrace{f(x)}_{\substack{\leq f(x^0), \text{ da} \\ x \in N_f(f(x^0))}} + (1-\lambda) \underbrace{f(y)}_{\substack{\leq f(x^0), \\ \text{ da } y \in N_f(f(x^0))}} \leq f(x^0)$$

$$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in N_f(f(x^0))$$

$\Rightarrow$ Beh.

(ii) $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, konvex, f gleichmäßig konvex auf D , so besitzt f genau eine Minimalstelle in D .
(damit insb. strikt konvex)

Beweis:

Sei $y \in N_f(f(x^0)) \cap D$ bel. Da f glm. konvex $\exists m > 0$

$$\nabla f(x^0)^T (y - x^0) + \frac{m}{2} \|y - x^0\|^2 \leq \underbrace{f(y) - f(x^0)}_{\leq f(x^0), \text{ da } y \in A} \leq 0$$

$$\Rightarrow \|y - x^0\|^2 \leq -\frac{2}{m} \nabla f(x^0)^T (y - x^0) \\ = \frac{2}{m} \nabla f(x^0)^T (x^0 - y) \leq \frac{2}{m} \|\nabla f(x^0)\| \|y - x^0\|$$

$$\Rightarrow \|y - x^0\| \leq \frac{2}{m} \|\nabla f(x^0)\|$$

Aufgabe 3 (ii) Blatt 1

$\Rightarrow N_f(f(x^0)) \cap D$ beschränkt $\Rightarrow f$ nimmt auf D ein Minimum an.

Ang. es gäbe mehr als eine Minimalstelle, z.B. x_1 und x_2 , $x_1 \neq x_2$:

für $\lambda \neq 0$
 $\neq 1$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) \underbrace{f(x_2)}_{= f(x_1)} = f(x_1)$$

Funktionswert wäre echt kleiner als das Minimum ∇ .

$\Rightarrow f$ nimmt genau ein Minimum an.

Was ist, wenn f statt glm. konvex nur strikt konvex ist? Dann gilt (ii) nicht:

$f(x) = e^x$ ist strikt konvex, $D =]-\infty, 0]$ abgeschlossen, konvex

$\leadsto f$ besitzt keine Minimalstelle auf D .

② Sei $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, F' Lipschitz mit Konstante $L \geq 0$, $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex.

z.z: $\forall x, y$ gilt

$$\stackrel{!}{D} \quad \|F(y) - F(x) - F'(x)(y-x)\| \leq \frac{L}{2} \|y-x\|^2$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|F(y) - F(x) - F'(x)(y-x)\| &\stackrel{*}{=} \left\| \int_0^1 (F'(x+t \cdot (y-x)) - F'(x))(y-x) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \| (F'(x+t \cdot (y-x)) - F'(x))(y-x) \| dt \\ &\leq L \cdot \int_0^1 \|t \cdot (y-x)\| dt \quad \|y-x\| \\ &= L \cdot \int_0^1 t dt \quad \|y-x\|^2 = \frac{L}{2} \|y-x\|^2 \end{aligned}$$

* da

mit Mittelwertsatz

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'(x+t \cdot (y-x))(y-x) dt$$

und außerdem

$$\int_0^1 F'(x)(y-x) dt = F'(x)(y-x)$$

gilt.

③ Sei $X^{(n)} = \{x_u^{(n)} \mid f(x_u^{(n)}) - L \frac{\Delta n}{2} \leq f(\bar{x}^{(n)})\}$. Dann gilt

$$H_d(X^{(n)}, X_{glob}^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

1. Vorbemerkung: für jede Folge $(y^{(n)})$ mit $y^{(n)} \in X^{(n)}$ gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} f^* & \leq & f(y^{(n)}) & \leq & f(\bar{x}^{(n)}) & + & L \frac{\Delta n}{2} \\ \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ n \rightarrow \infty & & f^* \text{ Min.} & & y^{(n)} \in X^{(n)} & & 0 \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ f^* & & & & f^* & & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(y^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^*$$

2. Vorbemerkung: Der Grenzwert jeder konv. Teilfolge von $(y^{(n)})$ ist glob. Optimalstelle:

$$\text{Sei } y^{(n_k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{y}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} f(y^{(n_k)}) & \xrightarrow{f \text{ stetig}} & f(\bar{y}) \\ \downarrow \text{Bem. 1} & & \\ f^* & & \end{array} \quad \Rightarrow f(\bar{y}) = f^*$$

Ang. $H_d(X^{(n)}, X_{glob}^*)$ ist keine Nullfolge, d.h. es gibt ein ε , so dass $H_d(X^{(n_k)}, X_{glob}^*) > \varepsilon$ für eine Teilfolge $(X^{(n_k)})_k$, der Einfachheit halber schreiben wir aber $(X^{(n)})$ statt $(X^{(n_k)})$.

Entweder tritt also der Fall $ed(X^{(n)}, X_{glob}^*) > \varepsilon$ oder $ed(X_{glob}^*, X^{(n)}) > \varepsilon$ unendlich oft auf.

Fall 1: $\sup_{x \in X^{(n)}} d(x, X_{glob}^*) > \varepsilon$, d.h. man findet (da $X^{(n)}$ endl. Menge)

$y^{(n)} \in X^{(n)}$ mit $d(y^{(n)}, X_{glob}^*) > \varepsilon$. $(y^{(n)})$ ist Folge wie in 1. Vorbemerkung.

Da sie beschränkt ist (alle Folgenglieder liegen in $[0, 1]$), gibt es konvergente Teilfolge die gegen ein Element aus X_{glob}^* konvergiert:

$$y^{(n_k)} \rightarrow \bar{y} \in X_{glob}^* \Rightarrow \nexists \text{ zu } d(y^{(n)}, X_{glob}^*) > \varepsilon \text{ für alle Folgenglieder}$$

Fall 2: $\sup_{z \in X_{glob}^*} d(z, X^{(n)}) > \varepsilon$, d.h. man findet $z^{(n)} \in X_{glob}^*$ mit

$d(z^{(n)}, X^{(n)}) > \frac{\varepsilon}{2}$. (X_{glob}^* kann unendliche sein, man weiß nicht ~~unbedingt~~, dass das Supremum auch angenommen wird)

③, 2

Da X_{glob}^* kompakt (Beschränktheit ist klar, da die Punkte alle in $[0, 1]$ liegen, Abgeschlossenheit auch, da der Grenzwert $\hat{z}$ einer konv. Folge $(z^{(n)})$ in X_{glob}^* wieder in X_{glob}^* liegt:

$$f^* = f(z^{(n)}) \rightarrow f(\hat{z}) \Rightarrow f(\hat{z}) = f^*$$

gibt es eine konvergente Teilfolge $z^{(n_k)}$ mit $z^{(n_k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{z} \in X_{\text{glob}}^*$.

$$d(z^{(n_k)}, X^{(n)}) > \frac{\varepsilon}{2}$$

||

$$\inf_{x \in X^{(n)}} d(z^{(n_k)}, x) \leq d(z^{(n_k)}, \bar{z}) + \inf_{x \in X^{(n)}} d(\bar{z}, x)$$

↑
wird bel. klein,
da $z^{(n_k)}$ Grenzwert $\bar{z}$
in X_{glob}^* besitzt

↑
wird bel. klein, da
für n hinreichend groß
„Nachbar“ von $\bar{z}$ in $X^{(n)}$ ist
und Δn bel. klein wird.

$\Rightarrow \zeta$.

④ $S = [a, b]$, f stetig. $f: S \rightarrow \mathbb{R}$

(i) f ist konvex $\Rightarrow f$ ist unimodal

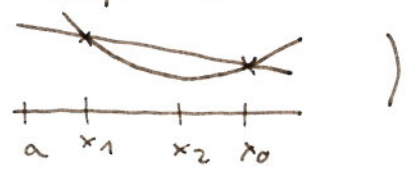
Beweis:

f nimmt auf $[a, b]$ Minimum in x_0 an. (f stetig, S kompakt)

Wenn $[a, x_0]$ ~~oder~~ $[x_0, b]$ nur aus einem Punkt bestehen, ist dort nichts weiter zu tun.

z.z: f ist auf $[a, x_0]$ mon. fallend. Seien $x_1, x_2 \in [a, x_0]$ mit $x_1 \leq x_2$.

Bei einer konvexen Funktion verläuft die Sehante immer oberhalb der Funktion. (Beispielbild:



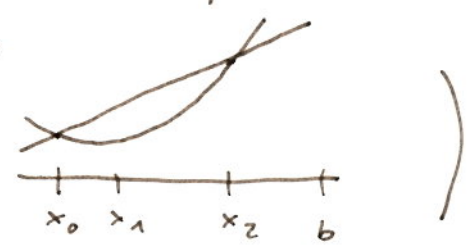
$\Rightarrow f(x_2) \leq$ Wert der Sehante durch $(x_1, f(x_1)), (x_0, f(x_0))$ an der Stelle

$$x_2 \leq f(x_1)$$

Steigung der Sehante

ist ≤ 0 , da $f(x_1) \geq \underbrace{f(x_0)}_{\text{glob. Min}}$

Beispielbild



Analog geht die Betrachtung für $[x_0, b]$.

$\Rightarrow f$ ist unimodal.

(Anm.: Die Bilder sollen nur die Idee veranschaulichen, sie sind leider schlecht gezeichnet, da in den Bildern x_0 z.B. wie das glob. Min. ist)

(ii) f ist unimodal $\Rightarrow f$ ist quasikonvex

$$\left(\begin{aligned} & f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max \{f(x), f(y)\} \\ & \forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in S \end{aligned} \right)$$

Ang. f sei nicht quasikonvex. Dann gibt es x, y, λ mit

$$f(\underbrace{\lambda x + (1-\lambda)y}_z) > \max \{f(x), f(y)\}$$

Falls z links von x_0 ($\leftarrow$ aus der Unimodalität) liegt, müsste $f(x) \geq f(z)$ gelten, da $x \leq z \leq x_0$ und f links von x_0 mon. fallend.

Falls z rechts von x_0 liegt müsste $f(y) \geq f(z)$ gelten. $\Rightarrow f$ ist quasi konvex.

(Anm: Der Fall $z = x_0$ ist in beiden obigen Fällen enthalten.)