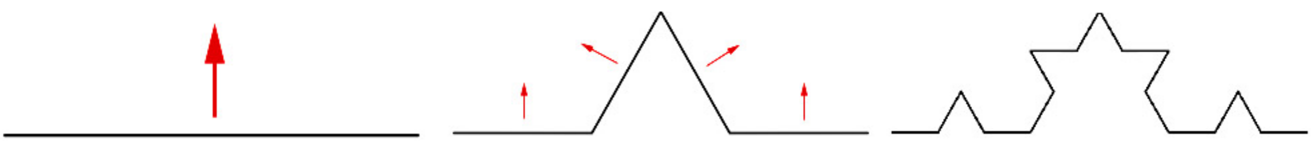
Die Kochsche Schneeflocke

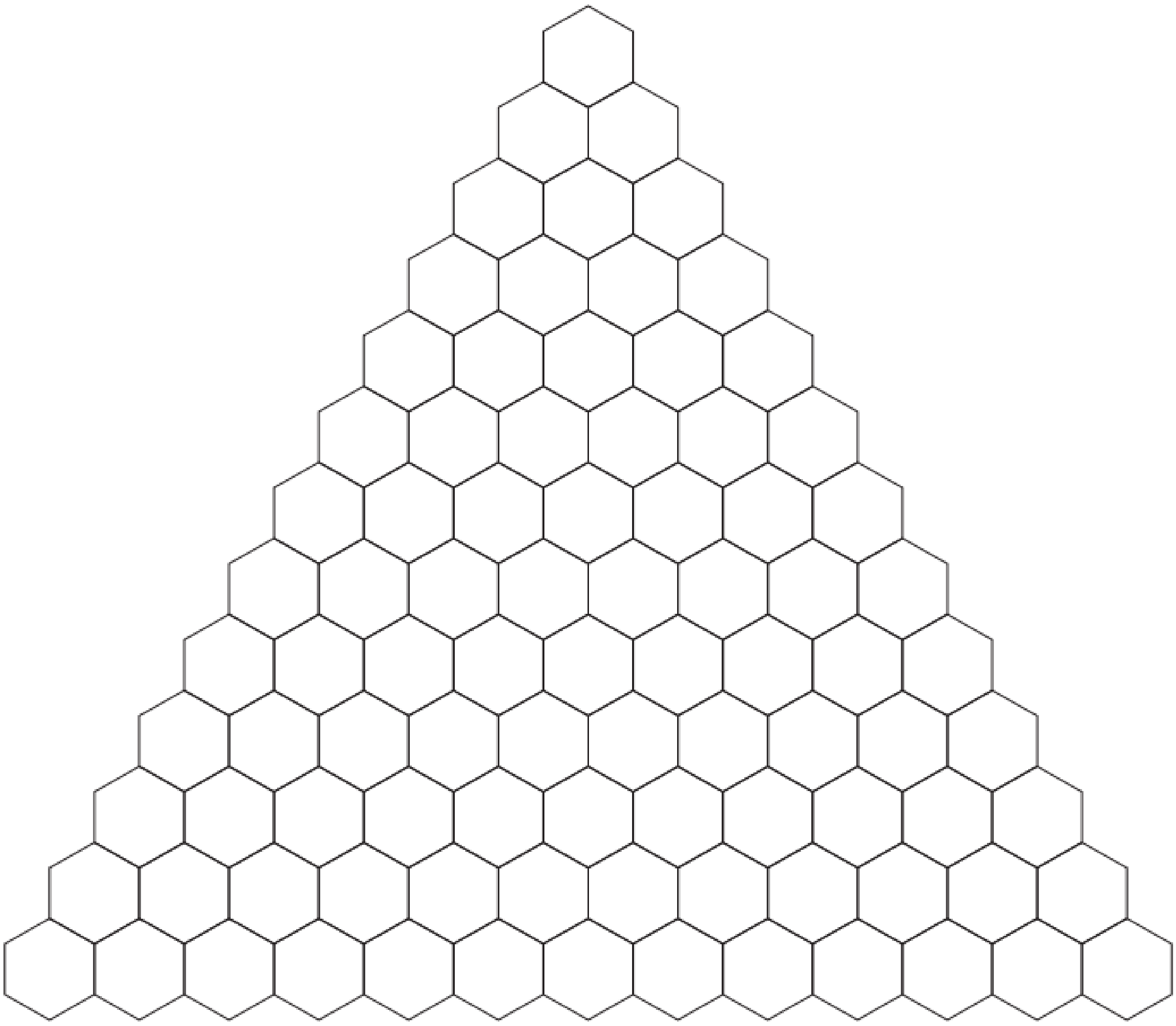
★ So konstruiert man die Kochsche Schneeflocke:



★ Was ist ihr Umfang?

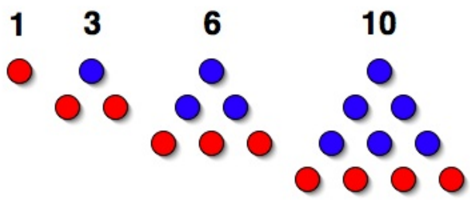
★ Was ist ihr Flächeninhalt?

Das Pascalsche Dreieck



△ Fülle das Dreieck aus. Trage dazu überall am Rand den Wert 1 ein. Der Wert jedes Kästchens ergibt sich dann als Summe der beiden Kästchen darüber.

△ Die *Dreieckszahlen* werden gebildet, indem man natürliche Zahlen aufsummiert: Die erste Dreieckszahl ist 1, danach kommt $1 + 2 = 3$, dann $1 + 2 + 3 = 6$ und so weiter. Berechne doch mal die ersten acht Dreieckszahlen!



△ Kannst du die Dreieckszahlen im Pascalschen Dreieck entdecken? Wenn ja, wo? *Kannst du erklären, wieso sie dort auftreten?*

△ Male alle Felder mit ungeraden Zahlen im Pascalschen Dreieck aus. Kannst du ein Muster erkennen?

Am Pascalschen Dreieck gibt es noch viel mehr zu entdecken.

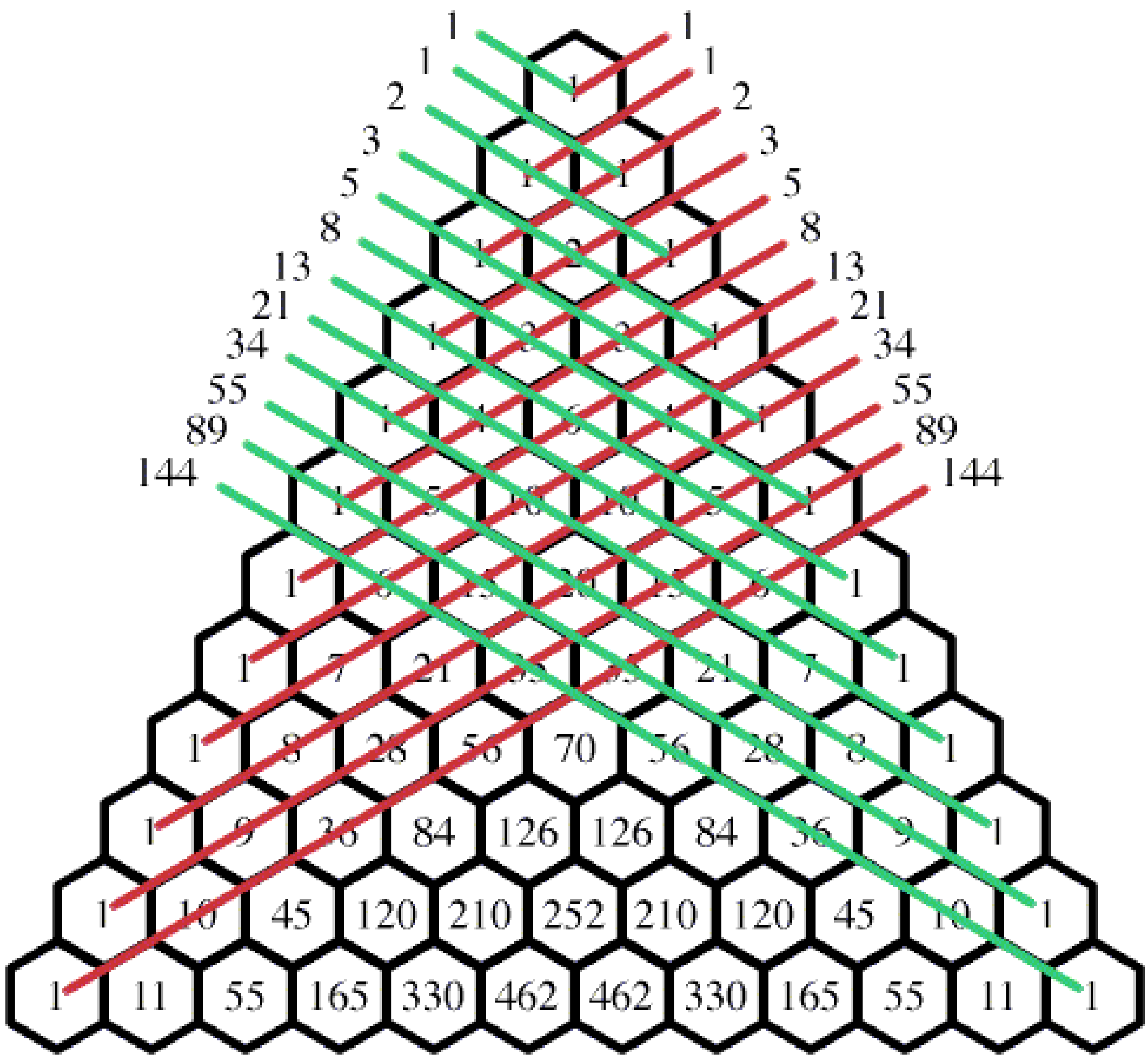
- △ Addiert man die Zahlen auf den einzelnen Zeilen des Pascalschen Dreiecks, so erhält man die *Zweier-Potenzen*: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
- △ Kennst du schon die *binomische Formel* $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$? Wolltest du schon immer wissen, wie man ähnlich flott $(x+y)^3$, $(x+y)^4$ und so weiter ausrechnen kann, ohne ewig die Klammern ausmultiplizieren zu müssen? Mit dem Pascalschen Dreieck geht das ganz einfach:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\
(x+y)^5 &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5
\end{aligned}
$$

- △ Addiert man die Zahlen des Pascalschen Dreiecks wie in der Skizze auf, so erhält man die *Fibonacci-Zahlen*! Das ist die Folge der Zahlen

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad \ldots,$$

die nächste Zahl ist also immer die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen. Fibonacci-Zahlen kommen in der Natur sehr oft vor, zum Beispiel bei Tannenzapfen und Sonnenblumen. Informiere dich doch bei Wikipedia darüber!

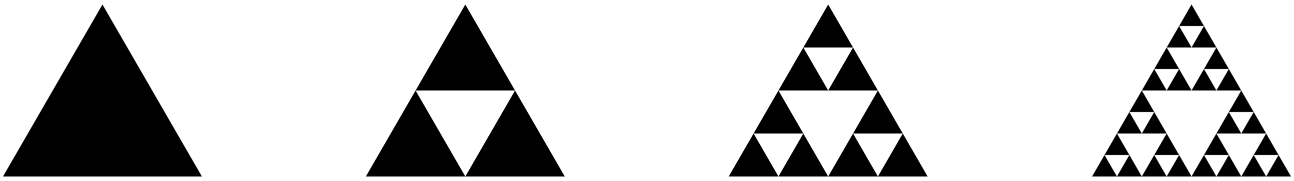


Das Sierpinski-Dreieck

▲ Spiele folgendes *Chaosspiel*:

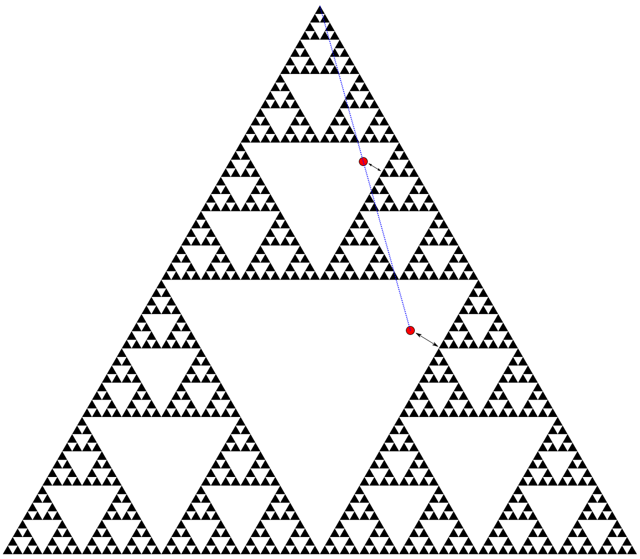
1. Zeichne ein großes gleichseitiges Dreieck.
2. Wähle einen beliebigen Startpunkt im Dreieck.
3. Such dir zufällig eine der drei Ecken aus.
4. Markiere als neuen Punkt die Mitte zwischen deiner gewählten Ecke und dem vorherigen Punkt.
5. Fahre mit dem neuen Punkt bei Schritt 3 fort.

- ▲ Obwohl man den Startpunkt und die Ecken völlig zufällig wählt, ergibt sich erstaunlicherweise näherungsweise eine regelmäßige Figur: das *Sierpinski-Dreieck*.
- ▲ Deterministisch (ohne Zufall) kann man es auch so konstruieren:



- ▲ Wieso ergibt sich beim Chaosspiel dieses Sierpinski-Dreieck?

  Der Abstand der Punkte beim Chaosspiel zum tatsächlichen, völlig regelmäßigen Sierpinski-Dreieck halbiert sich mit jedem Schritt. Für das bloße Auge liegen daher alle Punkte (bis auf einige wenige zu Beginn) auf dem Sierpinski-Dreieck. Durch die zufällige Eckenwahl wird das ganze Dreieck gleichmäßig gefüllt.



- ▲ Was ist der Umfang des Sierpinski-Dreiecks?
- ▲ Was ist der Flächeninhalt des Sierpinski-Dreiecks?
- ▲ Die Kochsche Schneeflocke und das Sierpinski-Dreieck sind Beispiele für sog. *Fraktale* (von lateinisch *fractus*, „gebrochen“). Annäherungen an Fraktale findet man an vielen Stellen in der Natur, etwa beim Romanesco-Blumenkohl, bei Flusssystemen, beim Blutkreislauf und bei Küstenlinien; außerdem sind manche physikalische Diagramme von fraktaler Natur.

  Fraktale sind wichtig, um sich klarzumachen, wie wunderlich geometrische Figuren sein können, und haben auch noch einen praktischen Nutzen: Fraktale werden in der Computergrafik eingesetzt, um realistisch aussehende Wälder und Wolken automatisiert generieren zu können.

Das Chaosspiel ist direkt auf http://tiny.cc/chaos2015 spielbar.