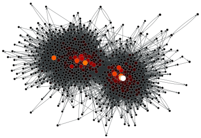
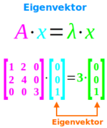
Diagonalisierung von Endomorphismen

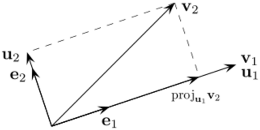
1
Anwendungen



2
Grundlagen



3
Der Spektralsatz



4
Ausblick

1. Anwendungen

Klassifikation von Quadriken

Wie sieht die Lösungsmenge aus von …

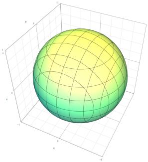
1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

1. Anwendungen

Klassifikation von Quadriken

Wie sieht die Lösungsmenge aus von …

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

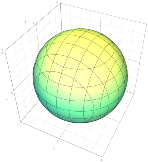


1. Anwendungen

Klassifikation von Quadriken

Wie sieht die Lösungsmenge aus von …

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?



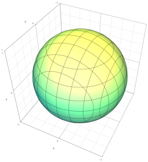
2. $2x^2 - 8x - 4xy - 2y^2 - 2z = -4$?

1. Anwendungen

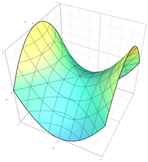
Klassifikation von Quadriken

Wie sieht die Lösungsmenge aus von …

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?



2. $2x^2 - 8x - 4xy - 2y^2 - 2z = -4$?

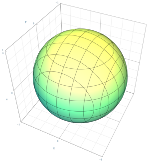


1. Anwendungen

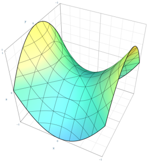
Klassifikation von Quadriken

Wie sieht die Lösungsmenge aus von …

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?



2. $2x^2 - 8x - 4xy - 2y^2 - 2z = -4$?



Geschlossene Ausdrücke

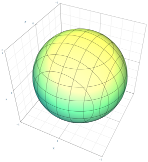
Was ist die n-te Fibonacci-Zahl?

1. Anwendungen

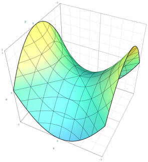
Klassifikation von Quadriken

Wie sieht die Lösungsmenge aus von …

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?



2. $2x^2 - 8x - 4xy - 2y^2 - 2z = -4$?



Geschlossene Ausdrücke

Was ist die n-te Fibonacci-Zahl?

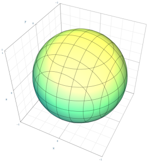
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - (-\phi)^{-n}), \quad \text{wobei } \phi = (1+\sqrt{5})/2.$$

1. Anwendungen

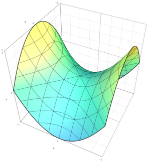
Klassifikation von Quadriken

Wie sieht die Lösungsmenge aus von …

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?



2. $2x^2 - 8x - 4xy - 2y^2 - 2z = -4$?

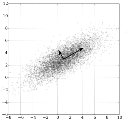


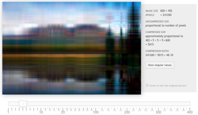
Geschlossene Ausdrücke

Was ist die n-te Fibonacci-Zahl?

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - (-\phi)^{-n}), \quad \text{wobei } \phi = (1+\sqrt{5})/2.$$

Hauptkomponentenanalyse





2. Grundlagen

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

Ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ heißt genau dann **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, bezüglich der die Darstellungsmatrix von φ Diagonalgestalt hat:

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. Grundlagen

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

Ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ heißt genau dann **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, bezüglich der die Darstellungsmatrix von φ Diagonalgestalt hat:

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Welche Endomorphismen sind diagonalisierbar?
Wie berechnet man ggf. die Diagonalform?

2. Grundlagen

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

Ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ heißt genau dann **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, bezüglich der die Darstellungsmatrix von φ Diagonalgestalt hat:

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Welche Endomorphismen sind diagonalisierbar?
Wie berechnet man ggf. die Diagonalform?

1. Eine Zahl λ heißt genau dann **Eigenwert** von φ, wenn es einen Vektor $v \neq 0$ mit $\varphi(v) = \lambda v$ gibt.
2. All solche Vektoren heißen **Eigenvektoren** von φ zu λ.

2. Grundlagen

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

Ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ heißt genau dann **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, bezüglich der die Darstellungsmatrix von φ Diagonalgestalt hat:

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Welche Endomorphismen sind diagonalisierbar?
Wie berechnet man ggf. die Diagonalform?

1. Eine Zahl λ heißt genau dann **Eigenwert** von φ, wenn es einen Vektor $v \neq 0$ mit $\varphi(v) = \lambda v$ gibt.
2. All solche Vektoren heißen **Eigenvektoren** von φ zu λ.

Prop.

1. Die Eigenwerte eines Endomorphismus φ sind genau die Nullstellen seines charakteristischen Polynoms.
2. Die EV zu λ sind genau die Elemente von $\ker(\varphi - \lambda \,\mathrm{id}) \setminus \{0\}$.

3. Der Spektralsatz

Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ heißt genau dann **normal**, wenn

$$\varphi^* \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^*.$$

Beispiel. Hermitesche Endomorphismen ($\varphi^* = \varphi$) sind normal.

Theorem. Genau dann besitzt ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, wenn φ normal ist.

4. Ausblick

Sei eine von einem Parameter t stetig abhängige Familie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

symmetrischer Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ gegeben ($a_{ij} = a_{ji}$).

4. Ausblick

Sei eine von einem Parameter t stetig abhängige Familie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

symmetrischer Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ gegeben ($a_{ij} = a_{ji}$).

Dann gibt es zu jedem Parameterwert t

- einen Satz Eigenwerte $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ und
- eine Eigenvektorbasis $(v_1(t), \ldots, v_n(t))$.

4. Ausblick

Sei eine von einem Parameter t stetig abhängige Familie

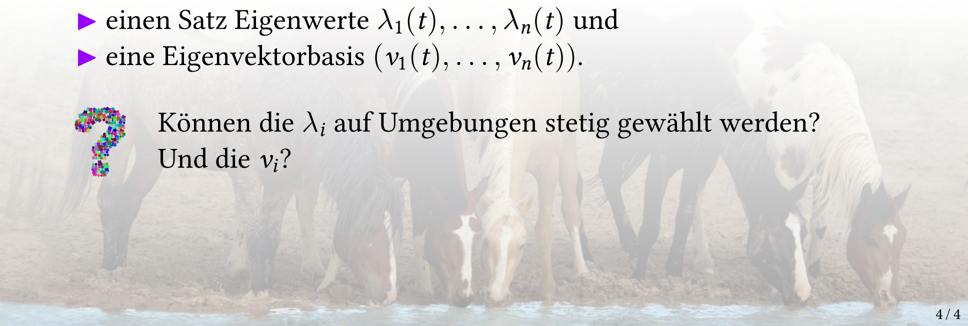
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

symmetrischer Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ gegeben ($a_{ij} = a_{ji}$).

Dann gibt es zu jedem Parameterwert t

- einen Satz Eigenwerte $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ und
- eine Eigenvektorbasis $(v_1(t), \ldots, v_n(t))$.

Können die λ_i auf Umgebungen stetig gewählt werden?
Und die v_i?



4. Ausblick

Sei eine von einem Parameter t stetig abhängige Familie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

symmetrischer Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ gegeben ($a_{ij} = a_{ji}$).

Dann gibt es zu jedem Parameterwert t

- einen Satz Eigenwerte $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ und
- eine Eigenvektorbasis $(v_1(t), \ldots, v_n(t))$.

Können die λ_i auf Umgebungen stetig gewählt werden? **Ja.**
Und die v_i? **Nein.**