Universität Augsburg
Institut für Mathematik

Topostheorie und algebraische Geometrie

Masterarbeit
von Ingo Blechschmidt

Aufgabensteller: Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen
Abgabetermin: 2. Oktober 2012

Zusammenfassung

Im ersten Teil der Arbeit erweitern wir die Stacksemantik von M. Shulman um die Fähigkeit, über abhängige Typen und lokal-interne Kategorien über einem Basistopos sprechen zu können, und verallgemeinern das Idempotenzlemma. Die damit formal durchführbare relative Kategorientheorie illustrieren wir an internen Charakterisierungen einiger Eigenschaften von Topoi und geometrischen Morphismen.

Im zweiten Teil versuchen wir, Konzepte der algebraischen Geometrie intern in den kleinen und großen Topoi eines Schemas zu verstehen. Dazu stellen wir zunächst wichtige Objekte und Morphismen dieser Topoi vor und diskutieren dann Zusammenhänge zwischen internen Eigenschaften und bekannten externen Begriffen. Um topologische Aspekte zu fassen, bedienen wir uns Ideen synthetischer Topologie.

Ich danke Dr. Andreas Krug für seine Übungsleitung in Algebraischer Geometrie, meinem Zweitkorrektor Prof. Dr. Marco Hien für seine Bereitschaft und Zeit und Prof. Dr. Marc Nieper-Wißkirchen für die Stellung des Themas und die umfassende und äußerst engagierte Betreuung.

Inhaltsverzeichnis

Konventionen

In den ersten drei Kapiteln arbeiten wir auch in unserer Metalogik konstruktiv, wir setzen also nicht voraus, dass die Kategorie der Mengen ein boolscher Topos ist.

Mit „1“ bezeichnen wir allgemein ein terminales Objekt einer Kategorie und speziell die einelementige Menge $1 := \{\star\}$, wobei $\star$ ein formales Symbol sei. In kartesisch abgeschlossenen Kategorien bezeichnen wir mit „$[X, Y]$“ das innere Homobjekt der Morphismen von X nach Y. Sind X und Y Objekte einer Scheibenkategorie $\mathcal{C}/U$, schreiben wir manchmal „$\mathrm{Hom}_U(X, Y)$“ für die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/U}(X, Y)$ der Morphismen über U.

Ein Typ oder eine Menge X heißt genau dann *bewohnt*, wenn $\exists x : X$. Das ist intuitionistisch stärker als zu sagen, dass X nicht leer ist; Letzteres bedeutet nur, dass X *nicht nicht* bewohnt ist. Wir sagen, dass X ein *Subsingleton* ist, wenn $\forall x, y : X.\ x = y$, und dass X ein *Singleton* ist, wenn $\exists! x : X$. Es heißt X *diskret*, wenn $\forall x, y : X.\ x = y \vee x \neq y$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt genau dann *herauslösbar*, wenn $\forall x : X.\ x \in U \vee x \notin U$.

Ist ϕ eine Aussage, so ist $\{x : 1 \,|\, \phi\}$ (wobei x eine neue Variable sei), oder kürzer $\{\star \,|\, \phi\}$, eine Teilmenge von 1, die genau dann $\star$ enthält, wenn ϕ gilt.

Den Rahmen eines topologischen Raums X oder einer Locale bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(X)$.

1. Die interne Welt eines Topos

Im Folgenden führen wir kurz in die zentralen Ideen hinter der internen Sprache von Topoi ein, setzen für die genauere Behandlung später aber trotzdem Vertrautheit mit dem Material aus [16, Teil D] und [26, Kap. VI] voraus.

Globale und verallgemeinerte Elemente

Sei $X \xrightarrow{f} Y$ eine Abbildung von Mengen. Bekanntlich heißt diese genau dann *injektiv*, wenn

$$\forall x, x' \in X.\ \ f(x) = f(x') \implies x = x'. \tag{1.1}$$

Diese Bedingung lässt sich nicht nur in Set, sondern in jeder Kategorie interpretieren, deren Objekte Mengen mit Zusatzstruktur und deren Morphismen gewisse Abbildungen sind. Wenn man aber über solche Kategorien hinaus verallgemeinern möchte, muss man die Aussage in kategorieller Notation umschreiben; sie lautet dann:

$$\forall (1 \xrightarrow{x} X), (1 \xrightarrow{x'} X).\ \ f \circ x = f \circ x' \implies x = x'. \tag{1.2}$$

Morphismen der Form $1 \to X$ heißen *globale Elemente* von X. Bedingung (1.2) lässt sich in allen Kategorien interpretieren, in denen es ein terminales Objekt 1 gibt, und ist in Set äquivalent zur mengensprachlich formulierten Bedingung (1.1). Das hat einen tieferen Grund: In Set ist die einelementige Menge $1 = \{\star\}$ ein *Erzeuger*, d. h. Objekte in Set sind schon durch ihre globalen Elemente (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt.

In Kategorien, in denen das terminale Objekt aber kein Erzeuger ist, ist Bedingung (1.2) dagegen nicht sehr aussagekräftig. Konkret der Fall ist das beispielsweise beim Topos $\mathrm{Sh}(A)$ der Garben auf einem topologischen Raum A. Globale Elemente einer Garbe $\mathcal{F}$ stehen in natürlicher Bijektion mit globalen Schnitten $x \in \mathcal{F}(A)$ (daher der Name), sodass Bedingung (1.2) nur aussagt, dass die Garbenabbildung f *injektiv auf globalen Schnitten* ist. Da viele interessante Garben überhaupt keine oder nur wenige globale Schnitte besitzen, ist das in der Regel eine gehaltlose Aussage.

Man löst das Problem dadurch, indem man nicht nur globale Elemente $1 \to X$, sondern auch *verallgemeinerte* Elemente $I \to X$ betrachtet. Dabei muss I alle Objekte der untersuchten Kategorie $\mathcal{C}$ durchlaufen; mit diesem Prinzip ist eine bessere Übersetzung der Injektivitätsbedingung die Aussage

$$\forall \text{Objekte } I \text{ in } \mathcal{C}.\ \forall (I \xrightarrow{x} X), (I \xrightarrow{x'} X) \text{ in } \mathcal{C}.\ \ f \circ x = f \circ x' \implies x = x', \tag{1.3}$$

und diese fängt die Intuition hinter dem Injektivitätsbegriff auch in beliebigen Kategorien $\mathcal{C}$ richtig ein: Ein Morphismus f, der Bedingung (1.3) erfüllt, heißt bekanntlich *Monomorphismus*. Den tieferen Grund, wieso diese Idee funktioniert, drückt das *Yonedalemma* [24] aus, demnach ein Objekt (bis auf Isomorphie) schon eindeutig durch die Morphismen in das Objekt hinein bestimmt ist.

Die interne Sprache

In der Praxis ist es allerdings umständlich, immer an verallgemeinerte Elemente denken und diese in der Notation berücksichtigen zu müssen. Als Abhilfe dazu gibt es die *interne Sprache* einer Kategorie (nach J. Bénabou, A. Joyal und W. Mitchell, siehe [4, Kap. 1]): In dieser kann man die Injektivitätsbedingung als

$$\forall x, x' \colon X.\;\; f(x) = f(x') \implies x = x' \tag{1.4}$$

formulieren, die Ähnlichkeit zur ursprünglichen Definition (1.1) ist offensichtlich. Der Doppelpunkt beim Allquantor soll andeuten, dass X nicht notwendigerweise eine Menge und x, x' nicht notwendigerweise Elemente einer Menge im wörtlichen (materiellen) Sinn sein müssen. Stattdessen sagt man, dass X ein *Typ* und x, x' *Werte* dieses Typs sind, und bezeichnet den Ausdruck (1.4) als *Formel im leeren Kontext*. (Freie, nicht durch Quantoren gebundene Variablen sammelt der sog. Kontext der Formel auf.)

Wenn die untersuchte Kategorie genügend gute Eigenschaften hat – ein *Topos* ist –, gibt es ein konkretes, algorithmisch gegebenes und auch in der Praxis einfach durchführbares Verfahren, um solche intern formulierten Aussagen in die externe mathematische Sprache zu übersetzen, die sog. *Kripke-Joyal-Semantik* [26, Kap VI.6]. Wendet man dieses auf die Formel (1.4) an, erhält man (nach einem Vereinfachungsschritt) genau die zuvor hergeleitete Bedingung (1.3) mit verallgemeinerten Elementen.

Die interne Sprache erlaubt nicht nur, Bedingungen einfach formulieren zu können, sondern auch logische Schlussfolgerungen anzustellen. Beispielsweise kann man, indem man den üblichen Beweis mit minimalen syntaktischen Änderungen abschreibt, intern zeigen, dass

$$\ulcorner f \text{ ist injektiv}\urcorner \wedge \ulcorner f \text{ ist surjektiv}\urcorner \Longrightarrow \ulcorner f \text{ besitzt eine Umkehrfunktion}\urcorner.$$

Die Häkchen sollen andeuten, dass die Teilaussagen nur umgangssprachlich vorliegen und daher vom Leser formalisiert werden müssen. Extern besagt diese Implikation, dass jeder Morphismus f eines Topos, der zugleich ein Mono- und Epimorphismus ist, schon einen Umkehrmorphismus besitzt, also ein Isomorphismus ist.

Beschränkung auf intuitionistische Logik

Damit die Übersetzungen intern bewiesener Schlussfolgerungen in beliebigen Topoi gültig sind, ist man beim Beweisen aber einer Reihe von Einschränkungen unterworfen: Man darf in Abgrenzung der gewohnten klassischen Logik nur die Schlussregeln *intuitionistischer Logik* [41] verwenden, d. h. man muss auf das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten, demnach man für jede Aussage ϕ voraussetzen darf, dass

$$\phi \vee \neg\phi$$

gilt, verzichten; und ebenso kann man das Prinzip der Doppelnegationselimination („$\neg\neg\phi \Rightarrow \phi$“) und das Auswahlaxiom nicht verwenden. Infolgedessen sind Widerspruchsbeweise („um ϕ zu zeigen, zeige, dass $\neg\phi$ falsch ist“) nicht zulässig.[1] Zwei Beispiele sollen dieses Phänomen am Garbentopos $\mathrm{Sh}(A)$ über einem topologischen Raum A verdeutlichen:

(1) Dass eine Aussage ϕ der internen Sprache von $\mathrm{Sh}(A)$ gilt, kann man sich so vorstellen, dass sie auf jeder offenen Teilmenge $U \subseteq A$ erfüllt ist. Die doppelte Negation $\neg\neg\phi$ bedeutet dagegen nur, dass jede nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq A$ eine weitere, kleinere nichtleere offene Teilmenge $V \subseteq U$ enthält, auf der ϕ gilt.

Sei etwa $A = \mathbb{R}$ die reelle Zahlengerade und f eine stetige reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann bedeutet die interne Aussage

$$\ulcorner f \text{ ist (bzgl. der Multiplikation) invertierbar}\urcorner,$$

dass f auf jeder offenen Teilmenge invertierbar ist, also dass $f(a) \neq 0$ für alle $a \in A$. Die doppelt negierte Aussage dagegen wird beispielsweise auch von Funktionen erfüllt, die isolierte Nullstellen besitzen, und allgemeiner von allen Funktionen, die auf keinem Intervall konstant null sind.

(2) Sei $A = \mathbb{C}$ die komplexe Zahlenebene und f eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion. Holomorphe Lösungen der Funktionalgleichung

$$\exp(g) = f$$

organisieren sich auf natürliche Art und Weise in einer Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{C}$, explizit durch die Setzung

$$\mathcal{F}(U) = \{U \xrightarrow{g} \mathbb{C} \mid g \text{ holomorph und } \exp(g) = f \text{ auf } U\} \tag{1.5}$$

für offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{C}$ gegeben. Wenn f Nullstellen besitzt, ist die Aussage $\exists g\colon\mathcal{F}$ der internen Sprache nicht erfüllt: Diese bedeutet nämlich, dass es eine Überdeckung von $\mathbb{C}$ durch offene Mengen gibt, sodass es auf jeder dieser offenen Mengen U jeweils eine auf U definierte Lösung der Funktionalgleichung gibt (wobei diese Teillösungen auf Überlapps nicht unbedingt zusammenpassen müssen) – das kann man kurz als das Motto *Existenz in der internen Sprache bedeutet lokale Existenz* ausdrücken. Aber in jeder solchen Überdeckung würde mindestens eine

[1] Davon unbetroffen sind Beweise negierter Aussagen, d. h. Aussagen der Form $\neg\psi$. Das übliche Vorgehen („Gelte ψ. Dann ..., also Widerspruch.“) ist für solche zulässig, es handelt sich dabei nicht um Widerspruchsbeweise im eigentlichen Sinn. Klassisch kann man den Unterschied nicht erkennen, da man gewohnt ist, nach Belieben doppelte Verneinungen einzuführen oder zu streichen.

offene Menge U eine Nullstelle von f enthalten, und auf einer solchen Menge ist die Funktionalgleichung natürlich nicht erfüllbar.

Es gilt aber die doppelt negierte Aussage $\neg\neg(\exists g : \mathcal{F})$, denn zu jeder nichtleeren offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ kann man eine genügend kleine weitere nichtleere offene Teilmenge $V \subseteq U$ finden, die keine Nullstellen von f enthält (diese sind ja isoliert) und auf der es einen passenden Logarithmus gibt.

Abhängige Typen

Als Motto kann man festhalten: *Aussagen, die sich konstruktiv beweisen lassen, gelten in allen Topoi.* Das ist aber nur insofern richtig, als dass sich die Aussagen selbst und alle Teilschritte ihrer Beweise auch in der internen Sprache formulieren lassen müssen. Das schließt manche Aussagen aus:

(1) In üblicher Mengenlehre kann man die Frage formulieren, ob π ein Element von $\sqrt{2}$ ist; die Antwort hängt von der Wahl der mengentheoretischen Umsetzung der reellen Zahlen ab und ist daher nicht invariant unter Isomorphie. Typtheoretisch, also in der internen Sprache, lässt sich diese Frage nicht formulieren: Die Elementrelation ist nicht global definiert, der Ausdruck „$x \in M$“ hat nur dann einen Sinn, wenn x von einem gewissen Typ A und M vom dazugehörigen Potenztyp $\mathcal{P}(A)$ ist.

(2) In der algebraischen Geometrie definiert man die Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ auf dem Spektrum eines Rings A auf offenen Teilmengen $U \subseteq \operatorname{Spec} A$ als

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U) = \Big\{ U \xrightarrow{s} \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \ \Big| \ s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}} \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ und } \ldots \Big\}, \tag{1.6}$$

wobei die ausgelassene Zusatzbedingung für die Diskussion hier nicht wichtig ist. Diese wichtige Konstruktion ist so, wie sie hier angegeben ist, nicht typtheoretisch formulierbar: Der wunde Punkt ist die disjunkt-gemachte Vereinigung, die man mengentheoretisch ja beispielsweise als

$$\coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} := \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} (\{\mathfrak{p}\} \times A_{\mathfrak{p}}) \tag{1.7}$$

definieren kann. Aber typtheoretisch kann man nur Mengen vereinigen, die als Teilmengen einer schon gegebenen gemeinsamen Obermenge vorliegen – die Vereinigungsoperation hat den Typ $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \to \mathcal{P}(A)$. Eine solche gemeinsame Obermenge liegt hier nicht vor.

Die beiden Beispiele sind von verschiedener Qualität. Man sieht es sogar als Vorteil an, dass das erste Beispiel typtheoretisch nicht formulierbar ist. Das zweite (und andere seiner Art) möchte man jedoch retten. Dazu benötigt man das Konzept *abhängiger Typen*, das sind Typen, die von gewissen Werten anderer Typen abhängen dürfen. Man schreibt

$$x : A \vdash B : \mathrm{Type},$$

wenn man aussagen möchte, dass B ein vom Wert $x : A$ abhängiger Typ ist. (Die Schreibweise „$B(x)$“ wäre vielleicht besser, ist auf diesem Abstraktionsniveau aber nicht üblich.) Das Standardbeispiel ist der Typ der Vektoren des $\mathbb{R}^n$,

$$n : \mathbb{N} \vdash \mathbb{R}^n : \mathrm{Type},$$

der von der Dimension $n : \mathbb{N}$ abhängt. Ist $x : A \vdash B$ ein abhängiger Typ, kann man zwei wichtige Konstruktionen durchführen:

(1) Das *abhängige Produkt* ist der (nicht mehr von x abhängige) Typ

$$\prod_{x : A} B.$$

Seine Werte stellt man sich als Abbildungen f vor, deren Funktionswert an einer Stelle $a : A$ ein Wert vom Typ $B[a/x]$ (a für „x“ eingesetzt) ist. Das macht man durch seine Einführungs- und Eliminationsregel deutlich:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash (\lambda(x : A).\ b) : \prod_{x : A} B} \qquad \frac{\Gamma \vdash f : \prod_{x : A} B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]}$$

Die erste liest sich wie folgt: Ist b ein Wertterm von einem Typ B, in dem die Variable x (und noch andere Variablen des Kontexts Γ) vorkommen dürfen, so ist $\lambda(x : A).\ b$ ein Term vom Typ $\prod_{x : A} B$.

Das zweite Beispiel kann man damit typtheoretisch als

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U) = \Big\{ s : \prod_{\mathfrak{p} : U} \mathcal{A}_{\mathfrak{p}} \;\Big|\; \ldots \Big\}$$

formulieren. Dieser Ausdruck ist sogar einfacher als der mengentheoretische (1.6), da die Bedingung an den Wertebereich von $s(\mathfrak{p})$ schon eingebaut ist.

(2) Die *abhängige Summe* ist der (ebenfalls nicht mehr von x abhängige) Typ

$$\sum_{x : A} B.$$

Seine Werte stellt man sich als Paare $\langle a, b \rangle$ vor, wobei a ein Wert vom Typ A und b ein Wert vom Typ $B[a/x]$ ist. Abhängige Summen treten ebenfalls an vielen Stellen der mathematischen Praxis auf (wenngleich sie üblicherweise nicht explizit benannt werden), unter anderem auch bei elementaren kombinatorischen Problemstellungen. Möchte man etwa die Menge aller Versuchsausgänge des Experiments

> „Ziehe eine Kugel a aus einer Urne A. Abhängig davon ziehe eine Kugel b aus einer Urne B_a.“

formulieren, drängt sich die abhängige Summe geradezu auf: $\sum_{a : A} B_a$.

Unbeschränkte Quantifikation

Kommen All- oder Existenzquantoren in Aussagen der mathematischen Praxis vor, sind diese in der Regel *beschränkt*, d. h. von der Form $\forall x : X$ oder $\exists x : X$, wobei X ein Typ ist. Es gibt aber wichtige Ausnahmen dieser Regel, unter anderem in der Kategorientheorie: Formuliert man Eigenschaften von Kategorien oder universelle Eigenschaften von Konstruktionen, benötigt man *unbeschränkte* Quantifikation der Art „für alle Objekte der Kategorie" oder „für jede (kleine) Indexmenge", bei denen der Quantifikationsbereich keine Menge ist.

Das kann man mit der internen Sprache, wie sie üblicherweise beschrieben wird, nicht umsetzen. Dieses Problem hat M. Shulman mit seiner *Stacksemantik* [39] formal gelöst, wenngleich informal das Vorgehen bereits früher klar war (siehe etwa [35, Kap. 3]). Die zentrale Idee liegt darin, nicht nur verallgemeinerte Elemente, sondern auch *verallgemeinerte Objekte* zu betrachten.

Ein verallgemeinertes Element eines Objekts A einer Kategorie haben wir als einen Morphismus $I \to A$ definiert. Ein solches können wir uns als eine I-indizierte Familie von gewöhnlichen Elementen von A vorstellen, wobei diese Aussage freilich nur in der Kategorie der Mengen tatsächlich stimmt.

Analog ist ein verallgemeinertes Objekt X ein Morphismus $X \xrightarrow{d} I$ (d. h. ein Objekt der Scheibenkategorie $\mathcal{C}/I$). Ein solches können wir uns als I-indizierte Familie der Fasern $d^{-1}[\{i\}]$ vorstellen, und Aussagen über solche verallgemeinerten Objekte wollen wir ebenfalls faserweise begreifen: Wenn wir etwa sagen, dass X ein Element enthält, meinen wir eigentlich, dass jede Faser jeweils ein Element enthält.

Diese Auffassung kann man mit dem Beispiel der Garbe $\mathcal{F}$ der Lösungen der Funktionalgleichung $\exp(g) = f$ von (1.5) illustrieren: Die Diskussion hatte gezeigt, dass $\mathcal{F}$ (aufgefasst als gewöhnliches Objekt $\mathcal{F} \to 1$) nicht bewohnt ist, d. h. dass die Aussage $\exists g : \mathbb{F}$ nicht richtig ist. Bezeichnen wir aber mit I diejenige offene Menge von $\mathbb{C}$, wo f nicht null ist, können wir das verallgemeinerte Objekt $\mathcal{F} \to \underline{I}$ betrachten (mit „$\underline{I}$" ist die repräsentierbare Garbe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}(\_, I)$ gemeint) – und dieses ist bewohnt. Man schreibt:

$$I \models \exists g : \mathcal{F}.$$

Einführende Literatur

Für eine Einführung in Topostheorie siehe [23, 12, 18, 26], eine umfassende Referenz ist [16]. Für Begriffe aus der Localetheorie siehe [43, 17]. Anwendungen der internen Sprache in Garbentopoi demonstriert [33], Höhepunkt ist ein Verständnis des Serre-Swan-Theorems über Vektorbündel als eine interne Anwendung des klassischen algebraischen Satzes von Kaplansky. Zu intuitionistischer Logik und konstruktiver Mathematik siehe [41, 30]. Eine Einführung in Typtheorie von einem ganz anderem Blickwinkel gibt [38], dort liegt der Fokus auf konzeptionellem Verständnis von Homotopietheorie.

1.1. Lokal-interne Kategorien

Wir wollen kurz an die Definition und wesentlichen Beispiele lokal-interner Kategorien erinnern. Details, die über diese kurze Zusammenfassung hinausgehen, stehen in [16, Kap. B2.2] und [18, Anhang], werden wir aber nicht benötigen.

Definition 1.1 ([34])**.** Eine *lokal-interne Kategorie* $\mathbb{C}$ über einem Basistopos $\mathcal{E}$ besteht aus

(1) einer $\mathcal{E}/U$-angereicherten Kategorie $\mathbb{C}_U$ für jedes Objekt $U \in \mathcal{E}$ und

(2) einem volltreuen $\mathcal{E}/V$-angereicherten Funktor $\theta_p \colon p^*\mathbb{C}_U \to \mathbb{C}_V$ für jeden Morphismus $V \xrightarrow{p} U$ in $\mathcal{E}$,

sodass θ_p bis auf kohärente natürliche Isomorphie in p funktoriell ist.

Wir stellen uns die Kategorie $\mathbb{C}_U$ als die Kategorie verallgemeinerter Objekte der Stufe U von $\mathbb{C}$ und ihrer Morphismen vor, also als die Kategorie U-indizierter Familien von Objekten und Morphismen aus $\mathbb{C}$. In diesem Bild führt der Funktor θ_p dann eine Re-Indizierung durch.

Beispiel 1.2. Jede gewöhnliche lokal-kleine Kategorie $\mathcal{C}$ induziert eine lokal-kleine Kategorie $\mathbb{C}$ über $\mathcal{E} = \mathrm{Set}$, wobei $\mathbb{C}_U$ tatsächlich die Kategorie U-indizierter Familien von Objekten und Morphismen von $\mathcal{C}$ ist.

Beispiel 1.3. (1) Die lokal-interne Kategorie $\mathbb{E}$ mit $\mathbb{E}_U := \mathcal{E}/U$, vermöge ihrer internen Homobjekte aufgefasst als $\mathcal{E}/U$-angereichterte Kategorie, heißt die *Selbstindizierung* von $\mathcal{E}$. Der Re-Indizierungsfunktor θ_p ist auf Objektebene durch die Operation des Zurückziehens mit $V \xrightarrow{p} U$ und auf Morphismenebene durch den kanonischen Morphismus

$$p^*[X,Y]_{\mathcal{E}/U} \longrightarrow [p^*X, p^*Y]_{\mathcal{E}/V}$$

gegeben. Dass θ_p volltreu ist, bedeutet gerade, dass dieser Morphismus ein Isomorphismus in $\mathcal{E}/V$ ist; das ist nach dem Fundamentalsatz der Topostheorie ja auch der Fall.

(2) Ein geometrischer Morphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ induziert eine lokal-interne Kategorie $\mathbb{F}$ über $\mathcal{E}$ mit $\mathbb{F}_U := \mathcal{F}/f^*U$ und $\mathcal{E}/U$-Anreicherung durch

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_U}(X,Y) := (f/U)_*[X,Y]_{\mathcal{F}/f^*U} \in \mathcal{E}/U.$$

Dabei bezeichnet f/U den von f induzierten geometrischen Morphismus $\mathcal{F}/f^*U \to \mathcal{E}/U$.

Im Folgenden werden wir eine interne Sprache beschreiben, aus deren Sicht lokal-interne Kategorien wie gewöhnliche lokal-kleine Kategorien aussehen. In dieser Sichtweise fühlen sich die lokal-internen Kategorien aus dem zweiten Teil des Beispiels auch wie gewöhnliche Topoi an. Wir benötigen nur noch eine recht spezielle Definition, die genau an die Bedürfnisse der im nächsten Abschnitt folgenden Lemmata zugeschnitten ist.

Definition 1.4. Sei I eine Menge, sodass $\mathcal{E}$ I-indizierte Koprodukte besitzt. Eine lokal-interne Kategorie $\mathbb{F}$ über $\mathcal{E}$ erfüllt genau dann das *Verklebeaxiom* bezüglich I, wenn zu jeder I-indizierten Familie von Objekten $U_i \in \mathcal{E}$, $X_i \in \mathbb{F}_{U_i}$ ein Objekt $X \in \mathbb{F}_U$ mit $U := \coprod_{i \in I} U_i$ und $\theta_{\iota_i}(X) \cong X_i$ für alle $U_i \xrightarrow{\iota_i} U$, $i \in I$ existiert.

Beispiel 1.5. Die von einem geometrischen Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ induzierte lokal-interne Kategorie $\mathbb{F}$ erfüllt das Verklebeaxiom bezüglich all solcher Indexmengen I, für die $\mathcal{F}$ und $\mathcal{E}$ I-indizierte Koprodukte zulassen. Im häufig auftretenden Fall, dass $\mathcal{F}$ und $\mathcal{E}$ Grothendiecktopoi sind, ist das Verklebeaxiom also bezüglich jeder Menge I erfüllt.

1.2. Interne Sprache

Die übliche Darstellung der internen Sprache, wie beispielsweise in [16, Teil D], [26, Kap. VI] ist für unsere Zwecke nicht ausreichend: Um später intern Kompaktheit von Topoi definieren zu können, benötigen wir abhängige Typen, die Möglichkeit, über lokal-interne Kategorien zu sprechen und unbeschränkt quantifizieren zu können.

Dazu kombinieren wir einen einfachen Zugang zu abhängigen Typen (wie er beispielsweise in [3] benutzt wird) mit der Stacksemantik von M. Shulman [39], welche schon unbeschränkte Quantifikation, aber nicht abhängige Typen und lokal-interne Kategorien unterstützt, und ergänzen dann Regeln, um lokal-interne Kategorien einbeziehen zu können.

Syntax der internen Sprache

Genauer definieren wir zu einem Topos $\mathcal{E}$ eine ganze Familie interner Sprachen, indiziert durch alle Objekte $U \in \mathcal{E}$. Dazu geben wir durch wechselseitige Rekursion die *Kontexte*, *Sorten*, *Typen in Kontexten*, *Werte in Kontexten* und *Formeln in Kontexten* über U an.

Definition 1.6.

– Ein *Kontext* ist eine endliche Folge von Variablendeklarationen

$$x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n,$$

wobei $x_1, \ldots, x_n$ Variablen sind und A_i für jedes $i = 1, \ldots, n$ entweder ein Typ der Sorte $\mathbb{E}$ im reduzierten Kontext $x_1 : A_1, \ldots, x_{i-1} : A_{i-1}$ oder selbst eine Sorte ist. Speziell ist der leere Kontext erlaubt.

– Zu jeder lokal-internen Kategorie $\mathbb{F}$ über $\mathcal{E}$ ist $\mathbb{F}$ eine *Sorte*. Dabei nimmt die Selbstindizierung $\mathbb{E}$ eine Sonderrolle ein, da Werte nur Typen der Sorte $\mathbb{E}$ haben können.

– Zu jeder lokal-internen Kategorie $\mathbb{F}$, insbesondere $\mathbb{E}$, und jedem Objekt $A \in \mathbb{F}_U$ ist A ein Typterm der Sorte $\mathbb{F}$ im leeren Kontext. Zu jedem Morphismus $B \to A$ in $\mathcal{E}/U$ ist B ein Typterm der Sorte $\mathbb{E}$ im Kontext $x : A$, also ein abhängiger Typ

$$x : A \vdash B : \mathbb{E}.$$

Es ist üblich, die Abhängigkeit von der Variablen x notationell zu verbergen. Außerdem sind die in Tafel 1.1 dargestellten Regeln verwendbar, um aus gegebenen Typen neue zu konstruieren.

– Die Regeln für *Werte* und *Formeln* in Kontexten sowie einige Axiome zeigt dieselbe Tafel 1.1. *Darstellbare* Formeln sind solche, in denen Quantoren nur über Typen der Sorte $\mathbb{E}$ gehen.

Interpretation von Kontexten, Typen und Werten

Definition 1.7. Folgende wechselseitig rekursiven Regeln definieren die Interpretationen $[\![\Gamma]\!]$ von Kontexten Γ über U, die nur Wert-, aber keine Typdeklarationen („$X : \mathbb{E}$“, „$X : \mathbb{F}$“) beinhalten, als gewisse Objekte von $\mathcal{E}/U$; Typtermen A in diesen Kontexten als gewisse Objekte der Scheibenkategorien $\mathcal{E}/[\![\Gamma]\!]$; und Werten in diesen Kontexten als gewisse Morphismen in $\mathrm{Hom}_{[\![\Gamma]\!]}([\![\Gamma]\!], [\![A]\!])$. Nicht alle Regeln sind aufgeführt, für Details siehe [27, Kap. 5].

– Die Interpretation des leeren Kontexts ist das terminale Objekt $1 \in \mathcal{E}/U$.

– Die Interpretation eines Kontexts der Form $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$, $n \geq 1$, ist die Interpretation $[\![A_n]\!] \in \mathcal{E}/[\![x_1 : A_1, \ldots, x_{n-1} : A_{n-1}]\!]$ des Typs der zuletzt aufgeführten Variable, aufgefasst als Objekt von $\mathcal{E}/U$.

– Ist A ein Objekt aus $\mathcal{E}/U$, so ist die Interpretation des zugehörigen Typterms im leeren Kontext gerade dieses Objekt.

  Ist $B \to A$ ein Morphismus in $\mathcal{E}/U$, so ist die Interpretation des zugehörigen abhängigen Typterms im Kontext $x : A$ das Objekt $B \in \mathcal{E}/A$.

– Die Interpretation $[\![\sum_{x\,:\,A} B]\!]$ einer abhängigen Summe bzw. $[\![\prod_{x\,:\,A} B]\!]$ eines abhängigen Produkts im Kontext Γ ist das Bild von $[\![B]\!] \in \mathcal{E}/[\![\Gamma, x : A]\!]$ unter dem Links- bzw. Rechtsadjungierten des Rückzugsfunktors f^* zu $[\![\Gamma, x : A]\!] \xrightarrow{f} [\![\Gamma]\!]$. Schematisch:
$$\Sigma_f \dashv f^* \dashv \Pi_f.$$

– Die Interpretation $[\![\mathcal{P}(A)]\!]$ eines Potenztyps in einem Kontext Γ ist das interne Homobjekt $[[\![A]\!], \Omega_{\mathcal{E}/[\![\Gamma]\!]}] \in \mathcal{E}/[\![\Gamma]\!]$.

– Die Interpretation $[\![\,[\phi]\,]\!]$ eines zu einer Formel ϕ assoziierten Subsingletontyps ist die Interpretation von ϕ im gewöhnlichen Sinn [16, Def. D1.2.6]. Der Strukturmorphismus nach $[\![\Gamma]\!]$ ist ein Monomorphismus.

– Sind $X, Y \in \mathbb{F}_U$, so ist die Interpretation $[\![\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(X, Y)]\!]$ des Homtyps im leeren Kontext das Homobjekt $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_U}(X, Y) \in \mathcal{E}/U$. Die Interpretationen der Identitäts- und Morphismenverkettungsterme sind die offensichtlichen.

– Regeln für abhängige Summen:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathbb{E}}{\Gamma \vdash \sum_{x : A} B : \mathbb{E}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B[a/x]}{\Gamma \vdash \langle a, b \rangle : \sum_{x : A} B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash p : \sum_{x : A} B}{\Gamma \vdash \mathrm{fst}(p) : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash p : \sum_{x : A} B}{\Gamma \vdash \mathrm{snd}(p) : B[\mathrm{fst}(p)/x]}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{fst}(\langle a, b \rangle) = a} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{snd}(\langle a, b \rangle) = b} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \langle \mathrm{fst}(p), \mathrm{snd}(p) \rangle = p}$$

– Regeln für abhängige Produkte:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash B : \mathbb{E}}{\Gamma \vdash \prod_{x : A} B : \mathbb{E}}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B}{\Gamma \vdash (\lambda(x : A).\ b) : \prod_{x : A} B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{x : A} B \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B[a/x]}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\lambda x.\ b)(a) = b[a/x]} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash f = (\lambda x.\ f(x))}$$

– Regeln für Potenztypen:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathbb{E}}{\Gamma \vdash \mathcal{P}(A) : \mathbb{E}}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash \phi \text{ darstellbare Formel}}{\Gamma \vdash \{x : A \,|\, \phi\} : \mathcal{P}(A)} \qquad \frac{\Gamma \vdash m : \mathcal{P}(A) \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash a \in m \text{ Formel}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash a \in \{x : A \,|\, \phi\} \Leftrightarrow \phi[a/x]} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash m = \{x : A \,|\, x \in m\}}$$

Tafel 1.1.: Die Regeln der internen Sprache (Fortsetzung auf nächster Seite).

– Regeln, um Formeln zu Subsingletontypen hochzuheben:

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \text{ darstellbare Formel}}{\Gamma \vdash [\phi] : \mathbb{E}}$$

$$\frac{}{\Gamma, x, y : [\phi] \vdash x = y} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \star : [\phi]}$$

– Regeln für die Kategorienstruktur auf $\mathbb{F}$:

$$\frac{\Gamma \vdash X, Y : \mathbb{F}}{\Gamma \vdash \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(X, Y) : \mathbb{E}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash X : \mathbb{F}}{\Gamma \vdash \mathrm{id}_X : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(X, X)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash X, Y, Z : \mathbb{F} \qquad \Gamma \vdash f : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(X, Y) \qquad \Gamma \vdash g : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(Y, Z)}{\Gamma \vdash g \circ f : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(X, Z)}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_X \circ f} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}$$

– Strukturelle Regeln für Kontexte (ausgelassen)

– Regeln für Formeln: In einem Kontext Γ dürfen Formeln aus den logischen Konstanten $\top$ und $\bot$, den logischen Operatoren $\wedge, \vee, \Rightarrow$, den beschränkten Quantoren $\forall x : X$, $\exists x : X$ (wobei X ein Typ der Sorte $\mathbb{E}$ im Kontext Γ ist) und den unbeschränkten Quantoren $\forall X : \mathbb{F}$, $\exists X : \mathbb{F}$ (wobei $\mathbb{F}$ eine lokal-interne Kategorie über $\mathcal{E}$ ist) zusammengesetzt sein. Es gelten die üblichen strukturellen Regeln (Identitätsregel, Substitutionsregel, Schnittregel), die Gleichheitsregeln sowie die Regeln für Konjunktion, Disjunktion, Implikation und existenzielle und universelle Quantifikation. Die Negation $\neg\phi$ wird als $(\phi \Rightarrow \bot)$ definiert.

Tafel 1.1. Regeln der internen Sprache (Fortsetzung von vorheriger Seite).

Kontexte, in denen Typdeklarationen vorkommen, und Typen, Werte und Formeln in solchen Kontexten, lassen keine Interpretation durch Objekte von $\mathcal{E}/U$ zu. Das kann man anschaulich verstehen: Beispielsweise wäre $[\![\mathbb{E}]\!] \in \mathcal{E}$ ein „Universumsobjekt" und ein Typterm der Sorte $\mathbb{E}$ im leeren Kontext ein globales Element $1 \to [\![\mathbb{E}]\!]$. Es ist klar, dass ein solches Objekt im Allgemeinen, etwa im Topos Set, nicht existiert (vgl. [37]) – man kann die Idee aber aufgreifen und weniger naiv entwickeln [35, 31].

Das Problem wird beim Zugang durch die Stacksemantik gewissermaßen umschifft: Diese sorgt dafür, dass nur solche Kontexte, Typen, Werte oder Formeln interpretiert werden, in denen alle vorkommenden Typvariablen zuvor schon durch konkrete Objekte von $\mathcal{E}$ oder einer lokal-internen Kategorie über $\mathcal{E}$ instantiiert wurden.

Wir erlauben außer im Fall $\mathbb{F} = \mathbb{E}$ keine Werte von Typen der Sorte $\mathbb{F}$, weil wir diese nicht durch Terme des Basistopos $\mathcal{E}$ abbilden können. Diesen Umstand kennt man bereits aus gewöhnlicher Kategorientheorie, die nicht intern in einem Topos stattfindet: Ist X ein Objekt einer gewöhnlichen allgemeinen Kategorie $\mathcal{C}$, ergibt es keinen Sinn, von Elementen im wörtlichen Sinn von X zu sprechen, da X nicht notwendigerweise eine Menge sein muss.

Technische Bemerkung: Umwandlung zwischen Typen und internen Mengen

Wir benötigen noch eine kurz Bemerkung zum Verhältnis von Typen zu internen Mengen, also Werten eines Potenztyps. Ist A ein Typ der Sorte $\mathbb{E}$ in einem Kontext Γ, so ist

$$\Gamma \vdash \{x : A \mid \top\} : \mathcal{P}(A)$$

eine interne Menge, die alle Werte von A beinhaltet. Deren Interpretation ist das Unterobjekt $A \overset{\mathrm{id}}{\hookrightarrow} A$. Ist umgekehrt $m : \mathcal{P}(A)$ ein Wert eines Potenztyps, definiert

$$\Gamma \vdash \sum_{x : A} [x \in m] : \mathbb{E}$$

einen Typ der Sorte $\mathbb{E}$. Diese Konstruktionen sind bis auf Isomorphie zueinander invers.

Übersetzung durch die Stacksemantik

Definition 1.8. (1) Ist ϕ eine Formel über U im leeren Kontext und $V \xrightarrow{p} U$ ein Morphismus in $\mathcal{E}$, so bezeichnet $p^*\phi$ diejenige Formel über V, die entsteht, wenn man jede in ϕ vorkommende Term- und Typkonstante mit p zurückzieht. Typkonstanten der Sorten $\mathbb{F}$ müssen dabei mit dem entsprechenden Funktor θ_p zurückgezogen werden. Wegen eines noch folgenden Lemmas über Invarianz unter Isomorphie spielen dafür getroffene Wahlen keine Rolle.

(2) Ist ϕ eine Formel über U mit einer freien Variablen x von einem Typ A und (mit leicht irreführender Notation) $x : U \to [\![A]\!]$ ein Morphismus über U, also ein Element von $\mathrm{Hom}_U(U, [\![A]\!])$, so bezeichnet $\phi[x]$ diejenige Formel über U, in der man alle

Vorkommen der Variable x durch die zum Morphismus x gehörige Termkonstante ersetzt hat.

(3) Analog definiert man $\phi[X]$ in Gegenwart eines Objekts $X \in \mathbb{F}_U$, wenn X eine in ϕ freie Variable der Sorte $\mathbb{F}$ ist.

Definition 1.9 (nach [39, Abschn. 7]). Die externe Bedeutung $U \models \phi$ von Formeln ϕ über U im leeren Kontext unter der *Stacksemantik* wird durch Rekursion über den Formelaufbau gemäß folgender Regeln festgelegt:

$U \models x = y : A \iff [\![x]\!] = [\![y]\!] \in \mathrm{Hom}_U(U, [\![A]\!])$.

$U \models a \in m \iff (U \xrightarrow{[\![m]\!] \& [\![a]\!]} \mathcal{P}([\![A]\!]) \times_U [\![A]\!] \to \Omega_{\mathcal{E}/U}) = t \in \mathrm{Hom}_U(U, \Omega_{\mathcal{E}/U})$.

$U \models \top \iff$ stets.

$U \models \bot \iff U$ ist initial in $\mathcal{E}$.

$U \models \phi \wedge \psi \iff U \models \phi$ und $U \models \psi$.

$U \models \phi \vee \psi \iff$ es gibt gemeinsam epimorphe Morphismen $V \xrightarrow{p} U$, $W \xrightarrow{q} U$ mit $V \models p^*\phi$ und $W \models q^*\psi$.

$U \models \phi \Rightarrow \psi \iff$ für alle $V \xrightarrow{p} U$ gilt: $(V \models p^*\phi) \Rightarrow (V \models p^*\psi)$.

$U \models \forall x : A.\ \phi \iff$ für alle $V \xrightarrow{p} U$ und $x \in \mathrm{Hom}_U(V, [\![A]\!])$ gilt: $V \models p^*\phi[x]$.

$U \models \forall X : \mathbb{F}.\ \phi \iff$ für alle $V \xrightarrow{p} U$ und Objekte $X \in \mathbb{F}_V$ gilt: $V \models p^*\phi[X]$.

$U \models \exists x : A.\ \phi \iff$ es gibt einen Epimorphismus $V \overset{p}{\twoheadrightarrow} U$ und ein $x \in \mathrm{Hom}_U(V, [\![A]\!])$ mit $V \models p^*\phi[x]$.

$U \models \exists X : \mathbb{F}.\ \phi \iff$ es gibt einen Epimorphismus $V \overset{p}{\twoheadrightarrow} U$ und ein Objekt $X \in \mathbb{F}_V$ mit $V \models p^*\phi[X]$.

Mit „t" in der zweiten Regel ist das universelle Unterobjekt in $\mathcal{E}/U$ gemeint. Wir schreiben kurz „$\mathcal{E} \models \phi$" für $1 \models \phi$.

Bemerkung 1.10. (1) Im Vergleich zur ursprünglichen Definition der Stacksemantik in [39, Abschn. 7] ist diese um die Regeln für $\forall X : \mathbb{F}$ und $\exists X : \mathbb{F}$ ergänzt, und zwar auf eine solche Art und Weise, dass man speziell für $\mathbb{F} = \mathbb{E}$ die Originaldefinition unbeschränkter Quantifikation über Objekte aus $\mathcal{E}$ zurückerhält.

(2) Die Definition wirkt an manchen Stellen auf den ersten Blick vielleicht ein wenig willkürlich, doch tatsächlich ist sie sehr rigide: Sie ist gerade so gemacht, dass man die zwei folgenden wesentlichen Lemmata beweisen kann.

Insbesondere hätten wir die kategorielle Bedeutung $[\![\cdot]\!]$ nicht nach Belieben vorgeben können: Beispielsweise muss die Bedingung erfüllt sein, dass für Morphismen $V \xrightarrow{p} U$ die zurückgezogene Interpretation $p^*[\![A]\!]$ eines Typterms A über U in geeigneter Weise isomorph ist zur Interpretation $[\![p^*A]\!]$.

Das wird für Potenztypen durch das Lemma, dass Rückzugsfunktoren $\mathcal{E}/V \xrightarrow{p^*} \mathcal{E}/U$ in Topoi logisch sind, und für Typterme der Form $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(X, Y)$ durch die in den Begriff lokal-interner Kategorien eingebauten Anforderungen an die Funktoren θ_p garantiert.

(3) Man kann auch unendlichen Disjunktionen $U \models \bigvee_{i \in I} \phi_i$, wobei $(\phi_i)_{i \in I}$ eine durch eine Menge I indizierte Familie von Formeln ist, einen Sinn geben: Die Bedeutung soll sein, dass es eine gemeinsam epimorphe Familie $(V_i \xrightarrow{p_i} U)_{i \in I}$ mit $V_i \models p_i^* \phi_i$ für alle i gibt. Damit das eine sinnvolle Definition ist, müssen alle vorkommenden lokal-internen Kategorien das Verklebeaxiom bezüglich I erfüllen und das Auswahlaxiom muss für I-indizierte Familien gelten – sonst scheitern die folgenden Lemmata.

Unendliche Konjunktionen sind immer möglich, man schreibt genau dann $U \models \bigwedge_{i \in I} \phi_i$, wenn für alle $i \in I$ jeweils $U \models \phi_i$ gilt.

1.2.1. Eigenschaften der Stacksemantik

Lemma 1.11 (nach [39, Lemma 7.3]). *(1)* Invarianz unter Isomorphie: *Sind ϕ und ϕ' Formeln über U, wobei ϕ' aus ϕ durch Ersetzung von Objektkonstanten durch jeweils isomorphe vorgeht, so gilt genau dann $U \models \phi$, wenn $U \models \phi'$.*

(2) Monotonie: *Gilt $U \models \phi$ und ist $V \xrightarrow{p} U$ ein Morphismus, so gilt auch $V \models p^* \phi$.*

(3) Lokaler Charakter: *Ist $V \overset{p}{\twoheadrightarrow} U$ ein Epimorphismus und gilt $V \models p^* \phi$, so folgt schon $U \models \phi$.*

(4) Sei für alle vorkommenden lokal-internen Kategorien das Verklebeaxiom für die leere Menge erfüllt. Ist dann U initial, so gilt $U \models \phi$ für jede Formel ϕ.

(5) Sei $(U_i \xrightarrow{p_i} U)_{i \in I}$ eine Familie gemeinsam epimorpher Morphismen, besitze $\mathcal{E}$ I-indizierte Koprodukte, sei für alle vorkommenden lokal-internen Kategorien das Verklebeaxiom für I erfüllt und gelte das Auswahlaxiom für I-indizierte Familien. Dann folgt aus $U_i \models p_i^* \phi$ für alle i schon $U \models \phi$.

Beweis. Diese Aussagen kann man jeweils mit Induktion über den Formelaufbau beweisen. Exemplarisch wollen wir ein paar Fälle ausführen, insbesondere solche, die unsere Erweiterungen gegenüber der originalen Stacksemantik betreffen.

(2) Sei $\phi = (\exists X : \mathbb{F}.\ \psi)$. Gelte also $U \models \phi$, dann gibt es einen Epimorphismus $W \overset{q}{\twoheadrightarrow} U$ und ein Objekt $X \in \mathbb{F}_W$ mit $W \models q^* \phi[X]$. Wenn wir das Faserprodukt

$$\begin{tikzcd} W \times_U V \arrow[r, two heads, "q'"] \arrow[d, "p'"'] & V \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[r, two heads, "q"'] & U \end{tikzcd}$$

bilden, bleibt der Basiswechsel q' von q ein Epimorphismus. Dann gilt

$$W \times_U V \models q'^* p^* \psi[\theta_{p'}(W)]$$

und damit ist die Behauptung gezeigt, denn diese Aussage ergibt sich aus $W \models q^*\phi[X]$ mit dem nach Induktionsvoraussetzung schon gültigen Monotonielemma angewendet auf $W \times_U V \xrightarrow{p'} W$.

(3) Sei wieder $\phi = (\exists X : \mathbb{F}_\psi)$. Gelte $V \models p^*\phi$. Dann gibt es also einen Epimorphismus $W \overset{q}{\twoheadrightarrow} V$ und ein Objekt $X \in \mathbb{F}_W$ mit $W \models q^*p^*\psi[X]$. Die Komposition $W \overset{q}{\twoheadrightarrow} V \overset{p}{\twoheadrightarrow} U$ bezeugt, dass $U \models \phi$.

(4) Sei erneut $\phi = (\exists X : \mathbb{F}.\ \psi)$ und sei U initial. Nach der Klebevoraussetzung gibt es ein $X \in \mathbb{F}_U$. Es ist $U \xrightarrow{\mathrm{id}} U$ ein Epimorphismus mit $U \models \mathrm{id}^*\psi[X]$ nach Induktionsvoraussetzung, das zeigt die Behauptung.

(5) Sei $\phi = (\exists X : \mathbb{F}.\ \psi)$ und gelte $U_i \models p_i^*\phi$ für alle i. Dann gibt es also zu jedem i einen Epimorphismus $W_i \overset{q_i}{\twoheadrightarrow} U_i$ und ein Objekt $X_i \in \mathbb{F}_{W_i}$ mit $W_i \models q_i^* p_i^* \psi[X_i]$. Nach den Voraussetzungen können wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W := \coprod_{i \in I} W_i \arrow[d, two heads, "q"] & \\ \coprod_{i \in I} U_i \arrow[r, two heads, "p"'] & U \end{tikzcd}$$

bilden, und nach dem Verklebeaxiom gibt es ein geeignetes Objekt $X \in \mathbb{F}_W$. Dann folgt nach Induktionsvoraussetzung $W \models q^*p^*\psi[X]$ (und damit die Behauptung), da die $W_i \xrightarrow{\iota_i} W$ eine epimorphe Familie bilden und wir $W_i \models \iota_i^* q^* p^* \psi[X]$ wissen. □

Lemma 1.12 (nach [39, Lemma 7.4]). *Gelte für alle vorkommenden lokal-internen Kategorien das Verklebeaxiom bezüglich endlicher Mengen. Dann erfüllt die Stacksemantik die in Tafel 1.1 aufgezählten Regeln intuitionistischen Schließens, d. h. gilt $U \models \phi$ für eine Formel ϕ im leeren Kontext über U und folgt syntaktisch $\phi \vdash \psi$, so gilt auch $U \models \psi$.*

Beweis. Mit Induktion über den Aufbau formaler intuitionistischer Ableitungen kann man die stärkere Aussage beweisen, dass für Formeln ϕ, ψ in einem Kontext Γ über U die Implikation

$$U \models \forall \vec{x} : \Gamma.\ \phi \ \text{ und } \ \phi \vdash_\Gamma \psi \quad \Longrightarrow \quad U \models \forall \vec{x} : \Gamma.\ \psi$$

gilt. Dabei ist „$\forall \vec{x} : \Gamma$“ für einen beliebigen Kontext $\Gamma = (x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n)$, in dem auch Typdeklarationen vorkommen dürfen, eine Kurzschreibweise für $\forall x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$. Exemplarisch zeigen wir die Gültigkeit der Doppelregeln für unbeschränkte Quantifikation,

$$(1)\ \frac{\phi \vdash_{\vec{x}, Y} \psi}{\overline{\phi \vdash_{\vec{x}} \forall y : \mathbb{F}.\, \psi}} \qquad \text{und} \qquad (2)\ \frac{\phi \vdash_{\vec{x}, Y} \psi}{\overline{\exists Y : \mathbb{F}.\, \phi \vdash_{\vec{x}} \psi}},$$

wobei bei der Regel für den Allquantor die Variable Y nicht in der Formel ϕ und bei der für den Existenzquantor nicht in der Formel ψ vorkommen darf, denn diese Regeln sind die einzigen, die von unserer Ergänzung der Stacksemantik betroffen sind. Das Verklebeaxiom geht indirekt bei den Regeln für $\perp$ und $\vee$ ein, da das vorherige Lemma anwendbar sein muss.

(1) Der Übersichtlichkeit halber geben wir vor, dass Γ der leere Kontext ist. Dann müssen wir die Äquivalenz der Aussagen $U \models \forall Y : \mathbb{F}.\ (\phi \Rightarrow \psi)$ und $U \models \phi \Rightarrow \forall Y : \mathbb{F}.\ \psi$ zeigen. Die erste bedeutet übersetzt:

  Für alle $V \xrightarrow{p} U$ und $Y \in \mathbb{F}_V$ gilt:

    Für alle $W \xrightarrow{q} V$ gilt: $W \models q^*p^*\phi \implies W \models q^*p^*\psi[Y]$.

  Es ist klar, dass diese äquivalent zur Übersetzung der zweiten Aussage ist:

  Für alle $V \xrightarrow{p} U$ gilt: Sollte $V \models p^*\phi$ gelten, dann gilt auch:

    Für alle $W \xrightarrow{q} V$ und $Y \in \mathbb{F}_W$ gilt: $W \models q^*p^*\psi[Y]$.

(2) Bei der Regel für den Existenzquantor müssen wir die Äquivalenz der Aussagen $U \models \forall Y : \mathbb{F}.\ (\phi \Rightarrow \psi)$ und $U \models (\exists Y : \mathbb{F}.\ \phi) \Rightarrow \psi$ zeigen. Die Übersetzung der ersten steht oben, die der zweiten lautet:

  Für alle $V \xrightarrow{p} U$ gilt:

    Sollte ein $W \overset{q}{\twoheadrightarrow} V$ und $Y \in \mathbb{F}_W$ mit $W \models q^*p^*\phi[X]$ existieren, so gilt $V \models p^*\psi$.

  Die Äquivalenz ist klar. $\square$

Die beiden vorangegangenen Lemmata sind von grundlegender Bedeutung für die Stacksemantik. Das folgende erleichtert lediglich die Praxis: Geht man beim Übersetzen interner Aussagen direkt nach Definition 1.9 vor, erhält man in der Regel lange und unübersichtliche Quantorenketten. Daher ist es hilfreich, für einige häufig auftretende Situationen Vereinfachungsregeln zu haben.

Lemma 1.13. *Für folgende Quantorenfiguren kann man die Regeln vereinfachen:*

$$\begin{aligned}
U \models \forall X : \mathbb{F}.\ \forall Y : \mathbb{F}.\ \phi &\iff \textit{für alle } V \xrightarrow{p} U \textit{ und Objekte } X, Y \in \mathbb{F}_V \textit{ gilt } V \models p^*\phi[X, Y]. \\
U \models \forall X : \mathbb{F}.\ \phi \Rightarrow \psi &\iff \textit{für alle } V \xrightarrow{p} U \textit{ und Objekte } X \in \mathbb{F}_V \textit{ gilt:} \\
&\qquad (V \models p^*\phi[X]) \implies (V \models p^*\psi[X]). \\
U \models \exists X : \mathbb{F}.\ \exists Y : \mathbb{F}.\ \phi &\iff \textit{es gibt einen Epimorphismus } V \overset{p}{\twoheadrightarrow} U \textit{ und} \\
&\qquad \textit{Objekte } X, Y \in \mathbb{F}_V \textit{ mit } V \models p^*\phi[X, Y]. \\
U \models \exists! x : A.\ \phi &\iff \textit{für alle } V \xrightarrow{p} U \textit{ existiert genau ein } x \in \mathrm{Hom}_U(V, [\![A]\!]) \textit{ mit} \\
&\qquad V \models p^*\phi[x]. \\
U \models \forall x : A.\ \exists! y : B.\ \phi &\iff \textit{für alle } V \xrightarrow{p} U \textit{ und } x \in \mathrm{Hom}_U(V, [\![A]\!]) \textit{ existiert} \\
&\qquad \textit{genau ein } y \in \mathrm{Hom}_U(V, [\![B[x]]\!]) \textit{ mit } V \models p^*\phi[x, y].
\end{aligned}$$

Beweis. Exemplarisch zeigen wir die Vereinfachungsregel des $\exists!$-Quantors, die anderen sind offensichtlich, sobald man die Übersetzungen vorgenommen hat. Es ist „$\exists! x : A.\ \phi$“ eine Kurzschreibweise für

$$\exists x : A.\ \phi \quad \wedge \quad \forall x, y : A.\ \phi(x) \wedge \phi(y) \Rightarrow x = y.$$

Wir zeigen zunächst die Hinrichtung. Sei also $V \xrightarrow{p} U$ vorgegeben. Nach Voraussetzung existiert dann ein Epimorphismus $W \overset{q}{\twoheadrightarrow} V$ und ein Element $W \xrightarrow{x'} \llbracket A \rrbracket$ über U mit $W \models q^* p^* \phi[x']$. Da in Topoi Epimorphismen bekanntermaßen effektiv sind, ist die obere Zeile des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
W \times_V W \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & W \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "x'"'] & V \arrow[dl, dashed, "\exists! x"] \\
& \llbracket A \rrbracket &
\end{tikzcd}$$

ein Differenzkokerndiagramm. Wir schreiben $r := q \circ \pi_1 = q \circ \pi_2$, dann gilt

$$W \times_V W \models (p \circ r)^* \phi[x' \circ \pi_1] \quad \text{und} \quad W \times_V W \models (p \circ r)^* \phi[x' \circ \pi_2];$$

also folgt nach dem Eindeutigkeitsteil der Voraussetzung $x' \circ \pi_1 = x' \circ \pi_2$. Nach der universellen Eigenschaft des Differenzkokerns folgt die Existenz eines Morphismus $V \xrightarrow{x} \llbracket A \rrbracket$ wie im Diagramm angedeutet. Dieser ist auch tatsächlich ein Morphismus über U, und es gilt $V \models p^* \phi[x]$, da die zurückgezogene Aussage $W \models q^* p^* \phi[x \circ q]$ gilt.

Ferner ist klar, dass nur ein solches $x \in \mathrm{Hom}_U(V, \llbracket A \rrbracket)$ existieren kann. Die Rückrichtung ist einfach. □

Bemerkung 1.14. Das Argument des Beweises kann man auch konzeptioneller verstehen [39, Thm. 7.9(ii)]: Da $\mathcal{E}$ ein Topos ist, ist die darstellbare Prägarbe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\_, \llbracket A \rrbracket)$ bezüglich der kohärenten Topologie (erzeugt durch endliche gemeinsam epimorphe Morphismenfamilien) sogar eine Garbe [16, Bsp. A2.1.11(a)]. Das Element x' ist ein W-Schnitt dieser Garbe, definiert eine kompatible Familie bezüglich der einelementigen Überdeckung $(W \overset{p}{\twoheadrightarrow} V)$ von V und verklebt daher zu einem geeigneten V-Schnitt x.

Die $\exists!$-Vereinfachungsregel rechtfertigt das Motto *aus eindeutiger Existenz folgt globale Existenz*. Die ersten drei Vereinfachungsregeln gelten analog auch für Quantoren über Typen der Sorte $\mathbb{E}$, also $\forall x : A$ bzw. $\exists x : A$.

Vereinfachung für Grothendiecktopoi

Für Grothendiecktopoi $\mathcal{E}$ kann man die Regeln der Stacksemantik vereinfachen. Ist U ein Objekt eines subkanonischen Definitionssitus $\mathcal{C}$ für $\mathcal{E}$, schreiben wir kurz „$U \models \phi$“ für $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\_, U) \models \phi$ und bezeichnen für einen Morphismus $V \xrightarrow{p} U$ in $\mathcal{C}$ mit „$p^*\phi$“ den Rückzug längs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\_, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\_, U)$.

Lemma 1.15. *Wenn alle vorkommenden lokal-internen Kategorien das Verklebeaxiom bezüglich aller Mengen erfüllen und das Auswahlaxiom gilt, gilt für die Stacksemantik:*

$$\begin{array}{lcl}
U \models \top & \iff & \textit{stets.} \\
U \models \bot & \iff & U \textit{ lässt sich durch die leere Familie überdecken.} \\
U \models \phi \wedge \psi & \iff & U \models \phi \textit{ und } U \models \psi. \\
U \models \phi \vee \psi & \iff & \textit{es gibt eine Überdeckung } (U_i \xrightarrow{p_i} U)_i\textit{, sodass für alle } i \textit{ gilt:} \\
 & & \qquad U_i \models p_i^*\phi. \\
U \models \phi \Rightarrow \psi & \iff & \textit{für alle } V \xrightarrow{p} U \textit{ gilt: } (V \models p^*\phi) \Rightarrow (V \models p^*\psi). \\
U \models \forall x\colon A.\ \phi & \iff & \textit{für alle } V \xrightarrow{p} U \textit{ und } x \in [\![A]\!](V) \textit{ gilt: } V \models p^*\phi[x]. \\
U \models \forall X\colon \mathbb{F}.\ \phi & \iff & \textit{für alle } V \xrightarrow{p} U \textit{ und Objekte } X \in \mathbb{F}_V \textit{ gilt: } V \models p^*\phi[X]. \\
U \models \exists x\colon A.\ \phi & \iff & \textit{es gibt eine Überdeckung } (U_i \xrightarrow{p_i} U)_i \textit{ und Schnitte } x_i \in [\![A]\!](U_i), \\
 & & \qquad \textit{sodass für alle } i \textit{ gilt: } U_i \models p_i^*\phi[x_i]. \\
U \models \exists X\colon \mathbb{F}.\ \phi & \iff & \textit{es gibt eine Überdeckung } (U_i \xrightarrow{p_i} U)_i \textit{ und Objekte } X_i \in \mathbb{F}_{U_i}, \\
 & & \qquad \textit{sodass für alle } i \textit{ gilt: } U_i \models p_i^*\phi[X_i].
\end{array}$$

Beweis. Das ist unter Verwendung des wesentlichen Lemmas 1.11 eine einfache Induktion über den Formelaufbau. □

Der lokale Charakter der Stacksemantik äußert sich in dieser Form darin, dass für eine Überdeckung $(U_i \xrightarrow{p_i} U)_i$ genau dann $U \models \phi$ gilt, wenn für alle i jeweils $U_i \models p_i^*\phi$ gilt. Verschiedene Wahlen eines Definitionssitus führen zu unterschiedlichen Darstellungen der Stacksemantik, aber mit verschiedenen Siten übersetzte Aussagen sind zueinander äquivalent: In dem hier gewählten Zugang ist das klar, da Lemma 1.15 die Äquivalenz zur zuvor unabhängig von Siten definierten Stacksemantik zeigt.

Die interne Sprache der Kategorie der Mengen

Es ist eine grundlegende Beobachtung in der Kategorie der Mengen, dass Mengen A schon durch ihre globalen Elemente $1 \to A$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Anschaulich verrichtet daher die die Stacksemantik unnötige Arbeit, wenn man sie einsetzt, um Aussagen intern in Set zu interpretieren – schließlich ist sie ja dafür entwickelt, um in einfacher Sprache tatsächlich über beliebige verallgemeinerte Elemente und Objekte zu sprechen. In der Tat hat man folgendes Resultat:

Korollar 1.16. *Für die interne Sprache des Topos* $\mathrm{Set} \simeq \mathrm{Sh}(\{\star\})$ *gilt (auch ohne Voraussetzung des Auswahlaxioms):*

$$\mathrm{Set} \models \phi \quad \iff \quad \phi \textit{ gilt im üblichen Sinn.}$$

Beweis. Nach Definition bedeutet Set $\models \phi$, dass $1 \models \phi$. Überdeckungen $(U_i \to 1)_i$ der Menge $1 = \{\star\}$ enthalten stets eine Überdeckungsmenge U_i, die gleich ganz 1 ist; das gilt auch konstruktiv. Daher folgt die Behauptung unmittelbar mit dem vorhergehenden Lemma. Betrachtet man die Beweise genauer, sieht man auch, dass nur endlich viele Auswahlen getroffen werden müssen und daher auf das Auswahlaxiom verzichtet werden kann. Alternativ kann man die Behauptung auch direkt über eine Induktion über den Formelaufbau beweisen. □

Die Äquivalenz Set $\simeq \mathrm{Sh}(\{\star\})$ formuliert man auch als Motto: *Mathematik in der Kategorie der Mengen ist Mathematik über dem Punkt.*

1.2.2. Lokal-interne Topoi

Topoi sind (Alternativ-)Universen, in denen man Mathematik betreiben kann. Dieses Motto wird weitgehend schon durch die gewöhnliche interne Sprache eines Topos erfüllt, sofern man sich auf intuitionistisch zulässige Mathematik beschränkt. Etwa ist es kein Problem, den Begriff eines internen Gruppenobjekts in einem Topos $\mathcal{E}$ zu definieren und dann über solche die bekannte Übungsaufgabe

$$\forall g, h : G.\ (gh)^2 = g^2 h^2 \quad \Longrightarrow \quad \forall g, h : G.\ gh = hg$$

zu bearbeiten – der Beweis ist konstruktiv und sogar als explizite Rechnung, die die vorhandenen logischen Möglichkeiten gar nicht ausnutzt, formulierbar,

$$gh = (g^{-1}g)gh(hh^{-1}) = g^{-1}(g^2h^2)h^{-1} = g^{-1}(ghgh)h^{-1} = hg,$$

und daher besonders einfach mit der gewöhnlichen internen Sprache interpretierbar. Schwieriger umzusetzen ist der Wunsch, intern Kategorientheorie betreiben zu wollen. Es gibt zwei orthogonale Aspekte, die das Problem nichttrivial machen: Zum einen kann man in Kategorien nicht je zwei Morphismen miteinander kombinieren, daher ist zunächst nicht klar, wie man die Verkettungsoperation internalisieren soll; und zum anderen sind viele wichtige Kategorien groß, und das bereitet gelegentlich schon in der üblichen mathematischen Praxis, der Arbeit in Set, Probleme.

Zur Überwindung des ersten Hindernisses gibt es einen traditionellen Ansatz, kurz in [29] zusammengefasst: Man kann die Verkettungsoperation als trinäre Relation C mit gewissen Eigenschaften auffassen. Dann werden Formeln der internen Sprache aber schnell unübersichtlich, beispielsweise lautet das Axiom, dass die Morphismenverkettung assoziativ sein soll, dann so:

$$\forall f, g, h.\ \forall p, p', q, q'.\ C(g, f, p) \wedge C(h, p, q) \wedge C(h, g, p') \wedge C(p', f, q') \Rightarrow q = q'.$$

Dabei kodiert $C(g, f, p)$ die informale Aussage, dass die Komposition $g \circ f$ gleich p ist. Um handhabbare Formeln zu erhalten, kann man die C-Relation in der Notation unterdrücken – dann verschenkt man aber die Vorteile, die eine streng formale Behandlung mit sich bringt – oder wie in [5] eine geeignete Spracherweiterung durchführen, die nativ über partiell definierte Operationen sprechen kann.

Aus der Typtheorie stammt eine elegantere Alternative: Man kodiert die Kollektion von Morphismen als einen von Quell- und Zielobjekt abhängigen Typ

$$X, Y : \mathrm{Ob} \vdash \mathrm{Hom}(X, Y) : \mathrm{Type}.$$

Dann ist nämlich die Verkettung wieder eine total definierte Funktion, spezifiziert durch

$$X, Y, Z : \mathrm{Ob}, f : \mathrm{Hom}(X, Y), g : \mathrm{Hom}(Y, Z) \vdash g \circ f : \mathrm{Hom}(X, Z).$$

Eine solche Formulierung liegt auch näher am intuitiven Verständnis von Kategorien, demnach es nicht nur unmöglich ist, zwei nicht zusammenpassende Morphismen zu komponieren, sondern das sogar als sinnlose Aufgabenstellung empfunden wird. Diesen Zugang werden wir in Abschnitt 1.3 vertiefen.

Zur Überwindung des zweiten Hindernisses schlägt [5] vor, eine große Kategorie als Ansammlung vieler Objekte $\mathcal{C}_A$ des Basistopos (und weiterer Daten) zu formalisieren, wobei die Objekte durch eine externe Klasse indiziert werden. Im Spezialfall, dass diese Klasse nur ein Element enthält, erhält man die Definition einer kleinen internen Kategorie zurück. Dieses Vorgehen ist sehr erfolgreich – Höhepunkt von [5] ist eine Formulierung und ein Beweis des relativen Theorems von Giraud – aber relativ weit entfernt von den sonst wichtigen Konzepten indizierter und gefaserter Kategorien.

Wir wollen im Folgenden stattdessen unsere um die Fähigkeit, über lokal-interne Kategorien zu sprechen, erweiterte Stacksemantik einsetzen. Deren Verbindung zu indizierten Kategorien ist wohlverstanden [16, Thm. B2.2.2], und sie fügen sich sehr leicht in die Vorstellung verallgemeinerter Elemente und Objekte ein.

Proposition 1.17. *Ist $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ ein geometrischer Morphismus, so ist die induzierte lokal-interne Kategorie $\mathbb{F}$ aus Sicht der internen Sprache von $\mathcal{E}$ ein Topos.*

Beweis. (1) Wir wollen recht ausführlich zeigen, dass $\mathbb{F}$ aus interner Sicht binäre Produkte besitzt, also dass die interne Aussage

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \models \forall X, Y : \mathbb{F}.\ \exists P : \mathbb{F}, \pi_1 : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(P, X), \pi_2 : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(P, Y). \\ \forall Q : \mathbb{F}, \varphi_1 : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(Q, X), \varphi_2 : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(Q, Y). \\ \exists! \psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(Q, P).\ \varphi_{1,2} = \pi_{1,2} \circ \psi \end{aligned}$$

gilt. Wir folgen der Übersetzung durch die Stacksemantik unter Zuhilfenahme von Lemma 1.13. Seien also $A \in \mathcal{E}$ und Objekte $X, Y \in \mathbb{F}_A = \mathcal{F}/f^*A$ vorgegeben; der Übersichtlichkeit halber passen wir unsere Notation an und geben vor, dass $A = 1$ gälte. Konsequenterweise schreiben wir dann auch „$\mathcal{F}$“ statt „$\mathcal{F}/f^*A$“.

Wir setzen $P := X \times Y \in \mathcal{F}$. Um die beiden Projektionsmorphismen zu spezifizieren, müssen wir Elemente in

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, [\![\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(P, X)]\!]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, f_*[P, X]_{\mathcal{F}}) \cong \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(f^*1, [P, X]_{\mathcal{F}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, X)\end{aligned}$$

bzw. analog mit Y angeben. Unter diesen Isomorphismen wählen wir $\pi_{1,2}$ als die kanonischen Projektionen $P \to X$, $P \to Y$. Seien weiter $(B \xrightarrow{p} 1) \in \mathcal{E}$ und ein Objekt $Q \in \mathbb{F}_B = \mathcal{F}/f^*B$ zusammen mit Elementen $\varphi_{1,2}$ gegeben. Unter analogen Isomorphismen sind diese Morphismen $Q \to (f^*p)^*X$, $Q \to (f^*p)^*Y$ über f^*B.

Da Produkte unter Basiswechsel stabil sind, ist $(f^*p)^*P$ ein Produkt von $(f^*p)^*X$ und $(f^*p)^*Y$ in $\mathcal{F}/f^*B$, also gibt es genau einen Morphismus $Q \xrightarrow{\psi} (f^*p)^*P$ mit $\varphi_{1,2} = \psi \circ (f^*p)^*\pi_{1,2}$. Also hat genau ein Element in $\mathrm{Hom}_B(B, [\![\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(Q, P)]\!])$ die geforderte Kompatibilitätseigenschaft.

(2) Die Existenz eines terminalen Objekts und interner Exponentialobjekte zeigt man analog.

(3) Für die Diskussion des Unterobjektklassifizierers von $\mathbb{F}$ wollen wir vereinbaren, dass wir mit „$\Omega_{\mathbb{F}}$“ den Unterobjektklassifizierer von $\mathcal{F}/f^*A$ bezeichnen, wenn wir uns beim Interpretieren von internen Aussagen über der Scheibenkategorie $\mathcal{E}/A$ befinden. (Formal ist das eine Spracherweiterung.) Wir müssen die interne Aussage

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \models \forall U, X : \mathbb{F}.\ \forall \iota : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(U, X).\ \ulcorner \iota \text{ ist ein Monomorphismus} \urcorner \Rightarrow \\ \exists! \chi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(X, \Omega_{\mathbb{F}}).\ \ulcorner \text{es ist } \begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, hook, "\iota"'] & 1 \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega_{\mathbb{F}} \end{tikzcd} \text{ ein Faserproduktdiagramm in } \mathbb{F} \urcorner\end{aligned}$$

zeigen. Übersetzt bedeutet diese, dass für alle $A \in \mathcal{E}$ und Monomorphismen $U \hookrightarrow X$ in $\mathcal{F}/f^*A$ genau ein Morphismus $X \xrightarrow{\chi} \Omega_{\mathcal{F}/f^*A}$ derart existiert, sodass das Diagramm in allen weiteren Scheibenkategorien $\mathcal{F}/f^*B$, $B \to A$ beliebig, ein Faserproduktdiagramm ist. Da $\Omega_{\mathcal{F}/f^*A}$ ein Unterobjektklassifizierer in $\mathcal{F}/f^*A$ ist und Faserproduktdiagramme unter Basiswechsel stabil sind, ist die Behauptung klar. □

Bemerkung 1.18. In der internen Sprache gibt es die Gleichheitsrelation nur auf Wertebene, d. h. sind x und y Werte eines Typs A, so ist $x = y$ eine wohlgeformte Formel, aber sind X und Y Typen, kann man nicht $X = Y$ schreiben. Das verhindert also, dass man Objekte lokal-interner Topoi auf Gleichheit testen kann, und so soll es auch sein.

1.2.3. Idempotenz der Stacksemantik

Sei $\mathcal{E}$ ein Topos. Aus Sicht der internen Sprache von $\mathcal{E}$ gibt es dann den Topos $\mathbb{E}$, der die Rolle der Kategorie der Mengen einnimmt. Wie jeder Topos besitzt auch dieser seine eigene interne Sprache, selbst wiederum interpretiert in der internen Sprache von $\mathcal{E}$. Folgendes Lemma gibt über die externe Bedeutung von Aussagen dieser „doppelt internen“ Sprache Aufschluss:

Lemma 1.19 (Idempotenz der Stacksemantik, speziell; Aussage aus [39, Lemma 7.20])**.** *Sei ϕ eine Formel über $1 \in \mathcal{E}$. Dann sind äquivalent:*

(1) $\mathcal{E} \models \ulcorner \mathbb{E} \models \phi \urcorner$.

(2) $\mathcal{E} \models \phi$.

Dabei muss Aussage (1) richtig interpretiert werden: Kommt etwa in ϕ eine Typkonstante $(X \to 1) \in \mathcal{E}$ vor, so muss diese in Aussage (1) als Term vom Typ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(X, 1)$ aufgefasst werden. Es gibt keine Entsprechung dieses Lemmas in der üblichen internen Sprache, da in der Abkürzung $\ulcorner \mathbb{E} \models \phi \urcorner$ unbeschränkte Quantoren vorkommen und daher Aussage (1) nur in einem Kontext interpretiert werden kann, der solche auch unterstützt.

Beweis des Lemmas. Der Beweis von Korollar 1.16, dass die Stacksemantik von Aussagen über Set mit der externen (gewöhnlichen) Bedeutung der Aussagen übereinstimmt, war konstruktiv und lässt sich daher in der internen Sprache von $\mathcal{E}$ wiederholen. Dort bezieht sich „Set“ dann auf $\mathbb{E}$, womit die Behauptung folgt. Alternativ kann man auch einen Induktionsbeweis über den Formelaufbau führen [39, Lemma 7.20]. $\square$

Das folgende Resultat verallgemeinert die Beobachtung dieses Lemmas auf die erweiterte Stacksemantik. Mit dessen Hilfe lassen sich manche ad-hoc-Argumente, die beim Umgang mit der internen Sprache sonst gelegentlich nötig sind, vermeiden und stattdessen einheitlich und konzeptionell verstehen.

Lemma 1.20 (Idempotenz der Stacksemantik, allgemein)**.** *Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ ein geometrischer Morphismus, $U \in \mathcal{E}$, $(V \xrightarrow{d} f^*U) \in \mathcal{F}$. Sei ϕ eine Formel über $V \in \mathcal{F}$. Dann sind äquivalent:*

(1) $U \models \ulcorner V \models \phi \urcorner$ *(wobei Konstanten richtig interpretiert werden müssen).*

(2) $V \models \phi$.

Beweis. Wir führen eine Induktion über den Formelaufbau von ϕ, wobei wir die Notation dahingehend missbrauchen, dass wir auf die benötigte Konstanteninterpretation nicht eingehen. Die Fälle $(\top)$ und $(\wedge)$ sind trivial. Sei $\phi = (\psi \Rightarrow \chi)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow U \models \ulcorner V \models (\psi \Rightarrow \chi) \urcorner \\
&\Leftrightarrow U \models \forall \widetilde{V} : \mathbb{F}.\ \forall p : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\widetilde{V}, V).\ \ulcorner \Big[\widetilde{V} \models p^*\psi \Big] \urcorner \Rightarrow \ulcorner \Big[\widetilde{V} \models p^*\chi \Big] \urcorner \\
&\overset{\star}{\Leftrightarrow} \text{für alle } (\widetilde{U} \xrightarrow{q} U) \in \mathcal{E},\ (\widetilde{V} \to f^*\widetilde{U}) \in \mathcal{F},\ (\widetilde{V} \xrightarrow{p} (f^*q)^*V) \in \mathcal{F}/f^*\widetilde{U}\text{:} \\
&\qquad\qquad \widetilde{U} \models \ulcorner \Big[\widetilde{V} \models p^*\psi \Big] \urcorner \implies \widetilde{U} \models \ulcorner \Big[\widetilde{V} \models p^*\chi \Big] \urcorner \\
&\Leftrightarrow \text{für alle } (\widetilde{U} \xrightarrow{q} U) \in \mathcal{E},\ (\widetilde{V} \to f^*\widetilde{U}) \in \mathcal{F},\ (\widetilde{V} \xrightarrow{\bar{p}} V) \in \mathcal{F}/f^*U\text{:} \\
&\qquad\qquad \Big[\widetilde{V} \models p^*\psi \Big] \implies \Big[\widetilde{V} \models p^*\chi \Big] \\
&\Leftrightarrow V \models (\psi \Rightarrow \chi) \\
&\Leftrightarrow (2).
\end{aligned}$$

Beim markierten Schritt wurde die Isomorphie

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/\widetilde{U}}(\widetilde{U}, (f/\widetilde{U})_*[\widetilde{V}, (f^*q)^*V]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}/f^*\widetilde{U}}(\widetilde{V}, (f^*q)^*V)$$

verwendet. Sei nun $\phi = (\forall x : X.\ \psi)$, wobei X eine Typkonstante der Sorte $\mathbb{F}$ ist, also ein Objekt aus $\mathcal{F}/V$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow U \models \ulcorner V \models \forall x : X.\ \psi \urcorner \\
&\Leftrightarrow U \models \forall \widetilde{V} : \mathbb{F}.\ \forall p : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\widetilde{V}, V).\ \forall x : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\widetilde{V}, X) \text{ über } V.\ \ulcorner \widetilde{V} \models p^*\psi[x] \urcorner \\
&\Leftrightarrow \text{für alle } (\widetilde{U} \xrightarrow{q} U) \in \mathcal{E},\ (\widetilde{V} \to f^*\widetilde{U}) \in \mathcal{F},\ (\widetilde{V} \xrightarrow{\bar{p}} V) \in \mathcal{F}/f^*U,\ (\widetilde{V} \xrightarrow{\bar{x}} X) \in \mathcal{F}/f^*U\text{:} \\
&\qquad\qquad \widetilde{U} \models \ulcorner \widetilde{V} \models \bar{p}^*\psi[\bar{x}] \urcorner \\
&\Leftrightarrow \text{für alle } (\widetilde{V} \xrightarrow{\bar{p}} V) \in \mathcal{F},\ (\widetilde{V} \xrightarrow{\bar{x}} X) \in \mathcal{F}/V\text{: } \widetilde{V} \models \bar{p}^*\psi[\bar{x}] \\
&\Leftrightarrow V \models \forall x : X.\ \psi \\
&\Leftrightarrow (2).
\end{aligned}$$

Der Beweis des Falls $\phi = (\forall X : \mathbb{G}.\ \psi)$, wobei $\mathbb{G}$ eine lokal-interne Kategorie über $\mathcal{F}$ ist, verläuft ähnlich. In Aussage (1) bezieht sich „$\mathbb{G}$“ auf den Pushforward von $\mathbb{G}$ auf $\mathcal{E}$ (beschrieben in [18, Bsp. A.3(iii)]). Für den Fall $\phi = (\exists x : X.\ \psi)$ muss man beim markierten Schritt das elementare Ergebnis ausnutzen, dass Epimorphismen in Topoi unter Basiswechsel stabil sind:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow U \models \ulcorner V \models \exists x : X.\ \psi \urcorner \\
&\Leftrightarrow U \models \exists \widetilde{V} : \mathbb{F}.\ \exists p : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\widetilde{V}, V) \text{ Epimorphismus}.\ \exists x : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\widetilde{V}, X) \text{ über } V.\ \ulcorner \widetilde{V} \models p^*\psi[x] \urcorner \\
&\Leftrightarrow \text{es gibt } (\widetilde{U} \xrightarrow{q} U) \in \mathcal{E} \text{ Epimorphismus},\ (\widetilde{V} \to f^*\widetilde{U}) \in \mathcal{F}, \\
&\qquad\qquad (\widetilde{V} \xrightarrow{\bar{p}} V) \in \mathcal{F}/f^*U \text{ so, dass } \widetilde{V} \to (f^*q)^*V \text{ ein Epimorphismus ist}, \\
&\qquad\qquad (\widetilde{V} \xrightarrow{\bar{x}} X) \in \mathcal{F}/f^*U\text{:} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \widetilde{U} \models \ulcorner \widetilde{V} \models \bar{p}^*\psi[\bar{x}] \urcorner \\
&\overset{\star}{\Leftrightarrow} \text{es gibt } (\widetilde{V} \xrightarrow{\bar{p}} V) \in \mathcal{F} \text{ Epimorphismus},\ (\widetilde{V} \xrightarrow{\bar{x}} X) \in \mathcal{F}/V\text{: } \widetilde{V} \models \bar{p}^*\psi[\bar{x}] \\
&\Leftrightarrow V \models \exists x : X.\ \psi \\
&\Leftrightarrow (2).
\end{aligned}$$

Der Beweis des Falls $\phi = (\psi \vee \chi)$ verläuft ähnlich, man muss ausnutzen, dass gemeinsam epimorphe Morphismenpaare unter Basiswechsel stabil sind. Für den Fall $\phi = \bot$ benötigt man die Tatsache, dass ein Objekt einer Scheibenkategorie genau dann initial ist, wenn es in der zugrundeliegenden Kategorie initial ist. □

1.3. Interne Kategorien

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie interne Kategorien in einem Topos $\mathcal{E}$ aus Sicht der internen Sprache aussehen. Klassisch werden diese wie folgt definiert [16, Def. B2.3.1]:

Definition 1.21. Eine *interne Kategorie* $\mathcal{C}$ in einem Topos $\mathcal{E}$ (oder allgemeiner einer Kategorie, die die für die folgenden Diagramme notwendigen Faserprodukte besitzt) besteht aus

(1) einem Objekt $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{E}$ (welches wir uns als „Menge“ der Objekte von $\mathcal{C}$ vorstellen),

(2) einem Objekt $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{E}$ (die „Menge“ aller Morphismen von $\mathcal{C}$),

(3) Morphismen $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_0$ („Abbildungen“, die jedem Morphismus in $\mathcal{C}$ seine Quelle bzw. sein Ziel zuordnen),

(4) einem Morphismus $\circ\colon \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1$, der Quelle und Ziel respektiert, also die Diagramme

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{C}_1 \arrow[d, "\mathrm{dom}"] \\ \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[urr, bend left, "\circ"] \arrow[r, "\mathrm{fst}"'] & \mathcal{C}_1 \arrow[r, "\mathrm{dom}"'] & \mathcal{C}_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & & \mathcal{C}_1 \arrow[d, "\mathrm{cod}"] \\ \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[urr, bend left, "\circ"] \arrow[r, "\mathrm{snd}"'] & \mathcal{C}_1 \arrow[r, "\mathrm{cod}"'] & \mathcal{C}_0 \end{tikzcd}$$

kommutieren lässt (wobei wir „$g \circ f$“ für $\circ(f, g)$ schreiben werden) und

(5) einem Morphismus $i\colon \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$ („Abbildung“, die jedem Objekt seinen Identitätsmorphismus in $\mathcal{C}$ zuordnet), sodass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}_1 \arrow[d, "\mathrm{dom}"] \\ \mathcal{C}_0 \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{C}_1 \arrow[d, "\mathrm{cod}"] \\ \mathcal{C}_0 \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}_0 \end{tikzcd}$$

kommutieren,

sodass die Axiome

(1) Assoziativität:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "(\circ)\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times(\circ)"] & \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[d, "\circ"'] \\ \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "\circ"'] & \mathcal{C}_1 \end{tikzcd}$$

(2) Neutralität:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_0 \arrow[d, "\mathrm{id}\times i"'] & \mathcal{C}_1 \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}_0 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[d, "i\times\mathrm{id}"] \\ \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "\circ"'] & \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[l, "\circ"] \end{tikzcd}$$

erfüllt sind.

Beispiel 1.22. (1) Eine interne Kategorie in Set ist dasselbe wie eine kleine Kategorie im üblichen Sinn.

(2) Bekanntlich induziert eine Partialordnung X eine kleine Kategorie mit Morphismenmenge $\{(x,y) \in X \times X \mid x \leq y\}$. Auf dieselbe Art und Weise induziert eine interne Partialordnung X in einem Topos $\mathcal{E}$ eine zugehörige interne Kategorie.

(3) Sei I eine interne Kategorie in einem Topos $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ ein geometrischer Morphismus. Dann wird eine interne Kategorie f^*I in $\mathcal{F}$ induziert, mit

$$(f^*I)_0 = f^*(I_0) \quad \text{und} \quad (f^*I)_1 = f^*(I_1).$$

Speziell induziert jede gewöhnliche kleine Kategorie I eine interne Kategorie γ^*I in jedem kovollständigen Topos $\mathcal{E}$ (sodass der kanonische geometrische Morphismus $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Set}$ existiert).

Eine Möglichkeit, Definition 1.21 zu erhalten, ist die üblichen Axiome kleiner Kategorien punktfrei mit Diagrammen auszudrücken und dann in einer beliebigen umgebenden Kategorie statt Set zu formulieren. Alternativ kann man auch die formale logische Theorie kleiner Kategorien aufstellen (mit zwei Sorten, $\mathcal{C}_0$ und $\mathcal{C}_1$) und dann den Apparat der Sprachinterpretation in Kategorien verwenden.

Die Daten $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} \colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_0$ kann man auch zu einem Morphismus $\mathcal{C}_1 \xrightarrow{\mathrm{dom\&cod}} \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$ zusammenfassen. Als solcher ist er dann die semantische Interpretation eines abhängigen Typs

$$X, Y : \mathcal{C}_0 \vdash \mathcal{C}_1(X,Y) : \mathbb{E}.$$

Der Morphismus i ist wegen der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}_1 \arrow[d, "\mathrm{dom\&cod}"] \\ \mathcal{C}_0 \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\mathrm{id\&id}"'] & \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 \end{tikzcd}$$

die Interpretation eines Terms $X : \mathcal{C}_0 \vdash i(X) : \mathcal{C}_1(X,X)$, und analog kann der Kompositionsmorphismus $(\circ)$ mit der Interpretation eines Terms

$$X, Y, Z : \mathcal{C}_0, f : \mathcal{C}_1(X,Y), g : \mathcal{C}_1(Y,Z) \vdash g \circ f : \mathcal{C}_1(X,Z)$$

identifiziert werden. Die beiden Axiome in der Definition kann man dann in der internen Sprache formulieren, sodass aus der internen Sicht von $\mathcal{E}$ eine interne Kategorie in $\mathcal{E}$ genau folgende typtheoretische Definition erfüllt:

Definition 1.23. Eine *kleine Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht typtheoretisch aus

(1) einem Typ $\mathcal{C}_0$ (von Objekten von $\mathcal{C}$),

(2) einem abhängigen Typ $X, Y : \mathcal{C}_0 \vdash \mathcal{C}_1(X,Y) : \mathrm{Type}$,

(3) einem Term $X, Y, Z : \mathcal{C}_0, f : \mathcal{C}_1(X,Y), g : \mathcal{C}_1(Y,Z) \vdash g \circ f : \mathcal{C}_1(X,Z)$ und

(4) einem Term $X : \mathcal{C}_0 \vdash i(X) : \mathcal{C}_1(X,X)$,

sodass die Axiome

(1) Assoziativität: $X, Y, Z, W : \mathcal{C}_0, f : \mathcal{C}_1(X, Y), g : \mathcal{C}_1(Y, Z), h : \mathcal{C}_1(Z, W) \vdash$
$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

(2) Neutralität: $X, Y : \mathcal{C}_0, f : \mathcal{C}_1(X, Y) \vdash i(Y) \circ f = f = f \circ i(X)$

erfüllt sind.

Das ist auch gerade die übliche typtheoretische Definition einer Kategorie.

1.4. Interne Diagramme

Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie. Dann gibt es den Begriff des *Diagramms auf* $\mathcal{C}$, d. h. eines Funktors $\mathcal{C} \to \mathrm{Set}$. Allgemeiner kann man auch Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ betrachten, wobei $\mathcal{D}$ eine lokal-kleine Kategorie ist. In diesem Abschnitt wollen wir diese beiden Konzepte in der Sprache abhängiger Typen ausdrücken, um sie dann in beliebigen Topoi zu internalisieren; das benötigen wir, um später Kompaktheit lokal-interner Topoi in der internen Sprache definieren zu können.

1.4.1. Interne Diagramme mit Werten im Basistopos

Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ ist durch zwei Daten gegeben: Zum einen muss die Wirkung von F auf Objekte spezifiziert werden, das geschieht durch die Angabe einer $(\mathrm{Ob}\,\mathcal{C})$-indizierten Familie $(F(X))_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ von Mengen. Zum anderen muss die Wirkung von F auf Morphismen spezifiziert werden, durch die Angabe einer Abbildung $F(f)$ für alle $f \in \mathcal{C}(X, Y), X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Es liegt daher folgende typtheoretische Formulierung nahe:

Definition 1.24. (1) Ein *Diagramm* F auf einer Kategorie $\mathcal{C}$, gegeben durch einen Typ $\mathcal{C}_0$ von Objekten und einem abhängigen Typ $X, Y : \mathcal{C}_0 \vdash \mathcal{C}_1(X, Y)$ von Morphismen, besteht typtheoretisch aus

a) einem abhängigen Typ $X : \mathcal{C}_0 \vdash F_0(X)$ und

b) einem Term $X, Y : \mathcal{C}_0, f : \mathcal{C}_1(X, Y) \vdash F(f) : [F_0(X), F_0(Y)]$,

sodass die Axiome

a) $X : \mathcal{C}_0 \vdash F(i(X)) = \mathrm{id}_{F_0(X)}$ und

b) $X, Y, Z : \mathcal{C}_0, f : \mathcal{C}_1(X, Y), g : \mathcal{C}_1(Y, Z) \vdash F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

erfüllt sind.

(2) Eine *natürliche Transformation* η von Diagrammen F, G auf $\mathcal{C}$ besteht aus einem Term

$$X : C_0 \vdash \eta(X) : [F_0(X), G_0(X)],$$

sodass die Natürlichkeitsbedingung

$$X, Y : \mathcal{C}_0, f : \mathcal{C}_1(X, Y) \vdash G(f) \circ \eta(X) = \eta(Y) \circ F(f)$$

erfüllt ist.

Die klassische Definition eines internen Diagramms in einem Topos $\mathcal{C}$ ist folgende:

Definition 1.25. Ein *internes Diagramm* F auf einer internen Kategorie $\mathcal{C}$ in einem Topos $\mathcal{E}$ besteht aus

(1) einem Objekt $F_0 \in \mathcal{E}$ zusammen mit einem Morphismus $F_0 \xrightarrow{d} \mathcal{C}_0$ und

(2) einem Morphismus $F_0 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{m} F_0$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F_0 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{snd}"'] & F_0 \arrow[d, "d"] \\ \mathcal{C}_1 \arrow[r, "\mathrm{cod}"'] & \mathcal{C}_0 \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

kommutieren lässt (wobei $\mathcal{C}_1 \xrightarrow{\mathrm{dom}} \mathcal{C}_0$ der für das Faserprodukt relevante Strukturmorphismus sein soll),

sodass die Axiome

$$\begin{tikzcd} & F_0 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[d] \\ F_0 \arrow[ur, "\mathrm{id}\&(i \circ d)"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & F_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F_0 \times_{\mathcal{C}_0} (\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1) \arrow[rr, "\mathrm{id} \times (\circ)"] \arrow[d, "\cong"'] & & F_0 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[d] \\ (F_0 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1) \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "m \times \mathrm{id}"'] & F_0 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "(\circ)"'] & F_0 \end{tikzcd}$$

erfüllt sind.

Die Familie $(F(X))_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}$ wird in dieser Definition durch den Morphismus $F_0 \xrightarrow{d} \mathcal{C}_0$ ausgedrückt: Im Fall $\mathcal{E} = \mathrm{Set}$ stellt man sich die Faser von $X \in \mathcal{C}_0$ unter d als $F(X)$ vor. Die Axiome erhält man, indem man die üblichen Funktoraxiome erst punktfrei und dann in Diagrammform notiert.

Die Kategorien $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ der Modelle der typtheoretischen Definition 1.24 in einem Topos $\mathcal{E}$ und der internen Diagramme in $\mathcal{E}$ nach der klassischen Definition 1.25 sind äquivalent: Die Interpretation eines Terms vom Typ $[F_0(X), F_0(Y)]$ im Kontext $X, Y : \mathcal{C}_0, f : \mathcal{C}_1(X, Y)$ ist durch ein Element von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(\mathcal{C}_1, [\mathrm{dom}^* F_0, \mathrm{cod}^* F_0]_{\mathcal{E}/\mathcal{C}_1})$ gegeben. Diese Morphismenmenge ist wegen der Produkt-/Exponentialadjunktion in $\mathcal{E}/\mathcal{C}_1$ natürlich isomorph zur Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(\mathrm{dom}^* F_0, \mathrm{cod}^* F_0)$, welche ihrerseits mit

$$\{F_0 \times_{\mathcal{C}_0} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{m} F_0 \,|\, m \text{ lässt Diagramm (1.8) kommutieren}\}$$

identifiziert werden kann. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass unter dieser Korrespondenz die Axiome der beiden Definitionen ineinander übergehen.

Proposition 1.26. *Die Kategorie $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ der internen Diagramme auf $\mathcal{C}$ in einem Topos $\mathcal{E}$ ist ein Topos.*

Beweis. Durch die typtheoretische Formulierung können wir einfach den üblichen Beweis, dass die Kopragarbenkategorie $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}}$ ein Topos ist, in der internen Sprache von $\mathcal{E}$ reproduzieren. Exemplarisch skizzieren wir, dass der Unterobjektklassifizierer durch die Intepretation des abhängigen Typs

$$U : \mathcal{C}_0 \vdash \Omega(U) := \Big\{ s : \prod_{X : \mathcal{C}_0} \mathcal{P}(\mathcal{C}_1(U, X)) \;\Big|\; \forall X, Y : \mathcal{C}_0, f : \mathcal{C}_1(X, Y), a \in s(X).\ f \circ a \in s(Y) \Big\},$$

der jedem $U : \mathcal{C}_0$ den Typ der Kosiebe auf U zuordnet, gegeben ist. Der Ausdruck in geschweiften Klammern muss natürlich als Typ, und nicht als Wert des Potenzobjekts $\mathcal{P}(\prod_{X : \mathcal{C}_0} \mathcal{P}(\mathcal{C}_1(U, X)))$, angesehen werden. Die Umwandlung haben wir auf Seite 16 beschrieben.

Zu einem Unterobjekt $G \overset{\eta}{\hookrightarrow} F$ definieren wir die klassifizierende natürliche Transformation $F \xrightarrow{\chi} \Omega$ als Interpretation des Ausdrucks

$$\chi := \lambda(U : \mathcal{C}_0).\ \lambda(v : F_0(U)).\ \lambda(X : \mathcal{C}_0).\ \{ f : C_1(U, X) \mid F(f)(v) \in \operatorname{im} \eta(X) \}.$$

Zum Nachweis der universellen Eigenschaft sei der durchgezogene Teil eines kommutativen Diagramms der Form

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\
& G \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & 1 \arrow[d, hook] \\
& F \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}$$

vorgegeben. Dann können wir in der internen Sprache von $\mathcal{E}$ zeigen, dass es zu $U : \mathcal{C}_0$, $z : H_0(U)$ genau ein $w : G_0(U)$ mit $\eta(U)(w) = \alpha(U)(z)$ gibt und über den Satz über die eindeutige Auswahl einen Morphismus $H \to G$ wie gefordert konstruieren. $\square$

Limiten und Kolimiten

Definition 1.27. (1) Der *Limes* eines internen Diagramms $F \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ ist folgendes über die interne Sprache definierte Objekt von $\mathcal{E}$:

$$\Big\{ \varphi : \prod_{X : \mathcal{C}_0} F(X) \;\Big|\; \forall X, Y : \mathcal{C}_0, f : \mathcal{C}_1(X, Y).\ F(f)(\varphi(X)) = \varphi(Y) \Big\}.$$

(2) Der *Kolimes* ist die Interpretation des Ausdrucks

$$\Big(\sum_{X\,:\,\mathcal{C}_0} F(X)\Big)/{\sim},$$

wobei $(\sim)$ die feinste Äquivalenzrelation mit

$$\langle X, u\rangle \sim \langle Y, F(f)(u)\rangle$$

für alle $X, Y : \mathcal{C}_0$, $f : \mathcal{C}_1(X, Y)$, $u : F(X)$ sei. Diese kann in der internen Sprache wie gewohnt als Schnitt über all solche Äquivalenzrelationen, die diese Bedingung erfüllen, definiert werden.

Lemma 1.28. *In der internen Sprache haben die so definierten (Ko-)Limesobjekte zusammen mit ihren offensichtlich definierten Strukturmorphismen die erwartete universelle Eigenschaft.*

Beweis. Die obigen Konstruktionen von Limes und Kolimes sind offensichtlich dem üblichen Beweis der (Ko-)Vollständigkeit von Set entnommen. Dieser ist konstruktiv und lässt sich daher auch in der internen Sprache von $\mathcal{E}$ nachvollziehen (zur Formulierung sind abhängige Typen nötig). Damit folgt schon die Behauptung. □

Zusammenhang mit externen Diagrammen

Sei I eine gewöhnliche kleine Kategorie und $\mathcal{E}$ ein Topos. Wenn $\mathcal{E}$ kovollständig ist, sodass die induzierte interne Kategorie $\gamma^* I$ aus Beispiel 1.22(3) existiert, kann man die Kategorie $\mathcal{E}^I$ der externen I-Diagramme auf $\mathcal{E}$, also der Funktoren $I \to \mathcal{E}$, mit der Kategorie $\mathcal{E}^{\gamma^* I}$ interner Diagramme auf $\gamma^* I$ vergleichen:

Proposition 1.29. *Die Kategorien $\mathcal{E}^I$ und $\mathcal{E}^{\gamma^* I}$ sind äquivalent. Ferner stimmen der externe und interne (Ko-)Limesbegriff überein.*

Beweis. Ein Funktor $F\colon I \to \mathcal{E}$ induziert ein internes Diagramm

$$F_0 := \coprod_{i \in I} F(i) \longrightarrow (\gamma^* I)_0,$$

und ein internes Diagramm $F \in \mathcal{E}^{\gamma^* I}$ induziert einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ i & \longmapsto & \iota_i^* F_0 \end{array}$$

wobei ι_i der zum Index i assoziierte Strukturmorphismus $1 \xrightarrow{\iota_i} \coprod_{j \in I} 1 = (\gamma^* I)_0$ bezeichne. Man kann nachrechnen, dass diese Konstruktionen bis auf natürliche Isomorphie zueinander invers sind.

Sei nun $F \in \mathcal{E}^I$ ein beliebiges externes Diagramm auf I. Sei $X \in \mathcal{E}$ der intern definierte Limes des ebenfalls mit „F“ bezeichneten induzierten internen Diagramms. Wir wollen zeigen, dass X die universelle Eigenschaft eines externen Limes von F hat. Der interne Limes kommt mit einer intern definierten Familie von Projektionsabbildungen, geschrieben

$$i : (\gamma^* I)_0 \vdash \pi_i : [X, F(i)].$$

Deren externe Interpretation ist ein Morphismus $\coprod_{i \in I} X \to \coprod_{i \in I} F(i) = F_0$ über I_0, denn der Rückzug von X unter $I_0 = \coprod_{i \in I} 1 \to 1$ ist gerade $\coprod_{i \in I} X$, und induziert somit für alle $i \in I$ Morphismen $X \to F(i)$. Diese sind mit den Morphismen $F(i) \to F(j)$ für $i \to j$ in I verträglich.

Sei ein weiteres Objekt $Z \in \mathcal{E}$ mit verträglichen Morphismen $Z \xrightarrow{\varphi_i} F(i)$, $i \in I$, gegeben. Diese induzieren umgekehrt einen Morphismus $\coprod_{i \in I} Z \to \coprod_{i \in I} F(i)$ über I_0 und somit eine interne Familie

$$i : (\gamma^* I)_0 \vdash \varphi_i : [Z, F(i)].$$

Also folgt in der internen Sprache:

$$\mathcal{E} \models \exists! \psi : [Z, X].\ \forall i : (\gamma^* I)_0.\ \varphi_i = \pi_i \circ \psi.$$

Aus dieser internen eindeutigen Existenz folgt globale eindeutige Existenz (Lemma 1.13), d. h. es folgt

$$\exists! \psi : \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(Z, X).\ \forall i \in I.\ \varphi_i = \pi_i \circ \psi.$$

Das war zu zeigen. Der Fall von Kolimiten verläuft analog. □

Familien von Unterobjekten des terminalen Objekts

Wir wollen noch untersuchen, wie interne Diagramme in einem Topos $\mathcal{E}$ charakterisiert werden können, die aus der internen Sicht ihre Werte nicht nur unspezifisch in beliebigen Mengen, sondern in Subsingletonmengen annehmen. Dazu ist eine allgemeine typtheoretische Aussage hilfreich:

Lemma 1.30. *Sei* $a : A \vdash B(a) : \mathrm{Type}$ *ein abhängiger Typ. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\forall a : A.\ B(a)$ *ist ein Unterobjekt des terminalen Typs* 1*.*

(2) $\forall a : A.\ \forall x, y : B(a).\ x = y.$

(3) Die kanonische Projektionsabbildung $\sum_{a : A} B(a) \xrightarrow{\pi} A$ *ist injektiv.*

Beweis. Nach Definition bedeutet (1), dass für alle $a : A$ die eindeutige Abbildung $B(a) \to 1$ injektiv ist. Das ist genau Aussage (2). Auch die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (3) ist klar. □

Interpretieren wir das Lemma in der internen Sprache eines Topos $\mathcal{E}$, so erhalten wir folgendes Korollar:

Korollar 1.31. *Sei $B \xrightarrow{\pi} A$ ein Morphismus in einem Topos $\mathcal{E}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) Der induzierte abhängige Typ $a : A \vdash B(a) : \mathbb{E}$ ist eine Familie von Subsingletontypen.

(2) Der Morphismus π ist ein Monomorphismus in $\mathcal{E}$.

Beweis. Die Interpretation des kanonischen Abbildungterms vom Typ $[\sum_{a:A} B(a), A]$ ist gerade der Morphismus π. □

Damit können wir die eingangs gestellte Frage beantworten:

Korollar 1.32. *Für ein internes Diagramm $F \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ mit Objektwirkung gegeben durch einen Morphismus $F_0 \xrightarrow{d} \mathcal{C}_0$ in $\mathcal{E}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathcal{E} \models \forall X : \mathcal{C}_0.\ \ulcorner F_0(X)$ ist ein Subsingleton$\urcorner$.

(2) Der Strukturmorphismus d ist ein Monomorphismus.

(3) Das Diagramm F ist in der Kategorie $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ ein Unterobjekt des terminalen Objekts.

Im Fall, dass diese Aussagen zutreffen, ist außerdem die Wirkung von F auf Morphismen schon eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen ist eine unmittelbare Folgerung aus dem vorhergehenden Korollar. Aussage (3) ist gleichbedeutend damit, dass die eindeutige natürliche Transformation ins terminale Diagramm, in der internen Sprache gegeben durch den Ausdruck

$$\eta = \lambda(X : \mathcal{C}_0).\ \lambda(s : F_0(X)).\ \star,$$

ein Monomorphismus ist. Das lässt sich bekanntlich objektweise prüfen; Aussage (1) drückt gerade die Injektivität von $\eta(X)$ für alle $X : \mathcal{C}_0$ aus.

Die Eindeutigkeitsaussage ist ebenfalls klar: Diagramm (1.8) aus Definition 1.25 gibt die Nachkomposition mit dem Monomorphismus d vor. Alternativ kann man diesen Sachverhalt auch intern verstehen, denn es ist klar, dass zwischen zwei Subsingletons $F_0(X)$, $F_0(Y)$ höchstens eine Abbildung verlaufen kann. □

1.4.2. Interne Diagramme mit Werten in lokal-internen Kategorien über dem Basistopos

Seien $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie und $\mathcal{D}$ eine gewöhnliche lokal-kleine Kategorie. Die Wirkung eines Funktors $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ auf Objekte ist dann durch eine $(\mathrm{Ob}\,\mathcal{C})$-indizierte Familie von Objekten aus $\mathcal{D}$ gegeben. Da in lokal-internen Kategorien über Topoi ein sinnvoller Begriff einer durch ein Objekt des Basistopos indizierten Familie eingebaut ist, können wir die Definition des Diagrammbegriffs aus dem vorherigen Abschnitt mühelos verallgemeinern:

Definition 1.33. (1) Ein *internes Diagramm* F auf einer internen Kategorie $\mathcal{C}$ eines Topos $\mathcal{E}$ mit Werten in einer lokal-internen Kategorie $\mathbb{D}$ über $\mathcal{E}$ besteht aus

a) der Interpretation eines abhängigen Typs $X : \mathcal{C}_0 \vdash F_0(X) : \mathbb{D}$ (also einem Objekt $F_0 \in \mathbb{D}_{\mathcal{C}_0}$) und

b) der Interpretation eines Terms F vom Typ

$$\prod_{X,Y : \mathcal{C}_0} \prod_{f : \mathcal{C}_1(X,Y)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(F_0(X), F_0(Y)),$$

sodass die Funktoraxiome

a) $\mathcal{E} \models \forall X : \mathcal{C}_0.\ F(X,X)(i(X)) = \mathrm{id}_{F_0(X)}$ und

b) $\mathcal{E} \models \forall X, Y, Z : \mathcal{C}_0.\ \forall f : \mathcal{C}_1(X,Y), g : \mathcal{C}_1(Y,Z).$
$F(X,Z)(g \circ f) = F(Y,Z)(g) \circ F(X,Y)(f)$

erfüllt sind.

(2) Eine *natürliche Transformation* η zwischen solchen Diagrammen F, G besteht aus der Interpretation eines Terms vom Typ

$$\prod_{X,Y : \mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_0(X), G_0(X))$$

sodass die Natürlichkeitsbedingung

$$\mathcal{E} \models \forall X, Y : \mathcal{C}_0.\ \forall f : \mathcal{C}_1(X,Y).\ G(X,Y)(f) \circ \eta(X) = \eta(Y) \circ F(X,Y)(f)$$

erfüllt ist.

Wir bezeichnen mit $\mathbb{D}^{\mathcal{C}}$ die Kategorie all solcher internen Diagramme und natürlichen Transformationen.

Beispiel 1.34. Ein internes Diagramm auf einer internen Kategorie $\mathcal{C}$ eines Topos $\mathcal{E}$ mit Werten in der Selbstindizierung $\mathbb{E}$ ist dasselbe wie ein internes Diagramm auf $\mathcal{C}$ im Sinne der früheren Definition 1.25, d. h. die Kategorien $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ und $\mathbb{E}^{\mathcal{C}}$ sind äquivalent.

Im Spezialfall, dass $\mathbb{D}$ die durch einen geometrischen Morphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ induzierte lokal-interne Kategorie $\mathbb{F}$ über $\mathcal{E}$ ist, kann man die Kategorie $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}$ der internen Diagramme auf der internen Kategorie $\mathcal{C}$ mit Werten in $\mathbb{F}$ mit der Kategorie $\mathcal{F}^{f^*\mathcal{C}}$ der internen Diagramme auf der internen Kategorie $f^*\mathcal{C}$ von $\mathcal{F}$ im Sinne der früheren Definition 1.25 vergleichen:

Proposition 1.35. *Die Kategorien $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{F}^{f^*\mathcal{C}}$ sind äquivalent.*

Beweis. Der Objektteil F_0 eines Diagramms aus $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}$ ist nach Definition 1.33 ein Objekt $F_0 \in \mathbb{F}_{\mathcal{C}_0}$, also ein Morphismus $F_0 \to f^*\mathcal{C}_0$ in $\mathcal{F}$. Durch einen solchen Morphismus ist auch der Objektteil eines Diagramms aus $\mathcal{F}^{f^*\mathcal{C}}$ nach Definition 1.25 gegeben.

Die Morphismenwirkung eines Diagramms F aus $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}$ ist durch einen Morphismus in

$$\mathrm{Hom}_1(1, [\![\prod_{X,Y\,:\,\mathcal{C}_0} \prod_{f\,:\,\mathcal{C}_1(X,Y)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(F_0(X), F_0(Y))]\!]) \cong \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(C_1, (f/\mathcal{C}_1)_*[(f^*\mathrm{dom})^*F_0, (f^*\mathrm{cod})^*F_0])$$

gegeben, wobei $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} \colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_0$ die Strukturmorphismen der internen Kategorie $\mathcal{C}$ sind. Diese Morphismenmenge ist natürlich isomorph zu

$$\mathrm{Hom}_{f^*\mathcal{C}_1}(f^*\mathcal{C}_1, [(f^*\mathrm{dom})^*F_0, (f^*\mathrm{cod})^*F_0]) \cong \\ \mathrm{Hom}_{f^*\mathcal{C}_1}(F_0 \times_{f^*\mathcal{C}_0} f^*\mathcal{C}_1, f^*\mathcal{C}_1 \times_{f^*\mathcal{C}_0} F_0) \cong \\ \mathrm{Hom}_{f^*\mathcal{C}_0}(F_0 \times_{f^*\mathcal{C}_0} f^*\mathcal{C}_1, F_0);$$

mit einem Element dieser Menge wird die Wirkung eines Diagramms aus $\mathcal{F}^{f^*\mathcal{C}}$ spezifiziert. Bei dieser Übersetzung gehen die Axiome passend ineinander über. $\square$

Familien von Unterobjekten des terminalen Objekts

Wie im vorherigen Abschnitt wollen wir noch diejenigen Diagramme charakterisieren, die ihre Werte in der vollen Unterkategorie der Unterobjekte des terminalen Objekts annehmen. Dazu verallgemeinern wir zunächst Korollar 1.31; sei weiterhin $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ ein geometrischer Morphismus.

Proposition 1.36. *Sei A ein Objekt von $\mathcal{E}$. Dann sind für eine A-indizierte Familie von Objekten aus $\mathcal{F}$, also ein Objekt $(B \xrightarrow{\pi} f^*A)$ aus $\mathbb{F}_A = \mathcal{F}/f^*A$ – aus interner Sicht also einen abhängigen Typ $a : A \vdash B(a) : \mathbb{F}$ – folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathcal{E} \models \forall a : A.\ \ulcorner B(a)$ ist ein Unterobjekt des terminalen Objekts von $\mathbb{F}\urcorner$.

(2) $\mathcal{E} \models \forall a : A.\ \ulcorner$der eindeutige Morphismus in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(B(a), 1)$ ist monomorph$\urcorner$.

(3) $\mathcal{E} \models \forall a : A.\ \mathbb{F} \models \ulcorner$die eindeutige Abbildung $B(a) \to 1$ ist injektiv$\urcorner$.

(4) $\mathcal{F} \models \forall a : f^*A.\ \ulcorner$die eindeutige Abbildung $B(a) \to 1$ ist injektiv$\urcorner$.

(5) Der Morphismus π ist ein Monomorphismus in $\mathcal{F}$.

Beweis. Die Äquivalenz (1) ⇔ (2) gilt nach Definition. Wenn man die $\mathbb{F}$-interne Aussage in (3) mit der Kripke-Joyal-Semantik interpretiert, sieht man die Äquivalenz (2) ⇔ (3). Schließlich folgt (3) ⇔ (4) mit dem Idempotenzlemma 1.20 angewendet auf $\mathcal{E}/A$ und (4) ⇔ (5) folgt wie bei Korollar 1.31. $\square$

Eine wichtige Folgerung aus dieser Proposition ist, dass wir A-indizierte Familien von Unterobjekten des terminalen Objekts in $\mathcal{F}$ mit ihren charakteristischen Morphismen $f^*A \to \Omega_{\mathcal{F}}$ identifizieren können. Das ist bedeutsam, denn in der internen Sprache von $\mathcal{E}$ können wir nicht die Klasse all derjenigen abhängigen Typen $a : A \vdash B(a) : \mathbb{F}$, die Werte in den Unterobjekten des terminalen Objekts annehmen, zu einem Typ zusammenfassen – sehr wohl aber gibt es den Typ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(f^*A, \Omega_{\mathbb{F}})$.

Korollar 1.37. *Für ein internes Diagramm $F \in \mathbb{F}^{\mathcal{C}}$ mit Objektwirkung gegeben durch einen Morphismus $F_0 \xrightarrow{d} f^*\mathcal{C}_0$ in $\mathcal{F}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathcal{E} \models \forall X : \mathcal{C}_0.\ \ulcorner F(X)$ ist ein Unterobjekt des terminalen Objekts von $\mathbb{F}\urcorner$.

(2) Der Strukturmorphismus d ist ein Monomorphismus.

(3) Das Diagramm F ist in der Kategorie $\mathbb{F}^{\mathcal{C}}$ ein Unterobjekt des terminalen Objekts.

Beweis. Der Beweis des in Korollar 1.32 gezeigten Spezialfalls überträgt sich auf die allgemeine Situation hier. □

1.5. Kuratowskiendlichkeit von Objekten

Konstruktiv gibt es verschiedene nicht-äquivalente Endlichkeitsbegriffe von Mengen. Für uns ist der der *Kuratowskiendlichkeit* wichtig, da dieser Zusammenhänge zur Eigentlichkeit gewisser geometrischer Morphismen aufweist. Unter manch anderen Begriffen zeichnet er sich dadurch aus, dass kuratowskiendliche Vereinigungen kuratowskiendlicher Teilmengen wieder kuratowskiendlich sind und somit der Funktor „kuratowskiendliche Teilmengen bilden" eine Untermonade der Potenzmengenmonade ist. Für Details dazu siehe [22].

Definition 1.38. Zu einer Menge A ist die Menge $\mathcal{K}(A)$ aller *kuratowskiendlichen Teilmengen* von A die kleinste Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$, die abgeschlossen unter Singletonbildung und leeren und binären Vereinigungen ist, also

$$\mathcal{K}(A) := \bigcap \Big\{ M \subseteq \mathcal{P}(A) \;\Big|\; \{x\} \in M \text{ für alle } x \in A,\ \emptyset \in M,\ U \cup V \in M \text{ für alle } U, V \in M \Big\}. \quad (1.9)$$

Eine Teilmenge $U \subseteq A$ heißt genau dann *kuratowskiendlich*, wenn $U \in \mathcal{K}(A)$.

Der Ausdruck (1.9) lässt sich auch in der internen Sprache eines Topos $\mathcal{E}$ schreiben und definiert dann das Objekt $\mathcal{K}(A)$ aller kuratowskiendlichen Unterobjekte von A; ein Unterobjekt $U \hookrightarrow A$ heißt genau dann *kuratowskiendlich*, wenn der induzierte Morphismus $1 \to \mathcal{P}(A)$ über $\mathcal{K}(A) \hookrightarrow \mathcal{P}(A)$ faktorisiert.

In konstruktiver Mengenlehre kann man die kuratowskiendlichen Teilmengen wie folgt charakterisieren:

Proposition 1.39. *Eine Teilmenge $U \subseteq A$ ist genau dann kuratowskiendlich, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine Abildung $[n] \to A$ mit Bild U gibt, wobei $[n] := \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} \subseteq \mathbb{N}$ ist.*

Beweis. Wir setzen $\widetilde{\mathcal{K}} := \{U \subseteq A \mid \exists n \in \mathbb{N}.\ \exists f \colon [n] \to A.\ \operatorname{im} f = U\}$. Dann gilt:

(1) Für alle $x \in A$ liegt $\{x\}$ in $\widetilde{K}$: Setze $n := 1$ und wähle f als die konstante Abbildung $\lambda(m \in [n]).\ x$.

(2) Die leere Teilmenge von A liegt in $\widetilde{K}$: Setze $n := 0$ und wähle f als leere Abbildung.

(3) Seien $U = \operatorname{im} f$, $V = \operatorname{im} g$ mit $f \colon [n] \to A$, $g \colon [m] \to A$ gegeben. Dann können wir eine Abbildung $h \colon [n + m] \to A$ als

$$h(s) := \begin{cases} f(s), & \text{für } s < n, \\ g(s - n), & \text{für } s \geq n \end{cases}$$

definieren. Die Fallunterscheidung ist wegen des auch konstruktiv gültigen Trichotomiegesetzes in $\mathbb{N}$ vollständig und kann mit dem Satz über die eindeutige Auswahl formal umgesetzt werden. Es gilt $\operatorname{im} h = U \cup V$, also $U \cup V \in \widetilde{K}$.

Mit (1)–(3) folgt schon $\mathcal{K}(A) \subseteq \widetilde{\mathcal{K}}$.

(4) Sei $M \subseteq \mathcal{P}(A)$ eine Teilmenge der Potenzmenge, die abgeschlossen unter Singletonbildung und leeren und binären Vereinigungen ist. Dann zeigen wir $\widetilde{K} \subseteq M$ durch einen Induktionsbeweis der Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \forall f \colon [n] \to A.\ \operatorname{im} f \in M.$$

Der Induktionsanfang $n = 0$ ist dabei nach Voraussetzung klar. Sei für den Induktionsschritt eine Abbildung $f \colon [n+1] \to A$ gegeben. Da auch konstruktiv $[n+1] = [n] \cup \{n\}$ gilt, folgt

$$\operatorname{im} f = \operatorname{im} f|_{[n]} \cup \{f(n)\},$$

womit $\operatorname{im} f$ nach der Induktionsvoraussetzung an $f|_{[n]}$ in M liegt. □

Da der Beweis konstruktiv war, sollte die Proposition auch in beliebigen Topoi $\mathcal{E}$ mit einem Objekt natürlicher Zahlen $N \in \mathcal{E}$ gelten. Um aber überhaupt die Aussage formulieren zu können, benötigt man abhängige Typen: Der Ausdruck „$[n]$“ hängt von n ab und muss trotzdem als Typ verstanden werden, da er zur Angabe der Quelle von Morphismen verwendet wird. Typtheoretisch definieren wir also

$$n : N \ \vdash\ [n] := \{m : N \mid m < n\}.$$

Da der Satz über die eindeutige Auswahl und das Induktionsprinzip auch in Topoi gültig sind, lässt sich dann der Beweis in der internen Sprache lesen. Damit folgt also folgende allgemeinere Aussage:

Proposition 1.40. *Sei $\mathcal{E}$ ein Topos mit einem Objekt natürlicher Zahlen $N \in \mathcal{E}$ und $U \xhookrightarrow{\iota} A$ ein Unterobjekt. Dann sind äquivalent:*

(1) $U \hookrightarrow A$ *ist kuratowskiendlich.*

(2) $\mathcal{E} \models \exists n : N.\ \exists f : [[n], A].\ \operatorname{im} f = \operatorname{im} \iota.$

(3) $\mathcal{E} \models \exists n : N.\ \exists f : [[n], U].\ \ulcorner f$ *ist surjektiv*$\urcorner$.

(4) Es gibt einen Epimorphismus $I \xrightarrow{p} 1$ *in* $\mathcal{E}$ *und ein Element* $I \xrightarrow{n} N$, *sodass* p^*U *ein Quotient von* $[n]$ *ist, d. h. sodass ein Epimorphismus* $[n] \xrightarrow{f} p^*U$ *in* $\mathcal{E}/I$ *existiert. Dabei ist* $[n]$ *als das Faserprodukt*

$$\begin{tikzcd} {[n]} \arrow[r] \arrow[d, hook] & p^*(<) \arrow[d, hook] \\ p^*N \cong p^*N \times_I I \arrow[r, "\mathrm{id}\times n"'] & p^*N \times p^*N \end{tikzcd}$$

zu verstehen und $(<) \hookrightarrow N \times N$ *ist die Kleinerrelation.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) haben wir oben diskutiert. Die Äquivalenz der Aussagen (2) und (3) ist klar, da der offensichtliche konstruktive Beweis in der internen Sprache formulierbar ist. Aussage (4) ist die externe Bedeutung von Aussage (3) unter der Kripke-Joyal-Semantik. □

Wir wollen noch an einem Beispiel zeigen, wie man in der internen Sprache mit Kuratowskiendlichkeit umgehen kann. Dazu zeigen wir ein Brouwersches Gegenbeispiel, das wir im Folgenden aber nicht weiter benötigen werden.

Proposition 1.41. *Topoi, in denen binäre Schnitte kuratowskiendlicher Unterobjekte stets wieder kuratowskiendlich sind, sind boolsch.*

Beweis. Dazu zeigen wir in der internen Sprache eines solchen Topos, dass für jeden Wahrheitswert φ das Prinzip $\varphi \vee \neg\varphi$ vom ausgeschlossenen Dritten gilt. Dazu betrachten wir die Teilmengen $X := \{\star \mid \varphi\}$ und $Y := \{\star \mid \top\}$ der einelementigen Menge $1 = \{\star\}$.

Dann sind die Singletons $\{X\}$ und $\{Y\}$ kuratowskiendliche Teilmengen von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(1))$, nach Voraussetzung ist also auch $\{X\} \cap \{Y\}$ kuratowskiendlich. Damit ist $\{X\} \cap \{Y\}$ leer oder bewohnt; im ersten Fall folgt $\neg\varphi$ (denn aus φ würde $X = Y$ folgen), im zweiten folgt φ (da dann $X = Y$). □

1.6. Interne vollständige Partialordnungen

Sei X eine gewöhnliche Partialordnung, d. h. eine Menge zusammen mit einer reflexiven, transitiven und antisymmetrischen Relation $\leq$. Dann kann man mehrere Arten an Vollständigkeitsforderungen an X stellen, unter anderem folgende:

(1) Jede Teilmenge von X besitzt ein Supremum in X.

(2) Jede Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Elementen aus X, wobei I eine beliebige Indexmenge ist, besitzt ein Supremum in X.

Natürlich sind diese beiden Bedingungen äquivalent. Da sich die Äquivalenz konstruktiv beweisen lässt, erwartet man auch, dass sie in allen Topoi gilt; das stimmt auch, aber da man abhängige Typen und unbeschränkte Quantifikation benötigt, um den üblichen Beweis übertragen zu können, wollen wir das genauer ausführen.

Proposition 1.42. *Für eine interne Partialordnung X in einem Topos $\mathcal{E}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) X ist vollständig im $\mathcal{E}$-indizierten Sinn (siehe [16, Kap. B1.4]).

(2) Der Morphismus $(\downarrow)\colon X \to \mathcal{P}(X)$, über die interne Sprache von $\mathcal{E}$ definiert als

$$(\downarrow) := \lambda(x : X).\ \{y : X \mid y \leq x\},$$

besitzt ein monotones Linksinverses.

(3) $\mathcal{E} \models \ulcorner$jede Teilmenge von X besitzt ein Supremum$\urcorner$.

(4) $\mathcal{E} \models \forall I.\ \forall f : [I, X].\ \ulcorner$die Familie $(f(i))_{i:I}$ besitzt ein Supremum$\urcorner$.

Beweis. Die Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (2) ist bekannt [16, Lemma B2.3.9].

Für den Beweis von (3) $\Rightarrow$ (4) argumentieren wir in der internen Sprache von $\mathcal{E}$. Seien I und $f : [I, X]$ gegeben. Wir setzen $U := \{f(i) \mid i : I\} \subseteq X$. Dann besitzt nach Voraussetzung U ein Supremum in X. Dieses ist auch eins für die durch f gegebene Familie.

Für die Rückrichtung (4) $\Rightarrow$ (3) sei eine Teilmenge $U \subseteq X$ gegeben. Dann definieren wir $I := U$, als Typ gelesen – hier sieht man die Notwendigkeit abhängiger Typen –, und $f := \lambda(u : I).\ u$, wobei wir das zweite Vorkommen von „u“ als Term vom Typ X statt I ansehen. Dann besitzt die so gegebene Familie ein Supremum, und dieses ist auch eins für U.

Schließlich zeigen wir (2) $\Rightarrow$ (3). Sei dazu ein monotoner Morphismus $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{m} X$ mit $m \circ (\downarrow) = \mathrm{id}_X$ gegeben. Wir zeigen dann Aussage (3) in der internen Sprache, sei also $U : \mathcal{P}(X)$ gegeben; wir setzen $x := m(\tilde{U}) : X$ mit $\tilde{U} := \{x : A \mid \exists u \in U.\ x \leq u\} : \mathcal{P}(X)$.

Für beliebiges $u \in U$ gilt dann $u = m(\downarrow(u)) \leq m(\tilde{U}) = x$, also ist x eine obere Schranke für U. Ist eine weitere obere Schranke y von U gegeben, so gilt $x = m(\tilde{U}) \leq m(\downarrow(y)) = y$; also ist x in der Tat das Supremum von U.

Für die Rückrichtung (2) $\Leftarrow$ (3) definieren mit dem Satz über die eindeutige Auswahl in der internen Sprache den Morphismus m als

$$\ulcorner m := \lambda(U : \mathcal{P}(X)).\ \text{das eindeutige Supremum von } U\urcorner.$$

Dann ist klar, dass m monoton und linksinvers zu $(\downarrow)$ ist. $\square$

2. Eigenschaften geometrischer Morphismen

In diesem Kapitel wollen wir einige Eigenschaften geometrischer Morphismen intern charakterisieren. Den Fall eigentlicher Morphismen koppeln wir in ein eigenes Kapitel aus.

2.1. Surjektive und zusammenhängende Morphismen

Proposition 2.1. *Seien $\mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ geometrische Morphismen. Dann sind äquivalent:*

(1) g ist surjektiv (d. h. der Funktor g^* ist treu) bzw. zusammenhängend (d. h. g^* ist volltreu).

(2) $\mathcal{E} \models \ulcorner g^*$ ist treu bzw. volltreu$\urcorner$, wobei hier „g^*“ den induzierten Funktor zwischen den zu $\mathcal{G}$ und $\mathcal{F}$ gehörigen lokal-internen Kategorien von $\mathcal{E}$ bezeichnet.

Beweis. Wir setzen $h := f \circ g$ und behandeln erst nur die Treuheitsbedingungen. Ausgeschrieben besagt die zweite Aussage, dass

$$\mathcal{E} \models \forall X, Y : \mathbb{F}.\ \ulcorner\text{die kanon. Abbildung } \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(g^*X, g^*Y) \text{ ist injektiv}\urcorner.$$

Deren Bedeutung mit der Stacksemantik ist, dass für alle $A \in \mathcal{E}$ und $X, Y \in \mathcal{F}/f^*A$ der kanonische Morphismus

$$\bar{f}_*[X,Y]_{\mathcal{F}/f^*A} \to \bar{h}_*[\bar{g}^*X, \bar{g}^*Y]_{\mathcal{G}/g^*f^*A}$$

ein Monomorphismus in $\mathcal{E}/A$ ist, wobei wir „f/A“ und „h/A“ mit „$\bar{f}$“ bzw. „$\bar{h}$“ abkürzen. Das ist genau dann der Fall, wenn für alle $U \in \mathcal{E}/A$ die obere, oder äquivalent die untere Zeile im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/A}(U, \bar{f}_*[X,Y]) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}/A}(U, \bar{h}_*[\bar{g}^*X, \bar{g}^*Y]) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}/f^*U}(f^*U \times_{f^*A} X, f^*U \times_{f^*A} Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}/h^*U}(h^*U \times_{h^*A} g^*X, h^*U \times_{h^*A} g^*Y)
\end{tikzcd}$$

injektiv ist. Speziell für $A = 1$ und $U = 1$ folgt daraus die Treuheit von g^*; umgekehrt ist auch für beliebiges A und U die untere Zeile injektiv, wenn g^* treu ist.

Ganz analog verläuft das Argument für die Volltreuheitsbedingungen, dann heißt es jeweils „Isomorphismus“ und „bijektiv“. $\square$

Bemerkung 2.2. Die internen Charakterisierungen von *surjektiv* und *zusammenhängend* sind also nicht einfacher als die externen. Wir benötigen das Ergebnis auch nur, um später ein anderes Resultat (Proposition 3.22(2)) in der internen Sprache zeigen zu können.

2.2. Indiskrete Topoi und hyperzusammenhängende Morphismen

Klassisch heißt ein topologischer Raum X genau dann *indiskret*, wenn $\emptyset$ und X die einzigen offenen Mengen von X sind. Diese Definition ist aus einem intuitionistischen Standpunkt ungeeignet, da man für beliebige Mengen X nicht einmal zeigen kann, dass $\{\emptyset, X\}$ überhaupt eine Topologie definiert – intuitionistisch ist nicht klar, dass das Vereinigungsaxiom erfüllt ist. In der Tat hat man folgendes Brouwersches Gegenbeispiel:

Proposition 2.3. *Wenn für alle Mengen X das System $\{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X definiert, gilt das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten.*

Beweis. Sei φ eine beliebige Aussage. Dann ist nach Voraussetzung für die einelementige Menge $X := \{\star\}$ die Menge $\{\emptyset, X\}$ eine Topologie. Setze $I := \{\star | \varphi\}$ und betrachte die Familie $(U_i)_{i \in I} := \lambda(i \in I).\ X$.

Dann ist U_i für alle $i \in I$ offen (da gleich X), also ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen. Somit ist $\bigcup_{i \in I} U_i = \{x \in \{\star\} \,|\, \exists i \in I.\ x \in U_i\} = \{\star | \varphi\}$ leer oder ganz $\{\star\}$, also gilt φ oder $\neg\varphi$. □

Intuitiv scheitert die klassische Definition deswegen, weil sie sich darauf verlässt, dass es genau zwei Wahrheitswerte gibt. Besser ist folgende Definition:

Definition 2.4. Die *indiskrete Topologie* auf einer Menge X besteht aus all denjenigen Teilmengen $U \subseteq X$, für die gilt:

$$\exists u \in U.\ \top \quad \Longrightarrow \quad U = X.$$

Dass dabei die Bezeichnung „indiskrete Topologie“ gerechtfertigt ist, zeigt folgende Proposition:

Proposition 2.5. *(1) Definition 2.4 ist in klassischer Logik äquivalent zur üblichen Definition der indiskreten Topologie.*

(2) Die indiskrete Topologie ist (in intuitionistischer Logik) in der Tat eine Topologie.

(3) Die offenen Mengen der indiskreten Topologie sind bezüglich jeder Topologie offen.

(4) Der Funktor $\mathrm{Set} \to \mathrm{Top}$, $X \mapsto X_{\mathit{indiskr.}}$ *ist rechtsadjungiert zum Vergissfunktor.*

Beweis. (1) Klar.

(2) Dass $\emptyset$ und X sowie binäre Schnitte offener Mengen offen sind, ist klar. Sei also eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ offener Mengen gegeben. Dann ist auch $\bigcup_{i\in I} U_i$ offen, denn existiert ein $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$, so gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Damit folgt $U_i = X$ und somit auch $\bigcup_{i\in I} U_i = X$.

(3) Sei U eine offene Menge der indiskreten Topologie. Dann gilt $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, wobei $I := \{\star \mid \exists u \in U.\ \top\}$ und $(U_i)_{i\in I} := \lambda(i \in I).\ X$. Da X bezüglich jeder Topologie offen ist, ist somit auch U als Vereinigung offener Mengen bezüglich jeder Topologie offen.

(4) Nach Abwickeln der Definitionen bleibt nur zu zeigen, dass jede mengentheoretische Abbildung $Y \xrightarrow{f} X_{\text{indiskr.}}$ stetig ist. Sei dazu $U \subseteq X$ offen und $y \in f^{-1}[U]$ beliebig. Dann folgt $f(y) \in U$, also $U = X$ und Y selbst ist eine offene Umgebung von y, die in $f^{-1}[U]$ liegt. $\square$

Für bewohnte topologische Räume X kann man die Eigenschaft, indiskret zu sein, auch über eine Eigenschaft einer kanonischen Abbildung ausdrücken:

Proposition 2.6. *Ein bewohnter topologischer Raum X ist genau dann indiskret, wenn die kanonische Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ \mathcal{O}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(1) \\ U &\longmapsto \{\star \mid U = X\}, \end{aligned}$$

das ist die klassifizierende Abbildung der Teilmenge $\{X\} \subseteq \mathcal{O}(X)$, bijektiv ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Hinrichtung. Zum Nachweis der Injektivität gelte $\varphi(U) = \varphi(V)$. Dann gilt $U \subseteq V$, denn ist $u \in U$, so folgt $U = X$, also $\star \in \varphi(U) = \varphi(V)$ und somit $V = X$ und $u \in V$. Analog folgt $U \supseteq V$.

Sei zum Nachweis der Surjektivität eine Teilmenge $S \subseteq 1$ gegeben. Dann ist $U := \{x \in X \mid \star \in S\}$ in X offen und es gilt $\varphi(U) = S$, denn da X bewohnt ist, gilt $U = X \Leftrightarrow \star \in S$.

Sei für die Rückrichtung eine beliebige offene Menge $U \subseteq X$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass U auch in der indiskreten Topologie offen ist. Sei also $u \in U$. Dann gilt für die offene Menge $V := \{x \in X \mid U = X\}$, dass $\varphi(U) = \varphi(V)$, denn $U = X \Leftrightarrow V = X$ (hierbei geht das Element u ein). Also folgt $U = V$ und somit $U = X$. $\square$

In Analogie können wir definieren:

Definition 2.7. Ein lokal-kleiner Topos $\mathcal{F}$ heißt genau dann *indiskret*, wenn die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Sub}_{\mathcal{F}}(1) &\longrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathsf{Set}}(1) \\ U &\longmapsto \{\star \mid U = 1 \text{ als Unterobjekte}\}, \end{aligned}$$

das ist die klassifizierende Abbildung des Unterobjekts $\{1\} \hookrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathcal{F}}(1)$, bijektiv ist.

Beispiel 2.8. Mit der Proposition ist klar, dass ein Garbentopos $\mathrm{Sh}(X)$ zu einem bewohnten topologischen Raum X genau dann indiskret ist, wenn X indiskret ist, denn es gilt $\mathrm{Sub}_{\mathrm{Sh}(X)}(1) \cong \mathcal{O}(X)$.

Wir untersuchen nun, was es bedeutet, dass ein lokal-interner Topos aus Sicht der internen Sprache eines Basistopos indiskret ist.

Proposition 2.9. *Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ ein geometrischer Morphismus. Dann sind äquivalent:*

(1) $\mathcal{E} \models \ulcorner\mathbb{F}$ *ist als Topos indiskret*$\urcorner$, *d. h.*
$\mathcal{E} \models \ulcorner$*die Abbildung* $\lambda(\chi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(1, \Omega_{\mathbb{F}})).\ \{\star \mid \chi = t\} : \mathcal{P}(1)$ *ist bijektiv*$\urcorner$.

Dabei bezeichnet t das universelle Unterobjekt $1 \overset{t}{\hookrightarrow} \Omega_{\mathbb{F}}$.

(2) Der klassifizierende Morphismus $f_*\Omega_{\mathcal{F}} \to \Omega_{\mathcal{E}}$ des Unterobjekts $f_*1 \overset{f_*t}{\hookrightarrow} f_*\Omega_{\mathcal{F}}$ ist ein Isomorphismus.

(3) Der geometrische Morphismus f ist hyperzusammenhängend.

Beweis. Die Interpretation des Abbildungsterms in Aussage (1) ist gerade der klassifizierende Morphismus aus (2). Die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (3) ist wohlbekannt [16, Prop. A4.6.6]. □

2.3. Frobeniusreziprozität und abgeschlossene Morphismen

In klassischer Logik ist für jeden topologischen Raum X die eindeutige stetige Abbildung $X \to 1$ *abgeschlossen*, d. h. bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab, da trivialerweise jede Teilmenge von $1 = \{\star\}$ abgeschlossen ist.

In einem konstruktiven Kontext ist dagegen die Abgeschlossenheit von $X \to 1$ eine nichttriviale Bedingung: Es ist zwar nach Definition jede Teilmenge von 1 offen, aber abgeschlossen sind nur diejenigen Teilmengen, die sich als Komplement einer offenen Menge schreiben lassen.

Proposition 2.10. *(1) Eine Teilmenge $U \subseteq 1$ ist genau dann abgeschlossen, wenn U stabil unter Doppelkomplementbildung ist, d. h. wenn $\overline{\overline{U}} = U$.*

(2) Sollte jede Teilmenge von 1 *abgeschlossen sein, gilt das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten.*

Beweis. (1) Wenn U abgeschlossen ist, also $U = \overline{V}$ für ein $V \subseteq 1$, gilt $\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{\overline{V}}} = \overline{V} = U$, da auch intuitionistisch die Kürzungsregel $\neg\neg\neg \Leftrightarrow \neg$ gültig ist.

Die Rückrichtung ist trivial.

(2) Sei φ eine beliebige Aussage. Dann ist nach Voraussetzung die Teilmenge $\{\star \mid \varphi\} \subseteq 1$ abgeschlossen und daher stabil unter Doppelkomplementbildung; also folgt die Äquivalenz $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$.

Somit gilt der Satz über die Doppelnegationselimination, und dieser ist bekanntlich äquivalent zum Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten. □

Auch localetheoretisch ist die Abgeschlossenheit der eindeutigen Abbildung $X \to 1$ von Locales konstruktiv eine nichttriviale Bedingung, das führen wir im Folgenden genauer aus.

Definition 2.11. (1) Eine Locale X hat genau dann die *Frobeniusreziprozitätseigenschaft*, wenn die eindeutige Localeabbildung $X \to 1$ abgeschlossen ist.

(2) Eine Localeabbildung $X \xrightarrow{f} Y$ heißt genau dann *abgeschlossen*, wenn

$$f_*(u \vee f^*v) = f_*u \vee v$$

für alle $u \in \mathcal{O}(X)$ und $v \in \mathcal{O}(Y)$ gilt. Dabei bezeichnet $f_*\colon \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ den als monotone Abbildung stets existenten Rechtsadjungierten von f^* (siehe etwa [10]),

$$f_*(u) = \sup\{v \in \mathcal{O}(Y) \mid f^*v \leq u\}.$$

(3) Ein geometrischer Morphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ heißt genau dann *abgeschlossen*, wenn

$$(f/A)_*(U \vee (f/A)^*V) = (f/A)_*U \vee V$$

für alle $A \in \mathcal{E}$ und Unterobjekte $U \hookrightarrow 1$ in $\mathcal{F}/f^*A$ und $V \hookrightarrow 1$ in $\mathcal{E}/A$ gilt.

Dann können wir Abgeschlossenheit geometrischer Morphismen mit der internen Sprache charakterisieren:

Proposition 2.12. *Für einen geometrischen Morphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ sind äquivalent:*

(1) f ist abgeschlossen.

(2) Für alle $A \in \mathcal{E}$ ist die von f induzierte Localeabbildung

$$\mathrm{Sub}_{\mathcal{F}/f^*A}(1) \longrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathcal{E}/A}(1)$$

abgeschlossen.

(3) $\mathcal{E} \models \ulcorner f_*\Omega_{\mathbb{F}}$ hat die Frobeniusreziprozitätseigenschaft$\urcorner$.

Beweis. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen ist klar. Die dritte bedeutet genauer, dass aus der internen Sicht von $\mathcal{E}$ der Morphismus $f_*\Omega_{\mathbb{F}} \xrightarrow{!} \Omega_{\mathbb{E}} = \mathcal{P}(1)$ interner Locales abgeschlossen ist. Dessen links- und rechtsadjungierte Teile sind die Abbildungen

$$\begin{array}{rrcl} !^*\colon & \Omega_{\mathbb{E}} & \longrightarrow & f_*\Omega_{\mathbb{F}} \\ & v & \longmapsto & \sup\{\top \mid \star \in v\} \\ \\ !_*\colon & f_*\Omega_{\mathbb{F}} & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{E}} \\ & s & \longmapsto & \{\star \mid s = \top\}, \end{array}$$

letztere ist die klassifizierende Abbildung der Teilmenge $\{\top\} \subseteq f_*\Omega_{\mathbb{F}}$. Ausgeschrieben lautet die dritte Aussage also

$$\mathcal{E} \models \forall v : \Omega_{\mathbb{E}}.\ \forall u : f_*\Omega_{\mathbb{F}}.\ !_*(u \vee !^* v) = !_* u \vee v. \tag{2.1}$$

Die externe Bedeutung mit der Kripke-Joyal-Semantik ist gerade Aussage (2). □

Hier und bei der Behandlung weiterer Eigenschaften geometrischer Morphismen liefern die kanonisch induzierten geometrischen Morphismen $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}$ für Objekte $A \in \mathcal{E}$ und allgemeiner $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/B$ für Morphismen $A \to B$ instruktive Beispiele:

Proposition 2.13. *(1) Sei A ein Objekt eines Topos $\mathcal{E}$. Dann ist der kanonische Morphismus $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}$ genau dann abgeschlossen, wenn A in der internen Sprache von $\mathcal{E}$ folgende Bedingung erfüllt:*

$$\mathcal{E} \models \forall U : \mathcal{P}(A), p : \Omega.\ \ A \subseteq U \cup \{x : A \mid p\} \implies A \subseteq U \vee p. \tag{2.2}$$

(2) Sei $A \xrightarrow{f} B$ ein Morphismus in $\mathcal{E}$. Genau dann ist der induzierte Morphismus $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/B$ abgeschlossen, wenn aus Sicht der internen Sprache die Fasern von f jeweils Bedingung (2.2) *erfüllen.*

Beweis. (1) Sei die von $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}$ induzierte lokal-interne Kategorie von $\mathcal{E}$ mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Dann ist nach Definition $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}$ genau dann abgeschlossen, wenn aus der internen Sicht von $\mathcal{E}$ die Locale

$$[\![\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(1_{\mathbb{C}}, \Omega_{\mathbb{C}})]\!] = \Pi_![1_{\mathcal{E}/A}, \Omega_{\mathcal{E}/A}]_{\mathcal{E}/A} \cong \Pi_!\Omega_{\mathcal{E}/A} \cong \Pi_!!^*\Omega_{\mathcal{E}} \cong [A, \Omega_{\mathcal{E}}]_{\mathcal{E}} = \mathcal{P}(A)$$

die Frobeniusreziprozitätseigenschaft hat; dabei ist $A \xrightarrow{!} 1$ der eindeutige Morphismus ins terminale Objekt, $\Pi_!$ der Rechtsadjungierte zum Rückzugsfunktor $!^* \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}/A$, also der rechtsadjungierte Teil des geometrischen Morphismus $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}$, und die letzte Isomorphie folgt über die universelle Eigenschaft des Exponentialobjekts.

Für den im vorherigen Beweis explizit angegebenen Morphismus $!^* \colon \Omega \to \mathcal{P}(A)$ gilt hier

$$!^*(p) = \sup\{\top : \mathcal{P}(A) \mid p\} = \{x : A \mid p\},$$

also besagt Bedingung (2.2) gerade, dass $\mathcal{P}(A)$ die Frobeniusreziprozitätseigenschaft hat.

(2) Nach der ersten Aussage ist $\mathcal{E}/A \simeq (\mathcal{E}/B)/A \to \mathcal{E}/B$ genau dann abgeschlossen, wenn

$$\mathcal{E}/B \models \ulcorner A \text{ erfüllt Bedingung (2.2)} \urcorner.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\mathcal{E} \models \forall p : B.\ \ulcorner A \text{ erfüllt Bedingung (2.2)} \urcorner,$$

wobei hier „A" als abhängiger Typ $p : B \vdash f^{-1}[\{p\}] : \mathbb{E}$ aufzufassen ist. Das zeigt schon die Behauptung. □

Korollar 2.14. *In boolschen Topoi $\mathcal{E}$ sind geometrische Morphismen der Form $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/B$ stets abgeschlossen.*

Beweis. Klar, denn in klassischer Logik ist Bedingung (2.2) stets erfüllt. □

2.4. Lokale Topoi und Morphismen

Das Konzept einer kompakten Locale besitzt eine naheliegende Verallgemeinerung:

Definition 2.15. (1) Eine vollständige Partialordnung X heißt genau dann *lokal*, wenn das größte Element $\top \in X$ unerreichbar durch beliebige Joins ist, d. h. wenn

$$\top = \sup U \quad \Longrightarrow \quad \exists u \in U.\ \top = u$$

für alle (nicht nur gerichtete) Teilmengen $U \in \mathcal{P}(X)$ gilt.

(2) Eine Locale X heißt genau dann *lokal*, wenn ihr Rahmen $\mathcal{O}(X)$ lokal ist.

(3) Ein lokal-kleiner Topos $\mathcal{F}$ heißt genau dann *lokal*, wenn seine lokalische Reflektion (siehe [16, Kap. A4.6]) es ist, wenn also $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(1, \Omega_{\mathcal{F}})$ eine lokale Partialordnung ist.

Beispiel 2.16. (1) Die Locale zu einem topologischen Raum X ist lokal, wenn X einen *Brennpunkt* besitzt; das ist ein Punkt $x_0 \in X$, sodass X die einzige offene Menge ist, die ihn enthält. Die Umkehrung gilt, wenn „Punkt“ im localetheoretischen Sinn interpretiert wird oder X nüchtern ist.

(2) Speziell sind Spektren lokaler Ringe lokal.

(3) Der Garbentopos $\mathrm{Sh}(X)$ zu einer Locale X ist genau dann lokal, wenn X lokal ist.

Ein weiteres Beispiel liefert folgende Proposition:

Proposition 2.17. *Für ein Objekt $A \in \mathcal{E}$ eines Topos $\mathcal{E}$ ist das Potenzobjekt $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{E}$ genau dann in der internen Sprache von $\mathcal{E}$ lokal, wenn A ein terminales Objekt ist.*

Beweis. Wir zeigen in der internen Sprache von $\mathcal{E}$, dass $\mathcal{P}(A)$ genau dann lokal ist, wenn A eine Singletonmenge ist. Die Hinrichtung folgt dabei sofort aus der Beobachtung, dass $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$. Die Rückrichtung war Gegenstand von Beispiel 3.3(2). □

Die Lokalität eines Topos kann man nicht in seiner internen Sprache charakterisieren, d. h. es kann keine Formel ϕ geben, sodass ein beliebiger lokal-kleiner Topos $\mathcal{F}$ genau dann lokal ist, wenn $\mathcal{F} \models \phi$ gilt. Denn wie jede Interpretation einer internen Aussage mit der Stacksemantik wäre diese von lokalem Charakter, die Eigenschaft, lokal zu sein, ist es aber nicht. Ist beispielsweise $X = \bigcup_i U_i$ eine Überdeckung eines topologischen Raums X durch offene Mengen U_i, die als Räume lokal sind, so würde jeweils $U_i \models \phi$, und damit auch $X \models \phi$, gelten. Wenn X selbst nicht lokal ist, ist das ein Widerspruch.

Man kann Lokalität aber über eine Metaeigenschaft der internen Sprache charakterisieren, der bekannten Disjunktionseigenschaft, wie sie auch einige formale intuitionistische Systeme erfüllen (siehe dazu [41, Kap. 3.5.6]):

Proposition 2.18. *Ein lokal-kleiner Topos $\mathcal{F}$ ist genau dann lokal, wenn für jede Menge I und Familie $(\phi_i)_i$ von (darstellbaren) Formeln über $\mathcal{F}$ gilt:*

$$\mathcal{F} \models \bigvee_{i \in I} \phi_i \quad \Longrightarrow \quad \exists i \in I.\, \mathcal{F} \models \phi_i. \tag{2.3}$$

Beweis. Jede solche Familie induziert eine Familie $(\llbracket \phi_i \rrbracket \hookrightarrow 1)$ von Unterobjekten des terminalen Objekts, und umgekehrt definiert jede Familie $(U_i \hookrightarrow 1)_i$ von Unterobjekten eine Familie $(\star \in U_i)_i$ von darstellbaren Formeln über $\mathcal{F}$. Unter dieser Übersetzung geht die Bedingung (2.3) genau in die Definition eines lokalen Topos über. $\square$

In der Literatur gibt es auch den Begriff eines *lokalen geometrischen Morphismus* $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ von Topoi [16, Kap. C3.6]; andererseits können wir die Bedingung formulieren, dass $\mathbb{F}$ aus der Sicht von $\mathcal{E}$ ein lokaler Topos ist. Diese beiden Aussagen sind nicht äquivalent, folgende Proposition klärt die Beziehung zwischen diesen beiden Konzepten:

Proposition 2.19. *Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ ein geometrischer Morphismus. Genau dann gilt*

$$\mathcal{E} \models \ulcorner \mathbb{F} \textit{ ist ein lokaler Topos} \urcorner,$$

wenn der kanonische geometrische Morphismus

$$\mathrm{Sh}_{\mathcal{E}}(f_* \Omega_{\mathcal{F}}) \longrightarrow \mathcal{E} \tag{2.4}$$

ein lokaler geometrischer Morphismus ist. Dabei ist $\mathrm{Sh}_{\mathcal{E}}(f_* \Omega_{\mathcal{F}})$ der Topos der Garben auf der internen Locale $f_* \Omega_{\mathcal{F}}$.

Beweis. Nach [19, Prop. 1.7] ist der geometrische Morphismus in (2.4) genau dann lokal, wenn $f_* \Omega_{\mathcal{F}}$ aufgefasst als interner Situs in $\mathcal{E}$ lokal ist (mit der offensichtlichen Definition). Das ist genau dann der Fall, wenn $f_* \Omega_{\mathcal{F}}$ aufgefasst als interne Locale lokal ist, also wenn die angegebene interne Bedingung gilt. $\square$

3. Kompakte Topoi und eigentliche geometrische Morphismen

In diesem Kapitel definieren wir die Konzepte kompakter Topoi und eigentlicher geometrischer Morphismen. Der Unterschied zur Darstellung in [32], an der wir uns orientieren, liegt darin, dass wir mithilfe der Stacksemantik formal statt informal die dazu notwendige toposinterne Kategorientheorie betreiben. Das demonstriert zum einen, dass es keinen Grund gibt, vor informaler relativer Kategorientheorie zurückzuschrecken, da eine Formalisierung leicht fällt; und zum anderen, dass die Stacksemantik dafür gut geeignet ist.

3.1. Kompakte Partialordnungen

Definition 3.1. Eine vollständige Partialordnung X mit größtem Element $\top$ heißt genau dann *kompakt*, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(1) Für alle gerichteten Mengen I und monotonen Familien $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen aus X (d. h. Familien mit $i \leq j \Rightarrow x_i \leq x_j$) mit $\top = \sup_{i \in I} x_i$ gibt es ein $i \in I$ mit $\top = x_i$.

(2) Für alle Mengen I und Familien $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen aus X mit $\top = \sup_{i \in I} x_i$ gibt es eine kuratowskiendliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\top = \sup_{j \in J} x_j$.

Beweis der Äquivalenz. Für die Richtung (1) $\Rightarrow$ (2) sei eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ mit $\top = \sup_{i \in I} x_i$ gegeben. Dann ist die Menge $\mathcal{K}(I)$ aller kuratowskiendlichen Teilmengen von I gerichtet und die durch

$$y_U := \sup_{i \in U} x_i \in X$$

definierte Familie $(y_U)_{U \in \mathcal{K}(I)}$ monoton. Da

$$\sup_{U \in \mathcal{K}(I)} y_U \geq \sup_{i \in I} y_{\{i\}} = \sup_{i \in I} x_i = \top,$$

gibt es nach Voraussetzung ein $U \in \mathcal{K}(I)$ mit $\top = y_U$. Das zeigt die Behauptung.

Für die Rückrichtung sei eine gerichtete Familie $(x_i)_{i \in I}$ mit $\top = \sup_{i \in I} x_i$ gegeben. Dann gibt es nach Voraussetzung eine kuratowskiendliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\top = \sup_{j \in J} x_j$. Das Teilmengensystem

$$\widetilde{\mathcal{K}} := \bigcup_{h \in I} \mathcal{P}(\downarrow(h)) = \{U \subseteq I \mid \exists h \in I.\ \forall j \in U.\ j \leq h\} \subseteq \mathcal{P}(I)$$

enthält die Singletons $\{i\}$ für $i \in I$, die leere Teilmenge (da I bewohnt) und ist stabil unter binären Vereinigungen (da I gerichtet). Also folgt $\mathcal{K}(I) \subseteq \widetilde{\mathcal{K}}$ und somit $J \in \widetilde{\mathcal{K}}$. Damit gibt es ein $h \in I$ mit $j \leq h$ für alle $j \in J$; also folgt

$$\top = \sup_{j \in J} x_j \leq x_h \leq \top. \qquad \square$$

Bemerkung 3.2. (1) Für die Rückrichtung hätte man auch einen Induktionsbeweis (über die Obergrenze für die Anzahl der Elemente in J) führen können. Da wir jedoch die Äquivalenz auch in Topoi wissen möchten, die nicht notwendigerweise ein Objekt natürlicher Zahlen enthalten, mussten wir den Beweis entsprechend allgemeiner fassen.

(2) Die Vollständigkeitsvoraussetzung an X benötigen wir, damit die Suprema in den Kompaktheitsbedingungen existieren und damit die Hinrichtung des Beweises durchgeht. Tatsächlich genügt aber die schwächere Voraussetzung, dass X binäre Joins besitzt, wenn man die Aussagen gutwillig liest – beispielsweise „$\top = \sup_{i \in I} x_i$“ als

$$\forall z \in X.\ [\forall i \in I.\ x_i \leq z] \Rightarrow \top \leq z.$$

Da in unseren Anwendungen X aber stets vollständig sein wird, verfolgen wir diese Überlegungen nicht weiter.

Beispiel 3.3. (1) Die Definition ist so gemacht, dass der Rahmen $\mathcal{O}(X)$ eines topologischen Raums X oder einer Locale genau dann als Partialordnung kompakt ist, wenn X als Raum kompakt ist.

(2) Speziell ist der Teilmengenverband $\mathcal{P}(1)$ zu $1 = \{\star\}$ kompakt: Gilt $\{\star\} = \bigcup_{i \in I} U_i$, dann liegt $\star$ schon in einem U_i. Lemma 3.6 wird diese Beobachtung verallgemeinern.

(3) Rahmen lokaler Locales sind kompakt.

Bemerkung 3.4. Die beiden Kompaktheitsbedingungen in Definition 3.1 lassen sich auch ohne unbeschränkte Quantifikation formulieren:

($\tilde{1}$) Für alle gerichteten Teilmengen $U \subseteq X$ mit $\top = \sup U$ gibt es ein $x \in U$ mit $\top = x$.

($\tilde{2}$) Für alle Teilmengen $U \subseteq X$ mit $\top = \sup U$ gibt es eine kuratowskiendliche Teilmenge $V \subseteq U$ mit $\top = \sup V$.

Denn aus einer (gerichteten) Teilmenge $U \subseteq X$ kann man die (gerichtete) Familie $(u)_{u \in U}$, und umgekehrt zu einer (gerichteten) Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen aus X die (gerichtete) Teilmenge $\{x_i \,|\, i \in I\}$ konstruieren. Die Supremumsbegriffe gehen dabei passend ineinander über. Diese Bemerkung ist für die interne Interpretation in Topoi relevant, wenn man nicht die Stack-, sondern nur die gewöhnliche Kripke-Joyal-Semantik verwenden möchte.

Die Bemerkung motiviert folgende Definition:

Definition 3.5. Zu einer internen Partialordnung $X \in \mathcal{E}$ eines Topos $\mathcal{E}$ ist $\mathcal{J}(X)$ das *Objekt aller gerichteten Unterobjekte* von X, also die Interpretation des Ausdrucks

$$\{U : \mathcal{P}(X) \mid \exists x \in U.\ \top \ \wedge\ \forall x, y \in U.\ \exists z \in U.\ x, y \leq z\}$$

der internen Sprache von $\mathcal{E}$.

Lemma 3.6. *Für ein Objekt $A \in \mathcal{E}$ eines Topos $\mathcal{E}$ ist das Potenzobjekt $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{E}$ genau dann in der internen Sprache von $\mathcal{E}$ eine kompakte Partialordnung, wenn A ein kuratowskiendliches Objekt von $\mathcal{E}$ ist.*

Beweis. Wir argumentieren für beide Richtungen in der internen Sprache. Für die Hinrichtung beobachten wir, dass die Teilmenge $\mathcal{K}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$ aller kuratowskiendlichen Teilmengen von A gerichtet ist und $\bigcup \mathcal{K}(A) = A$ gilt, da schon alle Singletons $\{a\}$ mit $a : A$ in $\mathcal{K}(A)$ enthalten sind. Da $\mathcal{P}(A)$ kompakt ist, gibt es daher ein $M \in \mathcal{K}(A)$ mit $A = M$, also ist A kuratowskiendlich.

Für die Rückrichtung sei eine gerichtete Familie $(U_i)_{i:I}$ von Elementen aus $\mathcal{P}(A)$ mit $A = \bigcup_{i:I} U_i$ gegeben. Dann enthält das Teilmengensystem

$$\widetilde{\mathcal{K}} := \bigcup_{i:I} \mathcal{P}(U_i) \subseteq \mathcal{P}(A)$$

die Singletons $\{a\}$ für alle $a : A$ und die leere Teilmenge von $\mathcal{P}(A)$ und ist abgeschlossen unter binären Vereinigungen. Damit folgt $\mathcal{K}(A) \subseteq \widetilde{\mathcal{K}}$. Da nach Voraussetzung $A \in \mathcal{K}(A)$, gibt es also ein $i : I$ mit $A \subseteq U_i$. Da sowieso $U_i \subseteq A$, folgt $U_i = A$. □

Abschließend wollen wir Kompaktheit noch über externe Begriffe ausdrücken:

Proposition 3.7. *Für eine vollständige Partialordnung X in einem Topos $\mathcal{E}$ mit größtem Element $1 \xrightarrow{\top} X$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) In der internen Sprache von $\mathcal{E}$ ist X kompakt.

(2) Für alle $(A \xrightarrow{p} 1) \in \mathcal{E}$ und filtrierte interne Kategorien I in $\mathcal{E}/A$ erfüllt das Quadrat

$$\begin{tikzcd} p^*X \arrow[r, shift left=1.5, "\mathrm{konst}"] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "\chi"'] & (p^*X)^I \arrow[l, shift left=1.5, "\mathrm{sup}"] \arrow[d, "\chi^I"] \\ \Omega_{\mathcal{E}/A} \arrow[r, shift left=1.5, "\mathrm{konst}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & (\Omega_{\mathcal{E}/A})^I \arrow[l, shift left=1.5, "\mathrm{sup}"] \end{tikzcd}$$

interner Kategorien und Funktoren in $\mathcal{E}/A$ die sog. Beck-Chevalley-Bedingung

$$\sup \circ \chi^I = \chi \circ \sup,$$

d. h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(p^*X)^I \arrow[r, "\chi^I"] \arrow[d, "\sup"'] & (\Omega_{\mathcal{E}/A})^I \arrow[d, "\sup"] \\
p^*X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega_{\mathcal{E}/A}
\end{tikzcd}$$

*kommutiert. Dabei sind mit „*sup*“ jeweils die Supremumsoperationen und mit „χ“ der klassifizierende Morphismus des größten Elements $1 \to p^*X$ bezeichnet.*

(3) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\sup"'] & \mathcal{J}(\Omega_{\mathcal{E}}) \arrow[d, "\sup"] \\
X \arrow[r, "\chi"'] & \Omega_{\mathcal{E}}
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei bezeichnen die vertikalen Pfeile die Supremumsoperationen, der untere horizontale Morphismus χ klassifiziert den Monomorphismus $1 \xrightarrow{\top} X$ und der obere ist der von χ kanonisch induzierte.

Beweis. Statt in Definition 3.1 von gerichteten Mengen und monotonen Familien kann man auch von filtrierten Kategorien und Funktoren sprechen: Denn die von einer gerichteten Menge induzierte Kategorie ist filtriert und eine monotone Familie stiftet einen Funktor aus dieser Kategorie nach X; und umgekehrt ist die Objektmenge einer filtrierten Kategorie gerichtet und ein Funktor nach X induziert eine monotone Familie von Elementen von X.

Die Kompaktheitsbedingung (1) lautet dann

$$\mathcal{E} \models \forall I \text{ filtrierte Kategorie. } \forall F\colon I \to X \text{ Funktor. } \top = \sup_{i\,:\,I} F(i) \Rightarrow \exists i : I.\ \top = F(i);$$

die zusätzliche Flexibilität verschiedener paralleler Pfeile in den filtrierten Kategorien I wird nicht genutzt. Äquivalent ist die Aussage

$$\mathcal{E} \models \forall I \text{ filtrierte Kategorie. } \{F : X^I \mid \sup_{i\,:\,I} F(i) = \top\} = \{F : X^I \mid \exists i : I.\ F(t) = \top\},$$

wobei dabei „$\geq$“ trivial ist. Deren externe Bedeutung mit der Stacksemantik ist gerade Aussage (2). Ganz ähnlich ist Aussage (3) die Bedeutung von

$$\mathcal{E} \models \{U : \mathcal{J}(X) \mid \sup U = \top\} = \{U : \mathcal{J}(X) \mid \exists u \in U.\ u = \top\},$$

was nach Bem. 3.4 äquivalent zur Kompaktheitsbedingung (1) ist. □

3.2. Kompakte Topoi

Zu einem lokal-kleinen Topos $\mathcal{F}$ ist die Partialordnung $\mathrm{Sub}_{\mathcal{F}}(1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(1, \Omega_F)$ stets vollständig [16, Bsp. B2.3.8(a)] mit größtem Element $1 \hookrightarrow 1$ (bzw. $1 \xrightarrow{t} \Omega_{\mathcal{F}}$). Daher können wir definieren:

Definition 3.8 ([32, Kap. I.1])**.** Ein lokal-kleiner Topos $\mathcal{F}$ heißt genau dann *kompakt*, wenn seine lokalische Reflektion (siehe [16, Kap. A4.6]) es ist, wenn also $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(1, \Omega_{\mathcal{F}})$ eine kompakte Partialordnung ist.

Beispiel 3.9. (1) Set ist kompakt, denn $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(1, \Omega_{\mathrm{Set}}) \cong \mathcal{P}(1)$ und $\mathcal{P}(1)$ ist eine kompakte Partialordnung.

(2) Allgemeiner ist der Garbentopos $\mathrm{Sh}(X)$ eines topologischen Raums oder einer Locale X genau dann kompakt, wenn X kompakt ist, denn $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(1, \Omega_{\mathrm{Sh}(X)}) \cong \mathcal{O}(X)$.

(3) Lokale Topoi sind kompakt.

Die folgende Proposition buchstabiert die Definition auf verschiedene Arten und Weise aus. Diese unterscheiden sich hinsichtlich der zur Formulierung benötigten kategoriellen Konzepte und ihrer Anforderungen an den umgebenden logischen Kontext (etwa ob unbeschränkte Quantifikation nötig ist oder nicht); das wird im nächsten Abschnitt wichtig, in dem wir die Kompaktheitsdefinition in Topoi internalisieren möchten.

Proposition 3.10. *Für einen lokal-kleinen Topos $\mathcal{F}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathcal{F}$ ist kompakt.

(2) Für jede gerichtete Menge I und monotone Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Unterobjekten des terminalen Objekts $1 \in \mathcal{F}$ mit $1 = \bigvee_{i \in I} U_i$ gibt es ein $i \in I$ mit $1 = U_i$ (jeweils Gleichheiten von Unterobjekten).

(3) Für jede gerichtete Menge I und monotone Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Unterobjekten von $1 \in \mathcal{F}$ gilt

$$\gamma_*(\bigvee_{i \in I} U_i) = \bigvee_{i \in I} \gamma_*(U_i)$$

als Unterobjekte von $1 \in$ Set. Dabei ist γ der kanonische geometrische Morphismus $\mathcal{F} \to$ Set.

(4) Für jede kleine filtrierte Kategorie I und jeden Funktor $U \colon I \to \mathrm{Sub}_{\mathcal{F}}(1)$ gilt

$$\gamma_*(\bigvee_{i \in \mathrm{Ob}\, I} U(i)) = \bigvee_{i \in \mathrm{Ob}\, I} \gamma_*(U(i)),$$

d. h. das Quadrat

$$\begin{tikzcd}
\gamma_*\Omega_{\mathcal{F}} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "\chi"'] & (\gamma_*\Omega_{\mathcal{F}})^I \arrow[l, shift left] \arrow[d, "\chi^I"] \\
\Omega \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\top"] & \Omega^I \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

erfüllt die Beck-Chevalley-Bedingung. Dabei ist χ *die klassifizierende Abbildung der Teilmenge* $\{1 \overset{t}{\hookrightarrow} \Omega_{\mathcal{F}}\} \subseteq \gamma_*\Omega_{\mathcal{F}}$ *und* $\Omega = \mathcal{P}(1)$ *die externe Menge von Wahrheitswerten.*

(5) Für jede gerichtete Teilmenge $M \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathcal{F}}(1)$ *(also für alle* $M \in \mathcal{J}(\mathrm{Sub}_{\mathcal{F}}(1))$*) gilt*

$$\gamma_*(\bigvee_{U \in M} U) = \bigvee_{U \in M} \gamma_*(U).$$

Beweis. Aussage (2) ist direkt nach Definition 3.1 des Begriffs einer kompakten Partialordnung gleichbedeutend mit (1).

Für eine gerichtete Menge I und monotone Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Unterobjekten des terminalen Objekts $1 \in \mathcal{F}$ gilt die Ungleichung „$\geq$" in Aussage (3) stets, und „$\leq$" genau dann, wenn jeder globale Schnitt $1 \to \bigvee_i U_i$ über (jeweils) ein U_i faktorisiert. Das zeigt die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Dass die Aussagen (1), (4) und (5) zueinander äquivalent sind, ist ein Spezialfall von Proposition 3.7. Nach Lemma 1.16 müssen die dort auftretenden Scheibenkategorien nicht genutzt werden. □

Wie auch die Lokalität eines Topos kann man die Kompaktheit nicht in seiner internen Sprache charakterisieren, da Kompaktheit nicht von lokalem Charakter ist: Beispielsweise kann ein topologischer Raum eine Überdeckung durch offene kompakte Teilmengen zulassen, ohne selbst kompakt zu sein. Man muss sich mit der Charakterisierung durch eine Metaeigenschaft begnügen:

Proposition 3.11. *Ein lokal-kleiner Topos* $\mathcal{F}$ *ist genau dann kompakt, wenn für jede gerichtete Menge* I *und monotone Familie* $(\phi_i)_i$ *von (darstellbaren) Formeln über* $\mathcal{F}$*, d. h. jede Familie mit*

$$\mathcal{F} \models (\phi_i \Rightarrow \phi_j)$$

für alle $i \leq j$*, folgt:*

$$\mathcal{F} \models \bigvee_{i \in I} \phi_i \quad \Longrightarrow \quad \exists i \in I.\ \mathcal{F} \models \phi_i. \tag{3.1}$$

Beweis. Analog zu Proposition 2.18: Jede solche Familie induziert eine gerichtete Familie $([\![\phi_i]\!] \hookrightarrow 1)$ von Unterobjekten des terminalen Objekts, und umgekehrt definiert jede gerichtete Familie $(U_i \hookrightarrow 1)_i$ von Unterobjekten eine gerichtete Familie $(\star \in U_i)_i$ von darstellbaren Formeln über $\mathcal{F}$. Unter dieser Übersetzung geht die Bedingung (3.1) genau in Aussage (2) der vorherigen Proposition über. □

3.3. Eigentliche geometrische Morphismen

Mit den obigen Definitionen können wir formulieren, wann ein geometrischer Morphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ zwischen Topoi *eigentlich* heißen soll. Nach Abschnitt 1.2.2 induziert $\mathcal{F}$

nämlich eine lokal-interne Kategorie $\mathbb{F}$ über $\mathcal{E}$, und der Term $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(1, \Omega_{\mathbb{F}})$ der internen Sprache von $\mathcal{E}$ bezeichnet das Objekt $f_*[1, \Omega_{\mathcal{F}}]_{\mathcal{F}} \cong f_*\Omega_{\mathcal{F}} \in \mathcal{E}$. Dieses ist eine interne vollständige Partialordnung [16, Bsp. B2.3.8(a)], womit die Rahmenbedingungen von Definition 3.8 aus der internen Sicht von $\mathcal{E}$ erfüllt sind. Damit ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 3.12 ([32, Kap. I.1])**.** Ein geometrischer Morphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ heißt genau dann *eigentlich*, wenn

$$\mathcal{E} \models \ulcorner\mathbb{F} \text{ ist ein kompakter Topos}\urcorner,$$

d. h. wenn $\mathcal{E} \models \ulcorner\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(1, \Omega_{\mathbb{F}})$ ist eine kompakte Partialordnung$\urcorner$.

Zum Vergleich wollen wir dieser mit der Stacksemantik formal umgesetzten Definition die ursprüngliche, informale Definition im Wortlaut gegenüberstellen:

> **Definition.** A map $f \colon \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ is *proper* if it renders $\mathcal{F}$ compact as an $\mathcal{E}$-topos.

Zur Formalisierung sind also, nach den Vorarbeiten, nur minimale syntaktische Änderungen nötig.

Beispiel 3.13. (1) Der kanonische geometrische Morphismus $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ist eigentlich, denn der Beweis, dass Set kompakter Topos ist, war konstruktiv und lässt sich daher in der internen Sprache von $\mathcal{E}$ wiederholen. Dort bezieht er sich dann auf $\mathcal{E}$ statt auf die externe Kategorie von Mengen.

(2) Der von einer stetigen Abbildung $Y \xrightarrow{f} X$ zwischen Locales induzierte geometrische Morphismus $\mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ ist genau dann eigentlich, wenn die Internalisierung von Y in $\mathrm{Sh}(X)$ (das ist die interne Locale $f_*\Omega_{\mathrm{Sh}(Y)} \in \mathrm{Sh}(X)$ [16, Kap. C1.6]) kompakt ist. Diese Bedingung ist eine der möglichen Definitionen eines Eigentlichkeitsbegriffs für Locales [42].

Eine weitere Beispielklasse liefert folgende Proposition:

Proposition 3.14. *(1) Sei A ein Objekt eines Topos $\mathcal{E}$. Dann ist der kanonische geometrische Morphismus $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}$ genau dann eigentlich, wenn A ein kuratowskiendliches Objekt von $\mathcal{E}$ ist.*

(2) Der von einem Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ induzierte geometrische Morphismus $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/B$ ist genau dann eigentlich, wenn in der internen Sprache von $\mathcal{E}$ die Fasern von f jeweils kuratowskiendlich sind.

Beweis. (1) Im Beweis von Proposition 2.13 haben wir gesehen, dass das direkte Bild von $\Omega_{\mathcal{E}/A}$ unter dem geometrischen Morphismus $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}$ isomorph zum Potenzobjekt $\mathcal{P}(A)$ ist; es ist $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}$ genau dann eigentlich, wenn dieses kompakt ist. Nach Lemma 3.6 ist das genau dann der Fall, wenn A kuratowskiendlich ist.

(2) Das folgt ganz analog wie bei Proposition 2.13(2). □

Folgende Proposition ist mit dem Zugang durch die Stacksemantik völlig trivial:

Proposition 3.15. *Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ ein geometrischer Morphismus. Dann gilt:*

(1) Ist f eigentlich und A ein Objekt in $\mathcal{E}$, so ist auch $\mathcal{F}/f^*A \xrightarrow{f/A} \mathcal{E}$ eigentlich.

(2) Ist $A \twoheadrightarrow 1$ ein Epimorphismus in $\mathcal{E}$ und f/A eigentlich, so ist auch f eigentlich.

Beweis. Die erste Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz der Monotonie der Stacksemantik, die zweite eine des lokalen Charakters (Lemma 1.11). □

Entsprechend den verschiedenen Ausdrucksmöglichkeiten von Kompaktheit (Proposition 3.10) lässt sich auch Eigentlichkeit auf verschiedene Arten ohne Verwendung der internen Sprache formulieren:

Proposition 3.16 ([32, Kap. I.1])**.** *Für einen geometrischen Morphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ sind äquivalent:*

(1) f ist eigentlich.

(2) Für jedes Objekt $A \in \mathcal{E}$ und jede filtrierte interne Kategorie in $\mathcal{E}/A$ erfüllt das Quadrat

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}/f^*A \arrow[r, "\infty"] \arrow[d, "f/A"'] & (\mathcal{F}/f^*A)^{f^*I} \arrow[d, "(f/A)^I"] \\ \mathcal{E}/A \arrow[r, "\infty"'] & (\mathcal{E}/A)^I \end{tikzcd}$$

die Beck-Chevalley-Bedingung

$$\infty^*((f/A)^I)_*(Y) = (f/A)_*\infty^*(V) \in \mathrm{Sub}_{\mathcal{E}/A}(1)$$

für alle Unterobjekte $V \hookrightarrow 1$ in $(\mathcal{F}/f^*A)^{f^*I}$. Der rechtsadjungierte Teil der horizontalen Morphismen ist jeweils die Einbettung als konstante Diagramme, der linksadjungierte Teil nimmt Kolimiten.

(3) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{J}(f_*\Omega_{\mathcal{F}}) \arrow[r, "\mathcal{J}(f_*)"] \arrow[d, "\sup"'] & \mathcal{J}(\Omega_{\mathcal{E}}) \arrow[d, "\sup"] \\ f_*\Omega_{\mathcal{F}} \arrow[r, "f_*"'] & \Omega_{\mathcal{E}} \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Dabei klassifiziert der Morphismus in der unteren Zeile das kanonische Unterobjekt $1 \cong f_*1 \overset{f_*t}{\hookrightarrow} f_*\Omega_{\mathcal{F}}$ und die beiden vertikalen Pfeile bilden die Supremumsoperationen ab.

Beweis. Klar nach Proposition 3.7 und Korollar 1.37. □

3.4. Separierte Topoi und Morphismen

Definition 3.17. (1) Ein Grothendiecktopos $\mathcal{F}$ heißt genau dann *separiert*, wenn der kanonische geometrische Morphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ eigentlich ist.

(2) Ein geometrischer Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ von Grothendiecktopoi heißt genau dann *separiert*, wenn $\mathcal{F} \to \mathcal{F} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{F}$ eigentlich ist.

Beispiel 3.18. Der Garbentopos $\mathrm{Sh}(X)$ einer Locale ist genau dann separiert, wenn $\mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(X \times X)$ eigentlich ist, also wenn die Diagonale $X \to X \times X$ eigentlich ist. Das ist auch genau die Definition einer Hausdorfflocale.

Bemerkung 3.19. (1) Wir schränken uns an dieser Stelle auf Grothendiecktopoi ein, um sichergehen zu können, dass die genannten Produkttopoi existieren.

(2) Es ist wie auch bei Lokalität und Kompaktheit nicht möglich, die Separiertheit eines Topos in seiner internen Sprache festzustellen, da Separiertheit nicht von lokalem Charakter ist: Eine Locale kann eine Überdeckung durch offene hausdorffsche Unterlocales zulassen, ohne selbst hausdorffsch zu sein.

Proposition 3.20. *(1) Der kanonische geometrische Morphismus $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}$ ist genau dann separiert, wenn A ein diskretes Objekt von $\mathcal{E}$ ist, d. h. wenn*

$$\mathcal{E} \models \forall x, y : A.\ x = y \vee x \neq y.$$

(2) Der von einem Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ induzierte geometrische Morphismus $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/B$ ist genau dann separiert, wenn aus Sicht der internen Sprache von $\mathcal{E}$ die Fasern von f jeweils diskret sind.

Beweis. (1) Nach Proposition 3.14 ist $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/A \times_{\mathcal{E}} \mathcal{E}/A \simeq \mathcal{E}/(A \times A)$ genau dann eigentlich, wenn aus interner Sicht die Fasern von $A \xrightarrow{\Delta} A \times A$ jeweils kuratowskiendlich sind. Zu $(x, y) : A \times A$ ist die Faser $\Delta^{-1}[(x, y)]$ als Subsingleton genau dann kuratowskiendlich, wenn sie leer oder bewohnt ist; das ist genau dann der Fall, wenn $x \neq y$ bzw. $x = y$.

(2) Analog wie bei Proposition 2.13(2). □

3.5. Eigenschaften eigentlicher Morphismen

Im Folgenden demonstrieren wir, wie man einige grundlegende Eigenschaften geometrischer Morphismen in der internen Sprache zeigen kann. Dabei wird an einer Stelle das Idempotenzlemma 1.20 wichtig sein.

Proposition 3.21. *(1) Kompakte Locales haben die Frobeniusreziprozitätseigenschaft.*

(2) Eigentliche geometrische Morphismen sind abgeschlossen.

Beweis. (1) Sei X eine Locale, deren Rahmen $\mathcal{O}(X)$ kompakt ist. Sei $u \in \mathcal{O}(X)$ und $v \subseteq 1$ beliebig. Mit der expliziten Beschreibung der eindeutigen Abbildung $X \xrightarrow{!} 1$ im Beweis von Proposition 2.12 sieht man, dass die für $u \in \mathcal{O}(X)$, $v \subseteq 1$ zu zeigende Gleichheit

$$!_*(u \vee !^*v) = !_*u \vee v$$

von Teilmengen von 1 äquivalent zur Implikation

$$u \vee !^*v = \top \quad \Leftrightarrow \quad !_*u \cup v = \{\star\}$$

ist, deren „$\Leftarrow$"-Richtung trivialerweise gilt.

Um die Hinrichtung zu zeigen, gelte also $u \vee !^*v = \top$. Die linke Seite lässt sich auch als gerichteten Join schreiben, denn

$$u \vee !^*v = \sup\Big(\{u\} \cup \{\top \mid \star \in v\}\Big);$$

die Familie, über die das Supremum genommen wird, wird indiziert durch die gerichtete Menge $I := \{\bullet\} \amalg v$, wobei $\bullet$ ein neues Symbol sei und die Ordnung so definiert wird, dass $\bullet \leq x$ für alle $x \in v$.

Da nach Voraussetzung $\mathcal{O}(X)$ kompakt ist, gibt es einen Index i aus I, sodass schon das zugehörige Element der Familie gleich $\top$ ist. Ist $i = \bullet$, folgt also $u = \top$ und somit $!_*u = \{\star\}$; ist $i \in v$, folgt $\star \in v$. In beiden Fällen folgt die Behauptung, und die Fallunterscheidung war konstruktiv zulässig.

(2) Sei $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ ein eigentlicher geometrischer Morphismus. Dann ist nach Definition die interne Locale $f_*\Omega_{\mathbb{F}} \in \mathcal{E}$ kompakt und hat, da der Beweis des ersten Teils konstruktiv und in der internen Sprache von $\mathcal{E}$ interpretierbar ist, die Frobeniusreziprozitätseigenschaft. Nach Proposition 2.12 ist das gleichbedeutend mit der Abgeschlossenheit von f. □

Proposition 3.22. *Seien $\mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ geometrische Morphismen.*

(1) Sind g und f eigentlich, so auch $f \circ g$.

(2) Ist g surjektiv und $f \circ g$ eigentlich, so ist auch f eigentlich.

Beweis. (1) Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{F} \models \ulcorner\mathbb{G}$ kompakt$\urcorner$ und $\mathcal{E} \models \ulcorner\mathbb{F}$ kompakt$\urcorner$. Nach dem Idempotenzlemma 1.20 folgt also $\mathcal{E} \models \ulcorner\mathcal{F} \models \ulcorner\mathbb{G}$ kompakt$\urcorner\urcorner$; es genügt somit, in der internen Sprache von $\mathcal{E}$ folgende Implikation zu beweisen: Ist $\mathbb{G} \xrightarrow{g} \mathbb{F}$ eigentlich und $\mathbb{F}$ kompakt, so ist auch $\mathbb{G}$ kompakt.

Sei also eine gerichtete Familie $(U_i)_i$ von Unterobjekten von $1 \in \mathbb{G}$ mit $1 = \bigvee_i U_i$ gegeben. Da $\mathbb{G} \xrightarrow{g} \mathbb{F}$ eigentlich ist, folgt

$$1 = g_*\Big(\bigvee_i U_i\Big) = \bigvee_i g_*(U_i) \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{F}}(1).$$

Da $\mathbb{F}$ kompakt ist, folgt $g_*(U_i) = 1$ für einen Index i. Somit gilt auch $U_i = 1 \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{G}}(1)$.

(2) Aus Sicht der internen Sprache von $\mathcal{E}$ ist $\mathbb{G}$ ein kompakter Topos und $\mathbb{F} \xrightarrow{g^*} \mathbb{G}$ nach Proposition 2.1 treu. Wir müssen zeigen, dass dann auch $\mathbb{F}$ ein kompakter Topos ist. Sei also eine gerichtete Familie $(U_i)_i$ von Unterobjekten von $1 \in \mathbb{F}$ mit $1 = \bigvee_i U_i$ gegeben. Dann folgt

$$1 = g^*(1) = g^*\Big(\bigvee_i U_i\Big) = \bigvee_i g^*(U_i) \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{G}}(1)$$

und somit $g^*(U_i) = 1$ für einen Index i, da $\mathbb{G}$ kompakt ist. Da g^* treu ist, folgt $U_i = 1 \in \mathrm{Sub}_{\mathbb{F}}(1)$. □

Ein für das Verständnis eigentlicher geometrischer Morphismen grundlegendes Faktum blieb bisher unerwähnt: Die eigentlichen Morphismen sind genau die, die universell, also nach beliebigen Basiswechseln, abgeschlossen sind. Das kann man dadurch beweisen, indem man die Siten charakterisiert, deren Garbentopoi kompakt sind [32, Kap. I.6]. Wir wollen diesen Sachverhalt nur an einem einfachen Beispiel illustrieren:

Proposition 3.23. *Sei das folgende linke Faserproduktdiagramm in einem Topos $\mathcal{E}$ gegeben. Dann gilt für das induzierte Faserproduktdiagramm auf der rechten Seite: Ist $\mathcal{E}/A \to \mathcal{E}/B$ eigentlich, so auch $\mathcal{E}/A' \to \mathcal{E}/B'$.*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B' \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E}/A' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}/A \arrow[d] \\ \mathcal{E}/B' \arrow[r] & \mathcal{E}/B \end{tikzcd}$$

Beweis. Wir müssen in der internen Sprache zeigen, dass die Fasern $f'^{-1}[\{b'\}]$ für $b' : B'$ jeweils kuratowskiendlich sind. Das ist klar, denn diese sind jeweils gleich $f^{-1}[\{g(b')\}]$ und f hat nach Voraussetzung kuratowskiendliche Fasern. □

4. Konzepte in algebraischer Geometrie

In diesem Kapitel wollen wir versuchen, einige Konzepte der algebraischen Geometrie intern zu verstehen. Konkret wollen wir Eigenschaften von Schemata, Schemamorphismen und Modulgarben durch Aussagen einer geeigneten internen Sprache charakterisieren und (Standard-)Resultate als externe Interpretation bekannter (konstruktiv beweisbarer) algebraischer Sätze begreifen.

Etwa ist ein Schema genau dann reduziert, wenn aus einer geeigneten internen Sicht die Strukturgarbe (die dann nicht wie eine Ringgarbe, sondern wie ein gewöhnlicher Ring aussieht) ein reduzierter Ring ist; und die Aussage, dass in einer kurzen exakten Sequenz von Modulgarben der mittlere Modul schon von endlichem Typ ist, wenn es die beiden außen stehenden sind, ist ein unmittelbares Korollar des analogen rein algebraischen Resultats über gewöhnliche Moduln.

Dass ein solches Vorgehen prinzipiell plausibel ist, erkennt man schon daran, dass viele Definitionen und Sätze sich auf lokalisierte Situationen auf Spektren oder Halmen berufen und dann lokal bekannte Definitionen und Sätze der Algebra zitieren. Folgendes wörtliches Zitat aus [40, Lemma 01B7] soll diesen Umstand illustrieren:

> **Lemma.** Let X be a ringed space. The image of a morphism of $\mathcal{O}_X$-modules of finite type is of finite type. Let $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ be a short exact sequence of $\mathcal{O}_X$-modules. If $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_3$ are of finite type, so is $\mathcal{F}_2$.
>
> *Proof.* The statement on images is trivial. The statement on short exact sequences comes from the fact that sections of $\mathcal{F}_3$ locally lift to sections of $\mathcal{F}_2$ and the corresponding result in the category of modules over a ring (applied to the stalks for example).

Ein formaler Zugang mit einer internen Sprache hat dann den Vorteil, dass die Reduktion auf eine rein algebraische Situation und anschließende Übertragung auf die Schemasicht nicht jedes Mal ad hoc durch die Leser durchgeführt werden müssen, sondern stattdessen abstrakt im Werkzeug der Sprachinterpretation gekapselt werden können und dann nur einmal die Übereinstimmung mit der erwarteten externen Bedeutung bewiesen werden muss.

Grundsätzlich können nur solche Konzepte intern verstanden werden, die *lokalen Charakter* haben. Beispielsweise kann es keine Aussage ϕ geben, sodass für alle Schemata S die Äquivalenz

$$S \models \phi \quad \Longleftrightarrow \quad S \text{ ist affin}$$

gilt, wobei „$S \models \phi$“ die Gültigkeit von ϕ in einem noch nicht näher bezeichneten Topos, der direkt mit S zusammenhängt, bezeichnen soll. Denn die Aussage $S \models \phi$ hätte, wie jede Interpretation einer internen Aussage, auf jeden Fall lokalen Charakter, d. h. wäre $S = \bigcup_i S_i$ eine Überdeckung (in einem noch unspezifierten Sinn) und gälte auf allen S_i die Aussage ϕ, so gälte sie auch auf S. Da zwar nach Definition jedes Schema lokal affin, aber natürlich nicht unbedingt global affin ist, wäre das ein Widerspruch.

Man kann aber erwarten, das Konzept des affinen Schemamorphismus $X \to S$ mit einem Topos, der zu dem Basisschema S gehört, intern verstehen zu können.

Konzepte, die größtenteils rein algebraischer Natur sind, wie beispielsweise die Eigenschaften von Modulgarben, von endlichem Typ oder endlicher Präsentation zu sein, lassen sich sehr einfach intern begreifen – wenn man mit dem Sprachapparat vertraut ist, sind es Routineaufgaben, die internen Definitionen anzugeben und die Äquivalenz mit der erwarteten Bedeutung zu beweisen.

Schwieriger sind Konzepte, in die beliebige Mengen unbeschränkter Größe einfließen können (wie etwa beim Quasikohärenzbegriff von Modulgarben) oder die teilweise topologischer Natur sind (wie etwa die Begriffe offener und abgeschlossener Immersionen).

Idealerweise sollte eine umfassende Referenz zur algebraischen Geometrie systematisch auf ihre Internalisierbarkeit untersucht werden; das wurde hier nicht versucht. Verwandt ist die Frage nach der *Rigidität* der Kategorie der Schemata, also die Frage, ob jede Äquivalenz $\mathrm{Sch} \to \mathrm{Sch}$ isomorph zum Identitätsfunktor ist, denn das hängt damit zusammen, inwieweit man die Objekte von Sch (bis auf Isomorphie) rein kategoriell identifizieren kann [28, Abschn. 1.1].

Im Folgenden akzeptieren wir in unserer Metalogik auch klassische Argumente, um die übliche Schematheorie zur Verfügung zu haben. Um mengentheoretische Probleme im Zusammenhang mit zu großen Siten auszuschließen, fixieren wir eine kleine Kategorie Sch von Schemata und bezeichnen im Folgenden mit „Schema“ auch nur Objekte aus dieser Kategorie. Es ist nicht ganz einfach, eine solche Kategorie zu erhalten, siehe etwa [40, Lemma 000J]. Unsere primäre Referenz für Siten in algebraischer Geometrie ist [40].

4.1. Relevante Topoi

Sei S ein Schema. Dann gibt es zwei für unsere Zwecke wichtige Topoi, den kleinen und großen Zariskitopos zu S.

Definition 4.1. (1) Der *kleine Zariskitopos* $\mathrm{Sh}(S)$ zu S ist der Topos der Garben auf dem S zugrundeliegenden topologischen Raum.

(2) Der *große Zariskitopos* $\mathrm{Zar}(S)$ ist der Grothendiecktopos zum *großen Zariskisitus*, der Scheibenkategorie Sch/S. Eine Überdeckung eines S-Schemas X ist eine Familie
$$(U_i \hookrightarrow X)_i$$
von offenen Immersionen, deren mengentheoretische Bilder X überdecken.

Der Yonedafunktor $\mathrm{Sch}/S \to \mathrm{Zar}(S), X \mapsto \underline{X} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/S}(\_, X)$ ist volltreu, daher kann man sich den großen Zariskitopos als geeignete Vervollständigung der Kategorie der S-Schemata zu einem Topos vorstellen. Für den kleinen Zariskitopos gilt das nicht.

Ist S affin, so kann man den kleinen Zariskitopos zu S äquivalent auch als Topos der Garben auf dem kleineren Situs der standardoffenen Teilmengen von S definieren – das folgt aus einem allgemeinen Lemma über Grothendiecktopoi (siehe etwa [40, Lemma 03A0]) und den wesentlichen Tatsachen, dass jede offene Teilmenge eine Überdeckung durch standardoffene zulässt und endliche Schnitte standardoffener Mengen wieder standardoffen sind.

Ferner kann man sich auch in der Definition des großen Zariskitopos auf affine Schemata über S und Standardzariskiüberdeckungen beschränken; das sind solche der Form

$$(\operatorname{Spec} R[f_i^{-1}] \longhookrightarrow \operatorname{Spec} R)_{i=1,\ldots,n},$$

sodass die $f_i \in R$ eine Zerlegung der Eins bilden, d. h. sodass $\sum_i f_i = 1$ gilt.

Der kleine Zariskitopos eines Schemas S, dessen zugrundeliegender topologischer Raum aus genau einem Punkt besteht (wie etwa bei Spektren von Körpern der Fall), ist vermöge des kanonischen geometrischen Morphismus $\mathrm{Sh}(S) \to \mathrm{Set}$ äquivalent zum Topos Set. Insbesondere ist nach Proposition 1.16 die interne Sprache eines solchen Zariskitopos äquivalent zur gewöhnlichen externen Sprache.

Bemerkung 4.2. Man kann die Scheibenkategorie Sch/S auch mit feineren Topologien versehen. Etwa wird die étale Topologie erzeugt von Überdeckungen der Form $(U_i \xrightarrow{p_i} X)_i$, wobei die p_i étale Morphismen sind und ihre mengentheoretischen Bilder gemeinsam X überdecken. (Étale Morphismen sind genau dann Monomorphismen, wenn sie offene Immersionen sind.) Der so erhaltene étale Situs ist immer noch subkanonisch.

Halmweise Tests

Allgemein kann man die Gültigkeit von Aussagen, die in dem geometrischen Fragment der internen Sprache des kleinen Zariskitopos formuliert sind, halmweise testen: Ist $\forall a : A.\ (\phi \Rightarrow \psi)$ eine geometrische Implikation, so gilt genau dann die Kripke-Joyal-Übersetzung von $\mathrm{Sh}(X) \models \forall a : A.\ (\phi \Rightarrow \psi)$, wenn

$$\mathrm{Set} \models \forall a : A_x.\ \phi_x \Rightarrow \psi_x$$

für alle $x \in X$. Der Index am Quantifikationsbereich und den Formeln soll andeuten, dass diese mit dem von der stetigen Abbildung $1 \hookrightarrow X, \star \mapsto x$ induzierten geometrischen Morphismus

$$\mathrm{Set} \simeq \mathrm{Sh}(1) \longrightarrow \mathrm{Sh}(S)$$

zurückgezogen wurden; für Details siehe [16, Kor. D1.2.14(ii)].

Zusammenhang zwischen kleinen und großen Zariskitopoi

Ist $T \xrightarrow{f} S$ ein S-Schema, so gibt es einen kanonischen geometrischen Morphismus $\mathrm{Sh}(T) \xrightarrow{f_{\mathrm{klgr}}} \mathrm{Zar}(S)$ mit

$$\begin{aligned} f^*_{\mathrm{klgr}}\colon\ \mathrm{Zar}(S) &\longrightarrow \mathrm{Sh}(T) \\ F &\longmapsto F|_{\mathrm{Sh}(T)} = (U \subseteq T \mapsto F(U/S)). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Folgende Proposition ist nützlich, um eine Situation am großen Zariskitopos $\mathrm{Zar}(S)$ mithilfe aller kleinen Zariskitopoi $\mathrm{Sh}(T)$ zu untersuchen:

Proposition 4.3. *Die Familie aller Funktoren f^*_{klgr}, $T \xrightarrow{f} S$, ist gemeinsam konservativ.*

Beweis. Ist $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Zar}(S)}(F, G)$, so gilt für alle S-Schemata $T \xrightarrow{f} S$: $\alpha_{T/S} = f^*_{\mathrm{klgr}}(\alpha)_{T \subseteq T}$. Daher ist die Behauptung klar. □

4.1.1. Wichtige Objekte und Morphismen in den Zariskitopoi

Definition 4.4 ([33, Abschn. 5], [15])**.** (1) Ein Ring R heißt genau dann *nichttrivial*, wenn $1 \neq 0$ in R, d. h. wenn die Aussage $1 = 0 : R$ falsch ist. Ein nichttrivialer Ring R heißt…

$$\begin{array}{lll} \ldots\,\textit{lokal} & \iff \forall x, y : R. & x + y = 1 \;\Rightarrow\; x \text{ invertierbar} \vee y \text{ invertierbar}. \\ \ldots\,\textit{Körper von Brüchen} & \iff \forall x : R. & x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \text{ invertierbar}. \\ \ldots\,\textit{geometrischer Körper} & \iff \forall x : R. & x = 0 \;\vee\; x \text{ invertierbar}. \end{array}$$

(2) Ein Ringhomomorphismus $R \xrightarrow{\varphi} S$ heißt genau dann *lokal*, wenn

$$\forall x : R.\ \ \varphi(x) \text{ invertierbar} \implies x \text{ invertierbar}.$$

Intuitionistisch gelten unter den drei Begriffen genau die Implikationen

$$\begin{tikzcd} \text{geometrischer Körper} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow, bend right] & \text{Körper von Brüchen} & \text{lokaler Ring}, \end{tikzcd}$$

dazu werden wir Beispiele sehen. Klassisch gibt es noch verschiedene andere Charakterisierungen lokaler Ringe, etwa als solche, die genau ein maximales Ideal enthalten. Diese eignen sich in unserem Kontext aus zwei Gründen nicht als Definitionen: Zum einen sind sie nicht geometrisch formuliert, daher ist es schwieriger zu entscheiden, ob sie in Garbentopoi zu topologischen Räumen erfüllt sind, da man sich nicht auf eine Betrachtung der Halme beschränken darf. Zum anderen lassen sich mit solchen Definitionen auch schlecht intuitionistisch zulässige Beweise führen [30].

Der lokale Ring $\mathcal{O}_S$

Der kleine Zariskitopos zu S enthält das Ringobjekt $\mathcal{O}_S$. Dieses ist aus interner Sicht ein lokaler Ring, denn da die Eigenschaft, ein lokaler Ring zu sein, geometrisch ist, lässt sie sich halmweise prüfen; und nach Definition sind die Ringe $\mathcal{O}_{S,s}$ für alle $s \in S$ jeweils lokale Ringe.

Der lokale Ringhomomorphismus $f^{-1}\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_X$

Das Datum eines Schemamorphismus $X \xrightarrow{f} S$ umfasst einen internen Ringhomomorphismus $f^*\mathcal{O}_S \xrightarrow{f^\sharp} \mathcal{O}_X$. Dieser ist aus der Sicht von $\mathrm{Sh}(X)$ lokal, da für alle $x \in X$ die Ringhomomorphismen $(f^{-1}\mathcal{O}_S)_x \cong \mathcal{O}_{S,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ lokal sind und Lokalität von Ringhomomorphismen eine geometrische Bedingung ist. Die von einer klassischen Erwartungshaltung als äquivalent eingeschätzte Bedingung

$$f^\sharp(m_{f^{-1}\mathcal{O}_S}) \subseteq m_{\mathcal{O}_X},$$

wobei $m_A = A \setminus A^\times$ jeweils das Ideal der Nichteinheiten bezeichnet, ist in der internen Sprache ebenfalls erfüllt, aber echt schwächer: Ausgeschrieben bedeutet sie lediglich

$$\mathrm{Sh}(X) \models \forall x \colon f^{-1}\mathcal{O}_S.\, \ulcorner x \text{ nicht invertierbar}\urcorner \Rightarrow \ulcorner f^\sharp(x) \text{ nicht invertierbar}\urcorner.$$

Bemerkung 4.5. Der unter der Adjunktion $f^{-1} \dashv f_*$ transponierte Ringmorphismus $\mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_X$ ist im Allgemeinen nicht lokal, wie das einfache Beispiel $S = \operatorname{Spec} k$, $X = \operatorname{Spec} 0$ (Nullring), k ein Körper, zeigt: Da dann $\mathrm{Sh}(S) \simeq \mathrm{Set}$, lässt sich die Lokalität von $\mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_X$ auf globalen Schnitten testen, und $k \to 0$ ist nicht lokal. Das Beispiel zeigt auch, dass $f_*\mathcal{O}_X$ im Allgemeinen nicht lokal ist.

Die Garbe $\underline{X}$

Ist X ein S-Schema, so ist die Prägarbe

$$\underline{X} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/S}(\_, X)$$

sogar eine Garbe auf dem großen Zariskisitus Sch/S – diese Erkenntnis ist grundlegend für die Punktefunktorsicht auf Schemata. Aus interner Sicht des Zariskitopos $\mathrm{Zar}(S)$ können wir uns diese als die Menge der Punkte von X vorstellen. So passt es beispielsweise gut ins Bild, dass die Garbe $\underline{S}$ ein terminales Objekt in $\mathrm{Zar}(S)$ ist, also aus interner Sicht eine einpunktige Menge ist. Wir werden auch noch weitere Beispiele sehen, die diese Auffassung stützen.

Ist X sogar ein Gruppenschema, so ist $\underline{X}$ ein Gruppenobjekt in $\mathrm{Zar}(S)$, also aus interner Sicht eine gewöhnliche Gruppe. Die beim Studium von Gruppenschemata anfangs vielleicht ungewohnte Tatsache, dass (anders als etwa bei topologischen Gruppen) die

Punkte des zugrundeliegenden topologischen Raums eines Gruppenschemas selbst keine Gruppe bilden, verschwindet also bei interner Betrachtung.

Ein spezielles Gruppenschema ist die affine Gerade $\mathbb{A}^1_S := S \times \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t]$ über S, welche sogar ein Ringschema ist. Der zugehörige Punktefunktor ordnet jedem S-Schema die zugrundeliegende Menge des Rings globaler Schnitte zu, denn

$$\underline{\mathbb{A}}^1_S(U) = \operatorname{Hom}_S(U, \mathbb{A}^1_S) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(U, \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t]) \cong \mathcal{O}_U(U).$$

Aus interner Sicht können wir uns $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ als einen Grundring von Zahlen vorstellen. Tatsächlich ist $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ ein lokaler Ring, und in einem gewissen Sinn sogar ein Körper:

Proposition 4.6. *(1) Der Ring $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ ist lokal.*

(2) Der Ring $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ ist ein Körper von Brüchen. Im Fall $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ stammt diese Beobachtung von A. Kock [21].

(3) Der Ring $\mathcal{O}_S$ in $\operatorname{Sh}(S)$ ist im Allgemeinen kein Körper von Brüchen.

Beweis. (1) Nach der Kripke-Joyal-Semantik bedeutet die interne Aussage $0 \neq 1 : \underline{\mathbb{A}}^1_S$, dass für alle S-Schemata X gilt:

$$0 = 1 \in \underline{\mathbb{A}}^1_S(X) = \mathcal{O}_X(X) \quad \Longrightarrow \quad X = \emptyset \text{ (initiales Schema).}$$

Das ist offensichtlich erfüllt, denn zu einem solchen Schema bildet der kanonische Morphismus $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$ in den leeren Raum ab, womit auch schon der X zugrundeliegende topologische Raum leer sein muss.

Das Lokalitätsaxiom besagt übersetzt, dass für jedes S-Schema X und je zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $f + g = 1$ eine offene Überdeckung von X existiert, sodass auf den Überdeckungsmengen U jeweils $f|_U$ oder $g|_U$ invertierbar sind. Das kann man abstrakt einsehen (denn $\mathcal{O}_X$ ist ein lokaler Ring in $\operatorname{Sh}(X)$) oder sich auch ganz explizit klarmachen: Ein solches Schema X lässt sich durch die offenen Teilmengen $X_f := \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ invertierbar}\}$ und X_g (analog definiert) überdecken, und auf diesen ist f bzw. g invertierbar.

(2) Das Nichttrivialitätsaxiom haben wir schon in (1) bewiesen, nach der Kripke-Joyal-Übersetzung müssen wir also nur noch folgende Aussage zeigen:

Ist X ein S-Schema und $f \in \mathcal{O}_X(X)$ eine Funktion, so folgt aus der Eigenschaft

$$\text{für alle } X\text{-Schemata } Y\colon\; f = 0 \in \mathcal{O}_Y(Y) \Longrightarrow Y = \emptyset, \tag{4.2}$$

dass f invertierbar ist.

Dabei können wir wegen des lokalen Charakters der Kripke-Joyal-Semantik ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass $X = \operatorname{Spec} A$ affin ist. Wir verwenden Eigenschaft (4.2) speziell für das Schema $Y := \operatorname{Spec} A/(f)$. Die Einschränkung von f auf Y ist null, also folgt $Y = \emptyset$ und damit $A/(f) = 0$. Also gilt $1 \in (f)$ und f ist invertierbar.

(3) Die Körperbedingung in $\mathrm{Sh}(S)$ lautet:

> Ist $U \subseteq S$ eine offene Teilmenge und $f \in \mathcal{O}_S(U)$ eine Funktion, so folgt aus der Eigenschaft
> $$\text{für alle } s \in U\colon \;\; f_s \neq 0 \in \mathcal{O}_{S,s},$$
> dass f invertierbar ist.

Diese ist im Allgemeinen nicht erfüllt, ein einfaches Gegenbeispiel ist $S = U = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ und f jede von null und ± 1 verschiedene ganze Zahl. □

Bemerkung 4.7. (1) Der Ring $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ ist im Allgemeinen kein geometrischer Körper, speziell für $S = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ ist nämlich $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ der universelle lokale Ring (siehe [26, Kap. VIII.6], [14]), und da diese Körperbedingung geometrisch ist, wäre daher überhaupt jeder lokale Ring ein Körper in diesem Sinn. Das ist aber nicht der Fall. Genauer können wir zeigen: Dieses Axiom ist genau im trivialen Fall $S = \emptyset$ erfüllt. Das folgt über die Charakterisierung der Reduziertheit von $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ in Proposition 4.23(2).

(2) Intuitionistisch ist es leicht, lineare Algebra über einem geometrischen Körper zu betreiben. Über einem Körper von Brüchen funktioniert vieles nicht, da man etwa bei Matrixalgorithmen keine Fallunterscheidungen danach treffen kann, ob ein untersuchtes Element null oder nicht null ist. Siehe aber [36] für einen Beweis, dass in einer solchen Situation trotzdem eine geeignet formulierte cramersche Regel gilt.

(3) Die Aussagen der Proposition über $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ gelten auch bezüglich jeder feineren subkanonischen Topologie.

Proposition 4.8. *Ist $T \xrightarrow{f} S$ ein S-Schema, so ist das inverse Bild von $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ unter dem in* (4.1) *definierten geometrischen Morphismus* $\mathrm{Sh}(T) \xrightarrow{f_{klgr}} \mathrm{Zar}(S)$ *die Strukturgarbe $\mathcal{O}_T$.*

Beweis. Klar. □

Bemerkung 4.9. Nach Proposition 4.3 ist die Familie aller Funktoren f^*_{klgr} gemeinsam konservativ. Daher gelten geometrisch formulierte Implikationen genau dann in $\mathrm{Zar}(S)$, wenn sie in allen $\mathrm{Sh}(T)$ gelten. Da die Eigenschaft eines Rings, lokal zu sein, eine geometrische Bedingung ist, hätten wir uns daher entweder den Beweis, dass die Strukturgarbe im kleinen Zariskitopos, oder den Beweis, dass $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ im großen Zariskitopos ein lokaler Ring ist, sparen können. Da die Eigenschaft, ein Körper von Brüchen zu sein, nicht geometrisch ist, vertragen sich die Teilaussagen (2) und (3) von Proposition 4.6.

Die Punktefunktoren einiger anderer wichtiger Gruppenschemata lassen sich intern definieren, wenn man $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ bereits voraussetzt, siehe Tafel 4.1. Eine solche interne Definition zeigt aber natürlich nicht, dass die zugehörigen Punktefunktoren auch tatsächlich durch Schemata repräsentierbar sind.

Bezeichnung	interne Definition	Funktor: $X/S \mapsto \cdots$
$\mathbb{G}_\mathrm{a}$	$\underline{\mathbb{A}}^1_S$ (als additive Gruppe)	$\mathcal{O}_X(X)$
$\mathbb{G}_\mathrm{m}$	$\{x : \underline{\mathbb{A}}^1_S \mid x \text{ invertierbar}\}$	$\mathcal{O}_X(X)^\times$
GL_n	$\{M : (\underline{\mathbb{A}}^1_S)^{n\times n} \mid M \text{ invertierbar}\}$	$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_X(X))$
μ_n	$\{x : \underline{\mathbb{A}}^1_S \mid x^n = 1\}$	$\{f \in \mathcal{O}_X(X) \mid f^n = 1\}$

Tafel 4.1.: Definitionen einiger Gruppenschemata in der internen Sprache von $\mathrm{Zar}(S)$.

Die Garbe $[\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S]$

Sei $X \xrightarrow{f} S$ ein S-Schema. Dann induziert der Rückzug von S- zu X-Schemata einen geometrischen Morphismus $\mathrm{Zar}(X) \xrightarrow{f_\text{groß}} \mathrm{Zar}(S)$:

$$\begin{aligned} f^*_\text{groß}\colon \quad \mathrm{Zar}(S) &\longrightarrow \mathrm{Zar}(X) \\ F &\longmapsto (T/X \mapsto F(T/S)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\text{groß},*}\colon \quad \mathrm{Zar}(X) &\longrightarrow \mathrm{Zar}(S) \\ G &\longmapsto (U/S \mapsto G(U \times_S X/X)) \end{aligned}$$

Proposition 4.10. *(1) Das direkte Bild der affinen Gerade $\underline{\mathbb{A}}^1_X \in \mathrm{Zar}(X)$ unter diesem Morphismus ist die interne Homgarbe $[\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S] \in \mathrm{Zar}(S)$.*

(2) Das inverse Bild von $\underline{\mathbb{A}}^1_S \in \mathrm{Zar}(S)$ unter diesem Morphismus ist die affine Gerade $\underline{\mathbb{A}}^1_X \in \mathrm{Zar}(X)$.

Beweis. (1) Für alle S-Schemata T haben wir natürliche Isomorphien

$$\begin{aligned} [\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S](T) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Zar}(S)}(\underline{T}, [\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Zar}(S)}(\underline{T} \times \underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Zar}(S)}(\underline{T \times_S X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S) \cong \underline{\mathbb{A}}^1_S(T \times_S X) \\ &\cong \mathcal{O}_{T\times_S X}(T \times_S X) \end{aligned}$$

und ebenso

$$(f_{\text{groß},*}\, \underline{\mathbb{A}}^1_X)(T) = \underline{\mathbb{A}}^1_X(T \times_S X) \cong \mathcal{O}_{T\times_S X}(T \times_S X).$$

(2) Für alle X-Schemata U/X gilt $(f^*_\text{groß}\, \underline{\mathbb{A}}^1_S)(U/X) = \underline{\mathbb{A}}^1_S(U/S) = \mathcal{O}_U(U) = \underline{\mathbb{A}}^1_X(U/X)$. □

Aus Sicht der internen Sprache ist die Homgarbe $[\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S]$ die Menge aller Abbildungen von $\underline{X}$ (vorgestellt als die Menge der Punkte von X) in den Grundring von Zahlen und wird mit komponentenweiser Addition und Multiplikation selbst zu einem Ring. Diesen können wir uns aus interner Sicht als den Ring der Funktionen auf X vorstellen. Dazu passt, dass die Menge der globalen Schnitte von $[\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S]$ als Ring isomorph zu $\mathcal{O}_X(X)$ ist.

4.1.2. Die Kripke-Joyal-Semantik der Zariskitopoi affiner Schemata

Die Kripke-Joyal-Semantik des großen Zariskitopos zu einem affinen Schema $\operatorname{Spec} A$ ist zwar mit der Theorie der Schemata, Siten und Grothendiecktopoi definiert, das Endprodukt benötigt aber nur den Begriff von Algebren über Ringen. Für die folgende Proposition schreiben wir kurz „$R \models \phi$“ für „$\operatorname{Spec} R \models \phi$“ und „$F(R)$“ für „$F(\operatorname{Spec} R)$“, falls F eine Garbe in $\operatorname{Zar}(\operatorname{Spec} A)$ ist.

Proposition 4.11. *Sei A ein Ring und R eine A-Algebra. Dann gilt für die Kripke-Joyal-Semantik auf* $\operatorname{Zar}(\operatorname{Spec} A)$*:*

$$\begin{aligned}
&R \models x = y : F && \iff && \textit{für die gegebenen Elemente } x, y \in F(R) \textit{ gilt } x = y. \\
&R \models \top && \iff && 1 = 1 \in R. \\
&R \models \bot && \iff && 1 = 0 \in R. \\
&R \models \phi \wedge \psi && \iff && R \models \phi \textit{ und } R \models \psi. \\
&R \models \phi \vee \psi && \iff && \textit{es gibt eine Zerlegung } \textstyle\sum_i f_i = 1 \in R \textit{ der Eins, sodass} \\
& && && \qquad \textit{für alle } i \textit{ jeweils } R[f_i^{-1}] \models \phi \textit{ oder } R[f_i^{-1}] \models \psi. \\
&R \models \phi \Rightarrow \psi && \iff && \textit{für jede } R\textit{-Algebra } S \textit{ gilt: } (S \models \phi) \Rightarrow (S \models \psi). \\
&R \models \forall x : F.\, \phi && \iff && \textit{für jede } R\textit{-Algebra } S \textit{ und jedes Element } x \in F(S) \textit{ gilt: } S \models \phi[x]. \\
&R \models \exists x : F.\, \phi && \iff && \textit{es gibt eine Zerlegung } \textstyle\sum_i f_i = 1 \in R \textit{ der Eins und} \\
& && && \qquad \textit{Elemente } x_i \in F(R[f_i^{-1}]), \textit{ sodass für alle } i\textit{: } R[f_i^{-1}] \models \phi[x_i].
\end{aligned}$$

Beweis. Das ist nach der Beschreibung der Kripke-Joyal-Semantik in Grothendiecktopoi (Lemma 1.15) und des großen Zarisikisitus im affinen Fall klar. □

Bis auf die Tatsache, dass wir beliebige (und nicht nur endlich präsentierte) Algebren zulassen, ist das auch genau die Semantik, die Coquand in seinem Programm zu dynamischen Methoden in der Algebra verwendet, siehe [6] und auch [8, 9].

Erlaubt man in den Regeln für ($\Rightarrow$) und ($\forall$) nur Algebren der Form $S = R[f^{-1}]$, $f \in R$, erhält man die Kripke-Joyal-Semantik des kleinen Zariskitopos $\operatorname{Sh}(\operatorname{Spec} A)$. Aus diesen Darstellungen kann man schon erahnen: Der große Zarisikitopos klassifiziert lokale A-Algebren, der kleine Lokalisierungen von A-Algebren [2].

Ersetzt man die Forderungen, dass es jeweils Zerlegungen $1 = \sum_i f_i \in R$ der Eins gibt, durch Forderungen, dass es étale Ringhomomorphismen $R \xrightarrow{\varphi_i} S_i$ derart gibt, sodass jedes Primideal von R Urbild eines Primideals von einem der Ringe S_i ist, und schreibt dann „S_i“ statt „$R[f_i^{-1}]$“, erhält man die Darstellung der Kripke-Joyal-Semantik für den großen étalen Topos zu $\operatorname{Spec} A$. Geometrisch bedeutet die Primidealbedingung natürlich gerade, dass die mengentheoretischen Bilder der induzierten Abbildungen $\operatorname{Spec} S_i \to \operatorname{Spec} R$ ganz $\operatorname{Spec} R$ überdecken.

Anwendungen außerhalb algebraischer Geometrie

Diese Semantik kann man auch, ganz unabhängig von Anwendungen in der algebraischen Geometrie, verwenden, um in üblicher globaler Sprache lokal über A zu sprechen. Möchte man beispielsweise zum Ausdruck bringen, dass jedes endlich erzeugte Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ lokal ein Hauptideal ist, d. h. dass es zu $\mathfrak{a}$ es eine Zerlegung $\sum f_i = 1 \in A$ der Eins derart gibt, dass die erweiterten Ideale $\mathfrak{a}[f_i^{-1}] \subseteq A[f_i^{-1}]$ jeweils Hauptideale sind, kann man einfach sagen:

$$A \models \ulcorner\text{Jedes endlich erzeugte Ideal in } \mathbb{A}^1_{\operatorname{Spec} A} \text{ ist ein Hauptideal}\urcorner.$$

Jeder konstruktive Beweis einer globalen Aussage impliziert dann sofort die entsprechende lokale Aussage. Interpretiert man beispielsweise den konstruktiven Beweis der Übungsaufgabe

> Jede Matrix über einem lokalen Ring, in dem endlich erzeugte Ideale Hauptideale sind, ist ähnlich zu einer (rechteckigen) Diagonalmatrix.

im großen Zariskitopos, erhält man sofort folgende lokale Variante:

> Jede Matrix über einem Ring, in dem endlich erzeugte Ideale lokal Hauptideale sind, ist lokal ähnlich zu einer (rechteckigen) Diagonalmatrix.

4.2. Offene und abgeschlossene Immersionen

In jedem Topos besitzt das Objekt Ω der Wahrheitswerte einige wichtige Unterobjekte: etwa die Objekte $\Omega_{\text{decidable}}$ und $\Omega_{\neg\neg}$ der *entscheidbaren* bzw. $\neg\neg$-*stabilen* Wahrheitswerte, intern definiert als

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{decidable}} &:= \{p : \Omega \mid p \vee \neg p\}, \\ \Omega_{\neg\neg} &:= \{p : \Omega \mid \neg\neg p \Rightarrow p\}. \end{aligned}$$

Diese klassifizieren herauslösbare bzw. $\neg\neg$-stabile Unterobjekte. Grundlegend in *synthetischer Topologie* ist der Gedanke, dass man auch ein Unterobjekt $\Sigma \hookrightarrow \Omega$ sog. *offener* Wahrheitswerte betrachten sollte [11, 25]. Dann kann man definieren:

Definition 4.12. (1) Ein Unterobjekt $U \hookrightarrow X$ heißt genau dann *offen*, wenn sein charakteristischer Morphismus über $\Sigma \hookrightarrow \Omega$ faktorisiert. In der internen Sprache ist es äquivalent zu sagen, dass für alle $x : X$ der Wahrheitswert der Aussage $x \in U$ offen ist, also $\{\star \mid x \in U\} \in \Sigma$ gilt.

(2) Die *intrinsische Topologie* auf einem Objekt X ist aus interner Sicht die Menge aller offenen Teilmengen von X. Extern kann diese mit dem internen Homobjekt $[X, \Sigma]$ identifiziert werden.

(3) Ein Morphismus heißt genau dann *stetig*, wenn aus Sicht der internen Sprache Urbilder offener Teilmengen offen sind, d. h. wenn er bezüglich der intrinsischen Topologien im gewöhnlichen Sinn stetig ist.

Dabei ist die Definition des Stetigkeitsbegriffs sogar überflüssig: Es ist eine Trivialität, zu zeigen, dass überhaupt jeder Morphismus stetig ist – so soll es in synthetischer Topologie ja auch sein. Wir wollen diesen Gedanken für den großen Zariskitopos $\mathrm{Zar}(S)$ aufgreifen und gerade so weit entwickeln, um interne Kriterien für offene und abgeschlossene Immersionen von Schemata angeben zu können.

Bemerkung 4.13. (1) In synthetischer Topologie akzeptiert man also das klassisch verletzte Axiom, dass alle Abbildungen stetig sind. In anderen Fällen von *Traummathematik*, wie etwa synthetischer Differentialgeometrie, ist das genauso – dort sind alle Abbildungen glatt. Somit fußen solche Ansätze darauf, dass sie in einem echt intuitionistischen Kontext interpretiert werden, da sonst sofort ein Widerspruch folgerbar ist.

(2) Synthetisch fordert man nicht, dass beliebige Vereinigungen offener Mengen wieder offen sind, da sonst das System kollabiert: Da sich jede Teilmenge U von 1 als Vereinigung offener Mengen schreiben lässt ($U = \bigcup_{u \in U} 1$), gälte $\Sigma = \Omega$. Als Ersatz gibt es das Konzept der Vereinigung „overt" vieler offener Teilmengen [11, Prop. 3.21].

(3) Alle Aussagen in diesem Abschnitt gelten auch bezüglich jeder feineren subkanonischen Topologie auf der Scheibenkategorie Sch/S.

Definition 4.14. (1) Zu einem S-Schema X und einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ heißt das Sieb

$$\left(\left\{V \xrightarrow{f} X \;\middle|\; \mathrm{im}(f) \subseteq U\right\}\right)_{V \in \mathrm{Sch}/S}$$

derjenigen S-Morphismen, deren mengentheoretisches Bild in U liegt, das *zu* $U \subseteq X$ *assoziierte Sieb*.

(2) Das Objekt Σ *der offenen Wahrheitswerte* ist die Prägarbe mit

$$\Sigma(X/S) := \text{Menge der assoziierten Siebe zu allen offenen } U \subseteq X.$$

Man kann nachrechnen, dass solche assoziierten Siebe stets abgeschlossen sind, Einschränkungen assoziierter Siebe wieder assoziierte Siebe sind (und damit Σ eine Unterprägarbe von Ω bildet) und dass Σ tatsächlich eine Garbe ist.

Bemerkung 4.15. Die Menge der globalen Schnitte der intrinsischen Topologie auf dem Punktefunktor $\underline{X}$ eines S-Schemas X stimmt mit der tatsächlichen Topologie von X überein, denn

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Zar}(S)}(1, [\underline{X}, \Sigma]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Zar}(S)}(\underline{X}, \Sigma) \cong \Sigma(X) \cong \mathcal{O}(X).$$

$\neg\neg$-Stabilität offener Wahrheitswerte

In manchen Modellen synthetischer Topologie, etwa dem großen Topos über einer geeigneten Kategorie topologischer Räume [25, Kap. 5.4], sind offene Wahrheitswerte $\neg\neg$-stabil, d. h. in der internen Sprache gilt

$$\forall p : \Sigma.\ \neg\neg p \Rightarrow p.$$

Das passt gut mit der üblichen Anschauung von offenen Wahrheitswerten als „beobachtbare“ und der Interpretation von $\neg\neg p$ als Aussage, dass p zwar in einem ideellen (klassischen) Sinn erfüllt ist, aber nicht notwendigerweise ein Zeuge dieser Wahrheit vorliegt, zusammen: Gilt $\neg\neg p$, so ist $\neg p$ falsch. Wenn wir also lange genug warten, werden wir schließlich sehen, dass p stimmt. Diese Intuition stammt speziell im Kontext synthetischer Topologie von A. Bauer [25, S. 57], ist aber natürlich auch zur Rechtfertigung des Markovprinzips bekannt [41, Kap. 1.5].

Proposition 4.16. *Offene Wahrheitswerte in* $\mathrm{Zar}(S)$ *sind* $\neg\neg$*-stabil.*

Beweis. Sei $X \in \mathrm{Sch}/S$ und $p \in \Sigma(X)$ das zu einer beliebigen offenen Teilmenge $U \subseteq X$ assoziierte Sieb. Wir erinnern daran, dass das Sieb $\neg\neg p$ explizit durch

$$\Big(\Big\{V \xrightarrow{f} X \;\Big|\; V \times_X W = \emptyset \text{ für alle } (W \xrightarrow{h} X) \in \mathrm{Sch}/S \text{ mit } \underbrace{\Big[W \times_X \widetilde{W} = \emptyset \text{ für alle } (\widetilde{W} \xrightarrow{\tilde{h}} X) \in \mathrm{Sch}/S \text{ mit } \operatorname{im} \tilde{h} \subseteq U\Big]}_{(\star)}\Big\}\Big)_{V \in \mathrm{Sch}/S}$$

gegeben ist. Wir müssen zeigen, dass $(\neg\neg p)(V) \subseteq p(V)$ für alle V/S; sei also ein Morphismus $V \xrightarrow{f} X$ aus $(\neg\neg p)(V)$ beliebig gegeben. Wir versehen die abgeschlossene Teilmenge $W := X \setminus U$ mit der reduzierten Schemastruktur und wählen h als die Inklusionsabbildung $W \overset{h}{\hookrightarrow} X$. Diese erfüllt Bedingung $(\star)$, denn faktorisiert ein Morphismus $\widetilde{W} \xrightarrow{\tilde{h}} X$ über U, so sind die beiden Quadrate im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{W} \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "\tilde{h}"] \\
\emptyset \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d, hook] \\
W \arrow[r, hook, "h"'] & X
\end{tikzcd}$$

Faserproduktdiagramme. Es folgt also, dass $\emptyset = V \times_X W = f^{-1}W = f^{-1}[X \setminus U] = V \setminus f^{-1}[U]$. Mithin gilt $f^{-1}[U] = V$ und f faktorisiert über U, das war zu zeigen. $\square$

4.2.1. Offene Immersionen

Proposition 4.17. *Ein Morphismus* $Y \xrightarrow{p} X$ *von* S*-Schemata ist genau dann eine offene Immersion, wenn in der internen Sprache des großen Zariskitopos gilt:*

$$\mathrm{Zar}(S) \models \ulcorner \underline{p} \textit{ ist injektiv und das Bild von } \underline{p} \textit{ ist in } \underline{X} \textit{ offen} \urcorner.$$

Dabei bezeichnet $\underline{p}$ *den induzierten Morphismus* $\underline{Y} \to \underline{X}$.

Beweis. Wir untersuchen zunächst allgemeiner, wann ein Unterobjekt $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} \underline{X}$ offen ist, also der zugehörige charakteristische Morphismus $\underline{X} \xrightarrow{\chi} \Omega$ über Σ faktorisiert. Das ist genau dann der Fall, wenn das Element $\chi_X(\mathrm{id}_X) \in \Omega(X)$ schon in $\Sigma(X)$ liegt – nach dem Yonedalemma ist χ ja auch durch dieses schon eindeutig bestimmt. Wir erinnern an dieser Stelle an die Konstruktion charakteristischer Morphismen in Grothendiecktopoi, es gilt

$$\chi_X(\mathrm{id}_X) := \left(\left\{V \xrightarrow{f} X \;\middle|\; f \in \operatorname{im} \iota_V\right\}\right)_{V \in \mathrm{Sch}/S} \in \Omega(X).$$

Dieses Sieb liegt genau dann in $\Sigma(X)$, wenn es eine offene Teilmenge $U \overset{j}{\hookrightarrow} X$ derart gibt, dass

$$\forall (V \xrightarrow{f} X) \in \mathrm{Sch}/S.\;\; f \in \operatorname{im} \iota_V \Longleftrightarrow \operatorname{im} f \subseteq U. \tag{4.3}$$

Das ist genau dann der Fall, wenn es ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, dashed, "\psi", "\cong"'] \arrow[dr, hook, "\iota"'] & & \underline{U} \arrow[dl, hook', "\underline{j}"] \\
& \underline{X} &
\end{tikzcd}$$

gibt: Gibt es einen solchen Isomorphismus ψ, so ist die Aussage $f \in \operatorname{im} \iota_V$ gleichbedeutend mit $f \in \operatorname{im} \underline{j}$, also gleichbedeutend damit, dass f von der Form $j \circ \_$ ist. Das ist äquivalent dazu, dass das mengentheoretische Bild von f in U enthalten ist. Gilt umgekehrt Bedingung (4.3), kann man einen Isomorphismus wie gefordert durch die Setzung

$$\text{auf } V/S\colon \quad g \in A(V) \longmapsto \text{dasjenige } f \in \mathrm{Hom}_S(V, U) \text{ mit } \iota_V(g) = j \circ f$$

angeben.

Mit dieser Vorüberlegung können wir die Proposition beweisen: Ist $Y \xrightarrow{p} X$ eine offene Immersion, so ist Y als X-Schema isomorph zur Bildmenge von Y (kanonisch mit der Struktur eines offenen Unterschemas von X versehen) und $Y \to X$ ein Monomorphismus in Sch/S. Damit ist auch $\underline{Y} \to \underline{X}$ ein Monomorphismus in $\mathrm{Zar}(S)$ und es gibt ein Diagramm wie oben. Die Rückrichtung ist klar. □

Proposition 4.18. *(1) Die Eigenschaft einer Zahl aus $\underline{\mathbb{A}}^1_S$, invertierbar zu sein, ist eine offene Bedingung. Genauer gilt*

$$\mathrm{Zar}(S) \models \forall a \colon \underline{\mathbb{A}}^1_S.\; \{\star \mid a \text{ invertierbar}\} \in \Sigma.$$

(2) Sei X ein S-Schema und $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Dann ist die Interpretation der intern definierte Teilmenge

$$\{x \colon \underline{X} \mid f(x) \neq 0\} \subseteq \underline{X},$$

wobei „f“ hier als Termkonstante vom Typ $[\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S]$ aufgefasst werden soll, isomorph zum Punktefunktor des offenen Unterschemas

$$D(f) = \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ invertierbar}\} \subseteq X.$$

Beweis. (1) Nach der Kripke-Joyal-Übersetzung der angegebenen internen Aussage müssen wir also zeigen, dass für alle S-Schemata X und Schnitte $a \in \underline{\mathbb{A}}^1_S(X) = \mathcal{O}_X(X)$ das Unterobjekt

$$\text{auf } V/S\colon \quad \{g\colon V \to X \mid a|_V \in \mathcal{O}_V(V) \text{ invertierbar}\} \subseteq \mathrm{Hom}_S(V, X)$$

von $\underline{X}$ offen ist. Dabei bezeichnet „$a|_V$“ das Bild von a unter dem von g induzierten Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_V(V)$. Nach den Überlegungen im Beweis der vorherigen Proposition müssen wir also zeigen, dass es eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ gibt, sodass

$$\forall (V \xrightarrow{g} X) \in \mathrm{Sch}/S. \quad a|_V \text{ invertierbar} \iff \operatorname{im} g \subseteq U.$$

Man kann sich überlegen, dass $U := D(a) \subseteq X$ diese Bedingung erfüllt.

(2) Sei $F \hookrightarrow \underline{X}$ die Interpretation der angegebenen intern definierten Teilmenge. Da $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ ein Körper von Brüchen ist, ist die Aussage $f(x) \neq 0$ äquivalent zur Invertierbarkeit von $f(x) : \underline{\mathbb{A}}^1_S$. Explizit ist die Garbe F also durch die Setzung

$$F(V/S) = \{g\colon V \to X \mid f|_V \in O_U(U) \text{ invertierbar}\}$$

gegeben. Damit folgt die Behauptung:

$$F(V/S) = \{g\colon V \to X \mid \operatorname{im} g \subseteq D(f)\} \cong \mathrm{Hom}_S(V, D(f)). \qquad \square$$

Bemerkung 4.19. Die Aussage $a \neq 0 : \underline{\mathbb{A}}^1_S$ ist also, wie jede offene Aussage, $\neg\neg$-stabil. Das kann man auch direkt sehen:

$$\neg\neg(a \neq 0) \iff \neg\neg\neg(a = 0) \iff \neg(a = 0) \iff a \neq 0.$$

4.2.2. Abgeschlossene Immersionen

Definition 4.20. (1) In der internen Sprache heißt ein Wahrheitswert $p : \Omega$ genau dann *abgeschlossen*, wenn $\neg p : \Omega$ offen ist.

(2) In der internen Sprache heißt eine Teilmenge $A \subseteq X$ genau dann *abgeschlossen*, wenn für alle $x : X$ die Aussage $x \in A$ abgeschlossen ist.

Es gibt auch noch andere, nicht-äquivalente, Definitionen abgeschlossener Wahrheitswerte [25, Kap. 2.2]. Mit der hier getroffenen Definition sich folgende Proposition beweisen:

Proposition 4.21. *(1) Eine abgeschlossene Immersion $Y \xrightarrow{p} S$ von S-Schemata erfüllt in der internen Sprache die Bedingung*

$$\mathrm{Zar}(S) \models \ulcorner \underline{p} \textit{ ist injektiv, das Bild von } \underline{p} \textit{ ist in } \underline{S} \textit{ abgeschlossen und}$$
$$\textit{die kanonische Abbildung } \underline{\mathbb{A}}^1_S \to [\underline{Y}, \underline{\mathbb{A}}^1_S] \textit{ ist surjektiv}\urcorner.$$

(2) Sei X ein S-Schema und $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Dann ist die Interpretation der intern definierten Teilmenge

$$\{x : \underline{X} \mid f(x) = 0\} \subseteq \underline{X}$$

der Punktefunktor zum Verschwindungsschema von f.

Beweis. (1) Wie im Beweis der analogen Proposition über offene Immersionen untersuchen wir zunächst allgemeiner, wann ein Unterobjekt $A \xhookrightarrow{\iota} \underline{X}$ mit charakteristischem Morphismus $\underline{X} \xrightarrow{\chi} \Omega$ abgeschlossen ist. Nach Definition ist das genau dann der Fall, wenn das Sieb $\neg\chi_X(\mathrm{id}_X)$, explizit durch

$$\left(\left\{V \xrightarrow{f} X \;\middle|\; f^*W = \emptyset \text{ für alle } W/S,\, h \in \chi_X(\mathrm{id}_X)(W)\right\}\right)_{V \in \mathrm{Sch}/S}$$

gegeben, in $\Sigma(X)$ liegt, also wenn eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit

$$\forall (V \xrightarrow{f} X) \in \mathrm{Sch}/S.\;\; [f^*W = \emptyset \text{ f.a. } (W \xrightarrow{h} X) \in \mathrm{im}\, \iota_W] \iff \mathrm{im}\, f \subseteq U$$

existiert.

Sei nun $Y \xrightarrow{p} S$ eine abgeschlossene Immersion, zur Vereinfachung der Notation gelte $Y \subseteq S$. Dann ist p und damit $\underline{p}$ ein Monomorphismus in Sch/S bzw. $\mathrm{Zar}(S)$, also ist aus Sicht der internen Sprache $\underline{p}$ injektiv.

Der zweite Teil der internen Aussage ist gleichbedeutend damit, dass $\underline{Y} \xrightarrow{\underline{p}} \underline{S}$ abgeschlossen ist. Um das zu zeigen, weisen wir nach, dass die offene Teilmenge $U := S \setminus Y \subseteq S$ die hergeleitete Bedingung erfüllt: Sei ein Schemamorphismus $V \xrightarrow{f} S$ gegeben. Um die Hinrichtung zu zeigen, können wir ausnutzen, dass speziell $(Y \xrightarrow{p} S)$ im Bild von $\underline{p}_Y$ liegt und daher $f^*Y = f^{-1}Y = f^{-1}[S \setminus U] = V \setminus f^{-1}[U] = \emptyset$ folgt. Also gilt $f^{-1}[U] = V$ und $\mathrm{im}\, f \subseteq U$.

Für die Rückrichtung gelte $\mathrm{im}\, f \subseteq U$, d. h. f faktorisiert über $U \hookrightarrow S$. Da schon das Faserprodukt $U \times_S Y$ leer ist, sind auch die Faserprodukte $V \times_S W = f^*W$ für alle S-Schemata W, deren Strukturmorphismus im Bild von $\underline{p}_W$ liegt (und daher über Y faktorisiert), leer.

Bleibt, die Surjektivitätsbedingung zu zeigen. Diese lautet übersetzt: Für jedes S-Schema T und jeden Schnitt $u \in \mathcal{O}_{Y \times_S T}(Y \times_S T)$ gibt es eine Überdeckung $T = \bigcup_i T_i$ durch offene Unterschemata und Schnitte $v_i \in \mathcal{O}_{T_i}(T_i)$, die von der kanonischen Abbildung $\mathcal{O}_{T_i}(T_i) \to \mathcal{O}_{Y \times_S T}(Y \times_S T)$ auf u abgebildet werden. Da abgeschlossene Immersionen unter Basiswechsel stabil sind,

$$\begin{tikzcd}
Y \times_S U \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[d, "{p, \text{ abg. Imm.}}"] \\
T \arrow[r] & S,
\end{tikzcd}$$

ist $\mathcal{O}_T \to \pi_*\mathcal{O}_{Y \times_S U}$ ein Epimorphismus in $\mathrm{Sh}(T)$. Das zeigt die Bedingung.

(2) Nach der universellen Eigenschaft des Verschwindungsschemas $V(f)$ faktorisiert ein Morphismus $V \xrightarrow{g} X$ von S-Schemata genau dann über $V(f) \subseteq X$, wenn $f|_V = 0 \in \mathcal{O}_V(V)$. Damit folgt sofort die Behauptung, denn die Interpretation der angegebenen Teilmenge ist die Untergarbe $F \hookrightarrow \underline{X}$ mit

$$F(V/S) = \{g\colon V \to X \mid f|_V = 0\} \cong \mathrm{Hom}_S(V, V(f)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_S(V, X). \qquad \square$$

Bemerkung 4.22. Ich weiß nicht, ob die Rückrichtung in (1) gilt. Man fragt sich vielleicht, ob dominante Morphismen (die ja im Allgemeinen keine abgeschlossenen Immersionen sind) die Bedingung in (1) ebenfalls erfüllen. Das stimmt aber schon deshalb nicht, weil dominante Morphismen im Allgemeinen keine Monomorphismen in der Kategorie der Schemata sind, wie für einen Körper k das kanonische Diagramm

$$\mathrm{Spec}\, k \rightrightarrows \mathrm{Spec}(k \times k) \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k$$

zeigt, in dem der hintere Morphismus offensichtlich dominant ist.

4.3. Eigenschaften von Schemata und Schemamorphismen

4.3.1. Reduzierte Schemata

Sei S ein Schema.

Proposition 4.23. *(1) S ist genau dann reduziert (das bedeutet nach Definition, dass alle lokalen Ringe $\mathcal{O}_{S,s}$ reduzierte Ringe sind), wenn der Ring $\mathcal{O}_S$ im kleinen Zariskitopos* $\mathrm{Sh}(S)$ *aus interner Sicht ein reduzierter Ring ist.*

(2) Der Ring $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ des großen Zariskitopos ist genau im trivialen Fall $S = \emptyset$ reduziert.

Beweis. (1) Die Aussage, dass $\mathcal{O}_S$ aus interner Sicht reduziert ist, bedeutet

$$\mathrm{Sh}(S) \models \forall x : \mathcal{O}_S.\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Dabei ist die Beschränkung auf den Exponenten 2 nicht wesentlich, genauso könnte man Reduziertheit als eine über die externen natürlichen Zahlen indizierte Konjunktion entsprechender Einzelaussagen definieren.

Da diese Bedingung geometrisch ist, gilt sie genau dann, wenn sie halmweise gilt; damit folgt schon die Behauptung.

(2) Die interne Aussage

$$\mathrm{Zar}(S) \models \forall x : \underline{\mathbb{A}}^1_S.\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

bedeutet, dass für alle S-Schemata X der Ring $\mathcal{O}_X(X)$ reduziert ist. Es ist klar, dass das für $S = \emptyset$ stimmt. Für die andere Richtung können wir eine Überdeckung von S durch affine offene Schemata $U = \mathrm{Spec}\, A \subseteq S$ betrachten. Dann ist das Spektrum von $A[X]/(X^2)$ jeweils ein S-Schema und nach Voraussetzung also $A[X]/(X^2)$ reduziert. Damit folgt $A = 0$ und $U = \emptyset$. Also ist auch $S = \emptyset$. $\square$

Mit dieser Charakterisierung kann man beispielsweise allein mit Argumenten aus kategorieller Logik folgende Proposition zeigen:

Proposition 4.24. *Das Schema S ist genau dann reduziert, wenn alle Ringe $\mathcal{O}_S(U)$ für $U \subseteq S$ offen reduziert sind.*

Beweis. Die Funktoren „U-Schnitte bilden“ sind gemeinsam konservativ und erhalten jeweils endliche Limiten. Das genügt schon, da in der Formulierung der Reduziertheit keine Konnektive wie „$\vee$“, „$\exists$“ oder „$\forall$“ vorkommen, siehe [16, Lemma D1.2.13]. □

4.3.2. Integre Schemata

Die Eigenschaft eines Schemas S, integer zu sein, hat nicht lokalen Charakter; daher kann man sie nicht durch eine Formel in $\mathrm{Sh}(S)$ oder $\mathrm{Zar}(S)$ charakterisieren. Es ist aber kein Problem, den lokalen Aspekt des Integritätsbegriffs einzufangen:

Proposition 4.25. *Ein Schema S ist genau dann an allen Stellen integer (das bedeutet nach Definition, dass alle lokalen Ring $\mathcal{O}_{S,s}$ Integritätsbereiche sind), wenn der Ring $\mathcal{O}_S$ des kleinen Zariskitopos $\mathrm{Sh}(S)$ aus interner Sicht ein Integritätsbereich ist.*

Beweis. Für diese Aussage wollen wir unter einem Integritätsbereich einen nichttrivialen Ring R verstehen, der die Bedingung

$$\forall x, y : R.\ \ xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$$

erfüllt. Damit ist die Eigenschaft, ein Integritätsbereich zu sein, geometrisch, und daher genau dann für $\mathcal{O}_S$ erfüllt, wenn sie an allen Halmen gilt. □

Wir werden sehen, dass die Frage, ob S an allen Stellen integer ist, mit der Frage zusammenhängt, ob der Ring $\mathcal{O}_S$ aus interner Sicht ein diskreter Ring ist, also

$$\mathrm{Sh}(S) \models \forall x : \mathcal{O}_S.\ x = 0 \vee x \neq 0$$

gilt. Da das keine geometrische Formel ist, kann man sich dabei nicht auf die Situation an den Halmen berufen. Wir wollen ein Element $x : R$ eines Rings R genau dann *pseudoregulär* nennen, wenn es die Bedingung

$$\forall y : R.\ \ xy = 0 \implies \ulcorner y \text{ nilpotent} \urcorner$$

erfüllt.

Proposition 4.26. *(1) Für affine Schemata S ist der Ring $\mathcal{O}_S \in \mathrm{Sh}(S)$ genau dann diskret, wenn jedes Element aus $\mathcal{O}_S(S)$ lokal null oder pseudoregulär ist.*

(2) Für beliebige Schemata S ist $\mathcal{O}_S \in \mathrm{Sh}(S)$ genau dann diskret, wenn in jeder (äquivalent: in einer) Überdeckung von S durch affine offene Unterschemata U jeweils die Ringe $\mathcal{O}_U(U)$ die Eigenschaft aus (1) haben.

(3) *Der Ring $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ des großen Zariskitopos ist genau dann diskret, wenn $S = \emptyset$.*

Beweis. (1) Wir schreiben $S = \operatorname{Spec} A$. Dann lautet die Übersetzung der Aussage, dass $\mathcal{O}_S$ aus interner Sicht diskret ist, wie folgt:

> Für alle Lokalisierungen $A \to A[f^{-1}]$ und Elemente $x \in A[f^{-1}]$ gilt:
>
> > Es gibt eine Zerlegung $1 = \sum_i g_i \in A[f^{-1}]$ der Eins, sodass für alle i gilt: $x = 0 \in A[f^{-1}][g_i^{-1}]$ oder:
> >
> > > Für alle weiteren Lokalisierungen $A[f^{-1}][g_i^{-1}][h^{-1}]$, in denen das Bild von x null ist, gilt: $1 = 0 \in A[f^{-1}][g_i^{-1}][h^{-1}]$.

Die am tiefsten eingerückte Teilaussage ist äquivalent dazu, dass $x \in A[f^{-1}][g_i^{-1}]$ pseudoregulär ist, und man nachrechnen, dass man nicht alle Lokalisierungen $A \to A[f^{-1}]$ betrachten muss. Damit ist die Bedingung äquivalent zur Behauptung, nämlich das gilt:

> Für alle $x \in A$ gilt gibt es eine Zerlegung $1 = \sum_i g_i \in A$ der Eins, sodass für alle i jeweils x null oder x pseudoregulär in $A[g_i^{-1}]$ ist.

(2) Sei $S = \bigcup_i U_i$ eine beliebige Überdeckung von S durch offene affine Unterschemata. Genau dann gilt $\mathrm{Sh}(S) \models \ulcorner \mathcal{O}_S$ ist diskret$\urcorner$, wenn für alle i

$$U_i \models \ulcorner \mathcal{O}_S \text{ ist diskret} \urcorner$$

gilt. Da $\mathcal{O}_S|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$, ist das nach der ersten Teilaussage gleichbedeutend damit, dass die Ringe $\mathcal{O}_{U_i}(U_i)$ die Eigenschaft aus (1) haben. Das zeigt die Behauptung.

(3) Die Rückrichtung ist klar. Sei umgekehrt $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ aus interner Sicht des großen Zariskitopos ein diskreter Ring. Da man intuitionistisch zeigen kann, dass diskrete Körper von Brüchen stets reduziert sind, folgt damit die Behauptung mit Proposition 4.23(2). □

Bemerkung 4.27. (1) Insbesondere sind Strukturgarben integrer Schemata diskret.

(2) Die Lokalitätsmodalität in der Bedingung in (1) ist tatsächlich notwendig: Man kann nachrechnen, dass jedes Element des Rings $\mathbb{Z}/(6)$ lokal null oder pseudoregulär ist, aber die Restklassen von 2, 3 und 4 sind nicht global pseudoregulär.

(3) Eine verwandte Frage ist, wann Invertierbarkeit entscheidbar ist, also wann in der internen Sprache gilt, dass jedes Ringelement invertierbar oder nicht invertierbar ist. Siehe dazu [7].

(4) Die Aussagen der Propositionen 4.23 und 4.26 über $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ gelten auch bezüglich jeder feineren subkanonischen Topologie.

4.3.3. Morphismen von endlichem Typ und endlicher Präsentation

Wir haben keine allgemein gültige interne Charakterisierung von Morphismen endlichen Typs und endlicher Präsentation finden können. Die folgende Proposition demonstriert von vier Kandidaten, von denen manche anschaulich plausibel sind, dass sie das Konzept nicht richtig fassen.

Proposition 4.28. *Sei $X \xrightarrow{f} S$ ein Schemamorphismus. Dann bedeuten folgende interne Aussagen im Allgemeinen jeweils* nicht*, dass f lokal von endlichem Typ bzw. lokal von endlicher Präsentation sind:*

(1) $\mathrm{Sh}(X) \models \ulcorner f^{-1}\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_X$ *ist von endlichem Typ bzw. von endlicher Präsentation*$\urcorner$.

(2) $\mathrm{Sh}(S) \models \ulcorner \mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_X$ *ist von endlichem Typ bzw. von endlicher Präsentation*$\urcorner$.

(3) $\mathrm{Zar}(X) \models \ulcorner f^*_{\text{groß}}\underline{\mathbb{A}}^1_S \to \underline{\mathbb{A}}^1_X$ *ist von endlichem Typ bzw. von endlicher Präsentation*$\urcorner$.

(4) $\mathrm{Zar}(S) \models \ulcorner \underline{\mathbb{A}}^1_S \to f_{\text{groß},*}\underline{\mathbb{A}}^1_X$ *ist von endlichem Typ bzw. von endlicher Präsentation*$\urcorner$.

Dabei sind in den internen Aussagen mit endlicher Typ *und* endliche Präsentation *die bekannten Eigenschaften von Ringhomomorphismen gemeint.*

Beweis. (1) Wähle $f = \operatorname{Spec}\varphi$ als den eindeutigen Morphismus $X = \operatorname{Spec}\mathbb{Q} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z} = S$. Dann ist $\mathrm{Sh}(X) \simeq \mathrm{Set}$ und die Aussage bedeutet, dass der induzierte Ringhomomorphismus der Halme an der Stelle des Nullideals $(0) \in X$,

$$\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}_{\varphi^{-1}[(0)]} \longrightarrow \mathbb{Q}_{(0)} \cong \mathbb{Q},$$

von endlichem Typ bzw. von endlicher Präsentation ist. Das ist offensichtlich der Fall, aber f ist nicht lokal von endlichem Typ bzw. lokal von endlicher Präsentation.

(2) Wähle f als den kanonischen Morphismus $X = \operatorname{Proj} k[T_1, \ldots] \to \operatorname{Spec} k = S$, wobei k ein Körper ist. Dann ist f nicht lokal von endlichem Typ oder endlicher Präsentation. Aber da $\mathrm{Sh}(S) \simeq \mathrm{Set}$, bedeutet die interne Aussage, dass der auf globalen Schnitten induzierte Ringhomomorphismus

$$k \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \cong k$$

von endlichem Typ bzw. von endlicher Präsentation ist. Das ist offensichtlich der Fall.

(3) Aussage (3) ist unabhängig von f stets erfüllt, da nach Proposition 4.10(2) das inverse Bild $f^*_{\text{groß}}\underline{\mathbb{A}}^1_S$ gleich $\underline{\mathbb{A}}^1_X$ ist.

(4) Wir wählen dasselbe Gegenbeispiel wie in (2). Da $S = \operatorname{Spec} k$ keine nichttrivialen Zarisikiüberdeckungen zulässt, lautet die Übersetzung der internen Aussage: Es gibt $n \geq 0$ und Schnitte $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{O}_X(X) \cong k$, sodass für alle k-Algebren A und Schnitte $x \in \mathcal{O}_{X \times_S \operatorname{Spec} A}(X \times_S \operatorname{Spec} A) \cong A$ eine Zerlegung $1 = \sum_i f_i \in A$

der Eins existiert, sodass es für alle i jeweils Schnitte $a_1, \ldots, a_n \in A[f_i^{-1}]$ mit $x = \sum_i a_i x_i$ gibt. Die zwei Basiswechsel verdeutlicht das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Proj} A[f_i^{-1}][T_1, \ldots] \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Proj} A[T_1, \ldots] \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Proj} k[T_1, \ldots] = X \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} A[f_i^{-1}] \arrow[r] & \operatorname{Spec} A \arrow[r] & \operatorname{Spec} k = S.
\end{tikzcd}$$

Es ist klar, dass diese Aussage erfüllt ist: Wähle $n = 1$, $x_1 = 1 \in k$ und die triviale Zerlegung der Eins in den k-Algebren A. □

Im Spezialfall affiner Morphismen erweisen sich zwei der aufgezählten Bedingungen aber als richtig, das zeigen die folgenden beiden Resultate.

Proposition 4.29. *Sei $X \xrightarrow{f} S$ ein Morphismus affiner Schemata. Dann sind äquivalent:*

(1) *f ist (lokal) von endlichem Typ.*

(2) *$\mathcal{O}_S(S) \to \mathcal{O}_X(X)$ ist von endlichem Typ.*

(3) $\mathrm{Zar}(S) \models \ulcorner \underline{\mathbb{A}}^1_S \to [\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S]$ *ist von endlichem Typ*$\urcorner$.

(4) $\mathrm{Sh}(S) \models \ulcorner \mathcal{O}_S \to f_* \mathcal{O}_X$ *ist von endlichem Typ*$\urcorner$.

Beweis. Wir schreiben $X = \operatorname{Spec} B$ und $S = \operatorname{Spec} A$. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen ist klar. Die dritte soll genauer

$$\mathrm{Zar}(S) \models \bigvee_{n \geq 0} \exists x_1, \ldots, x_n \colon [\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S].\ \forall x \colon [\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S].$$
$$\bigvee_{\substack{\text{Polynom-}\\\text{strukturen}}} \exists \text{Polynomkoeffizienten } p \colon \underline{\mathbb{A}}^1_S.\ x = \ulcorner p(x_1, \ldots, x_n) \urcorner$$

bedeuten. Die zweite unendliche Disjunktion läuft über alle Möglichkeiten, wo Koeffizienten platziert werden können, damit ein Polynom in n Variablen entsteht; der darauffolgende Existenzquantor besetzt diese Stellen mit Werten. (Äquivalent kann man auch einen internen Polynomring $\underline{\mathbb{A}}^1_S[X_1, \ldots, X_n]$ definieren und diesen verwenden.) Die Übersetzung mit der Kripke-Joyal-Semantik lautet:

Es gibt $1 = \sum_i f_i \in A$, sodass für alle i gilt:

Es gibt $n \geq 0$, $x_1, \ldots, x_n \in B[f_i^{-1}]$ sodass:

Für alle $A[f_i^{-1}]$-Algebren $\widetilde{A}$, $x \in B[f_i^{-1}] \otimes_{A[f_i^{-1}]} \widetilde{A}$:

Es gibt $1 = \sum_j g_j \in \widetilde{A}$, sodass für alle j gilt:

Es gibt $p \in \widetilde{A}[g_j^{-1}][X_1, \ldots, X_n]$ mit $x = p(x_1, \ldots, x_n) \in B \otimes_A \widetilde{A}[g_j^{-1}]$.

Kürzer formuliert: Lokal gibt es Erzeuger, welche nach beliebigen Basiswechseln die Algebra lokal erzeugen. Mit dem bekannten Lemma, dass es zu jeder Zerlegung $1 = \sum_i f_i$ der Eins in einem Ring eine Zerlegung der Form $1 = \sum_i c_i f_i^d$ gibt, wobei man den Exponenten $d \geq 0$ beliebig vorgeben kann, kann man leicht zeigen, dass diese Aussage äquivalent dazu ist, dass B eine endlich erzeugte A-Algebra ist. Damit folgt die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Die Übersetzung der internen Aussage in (4) unterscheidet sich von der obigen Übersetzung nur darin, dass nicht über alle $A[f_i^{-1}]$-Algebren $\widetilde{A}$ quantifiziert wird, sondern nur über weitere Lokalisierungen von $A[f_i^{-1}]$, also Algebren der Form $A[f_i^{-1}][h^{-1}]$. Der nur angedeutete algebraische Beweis der Äquivalenz zeigt auch die abgeschwächte Aussage. □

Korollar 4.30. *Sei $X \xrightarrow{f} S$ ein affiner Morphismus beliebiger Schemata. Dann sind äquivalent:*

(1) *Es ist f von endlichem Typ.*

(2) $\mathrm{Zar}(S) \models \ulcorner \underline{\mathbb{A}}^1_S \to [\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S]$ *ist von endlichem Typ*$\urcorner$.

(3) $\mathrm{Sh}(S) \models \ulcorner \mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_X$ *ist von endlichem Typ*$\urcorner$.

Beweis. Sei $S = \bigcup_i S_i$ eine Überdeckung von S durch offene affine Unterschemata, sodass die Urbilder $f^{-1}S_i$ jeweils offene affine Unterschemata von X sind. Wegen des lokalen Charakters der internen Sprache ist dann Aussage (2) gleichbedeutend damit, dass für alle i jeweils gilt, dass

$$S_i \models \ulcorner \underline{\mathbb{A}}^1_S \to [\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S] \text{ ist von endlichem Typ}\urcorner,$$

oder expliziter:

$$\mathrm{Zar}(S_i) \models \ulcorner \underline{\mathbb{A}}^1_{S_i} \to [\underline{f^{-1}S_i}, \underline{\mathbb{A}}^1_{S_i}] \text{ ist von endlichem Typ}\urcorner.$$

Nach der vorherigen Proposition ist das gleichbedeutend damit, dass die eingeschränkten Morphismen $f^{-1}S_i \to S_i$ jeweils von endlichem Typ sind. Da *von endlichem Typ* eine lokale Eigenschaft ist, ist damit die Äquivalenz mit Aussage (1) gezeigt. Die Äquivalenz mit der Behauptung über den kleinen Zariskitopos zeigt man analog. □

Proposition 4.31. *Sei $X \xrightarrow{f} S$ ein Morphismus affiner Schemata. Dann sind äquivalent:*

(1) $\mathcal{O}_S(S) \to \mathcal{O}_X(X)$ *ist endlich.*

(2) $\mathrm{Zar}(S) \models \ulcorner \underline{\mathbb{A}}^1_S \to [\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S]$ *ist endlich*$\urcorner$.

(3) $\mathrm{Sh}(S) \models \ulcorner \mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_X$ *ist endlich*$\urcorner$.

Ferner ist ein affiner Morphismus $X \xrightarrow{f} S$ beliebiger Schemata genau dann endlich, wenn die internen Aussagen (2) oder (3) erfüllt sind.

Beweis. Analog zu den Beweisen der vorhergehenden Proposition und des Korollars. □

4.3.4. Affine Morphismen

Sei S ein Schema. Wir schlagen folgenden Weg vor, um die Affinität von Morphismen nach S intern zu charakterisieren:

Überlegung 4.32. *(1) Sei $\mathcal{A}$ eine quasikohärente $\mathcal{O}_S$-Algebra. Dann definiert*

$$\mathcal{A}_{\text{groß}}(X \xrightarrow{f} S) := (f^*\mathcal{A})(X) = (f^{-1}\mathcal{A} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X)(X)$$

eine interne $\underline{\mathbb{A}}^1_S$-Algebra, und die über die interne Sprache von $\mathrm{Zar}(S)$ *definierte Garbe*

$$[\mathcal{A}_{\text{groß}}, \underline{\mathbb{A}}^1_S]_{\underline{\mathbb{A}}^1_S} := \{\varphi : [\mathcal{A}_{\text{groß}}, \underline{\mathbb{A}}^1_S] \mid \ulcorner \varphi \text{ Morphismus von } \underline{\mathbb{A}}^1_S\text{-Algebren}\urcorner\}$$

stimmt mit dem auf Sch/S *definierten Funktor*

$$(X \xrightarrow{f} S) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{A}, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Hom}_S(X, \underline{\mathrm{Spec}}_S\mathcal{A})$$

überein.

(2) Sei $X \xrightarrow{f} S$ ein quasikompaktes und quasisepariertes S-Schema. Dann gilt $[\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S] \cong (f_*\mathcal{O}_X)_{\text{groß}}$.

(3) Sei $X \xrightarrow{f} S$ quasikompakt und quasisepariert. Dann ist f genau dann ein affiner Morphismus, wenn in der internen Sprache gilt:

$$\mathrm{Zar}(S) \models \ulcorner \text{die Abbildung } \underline{X} \to [[\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S], \underline{\mathbb{A}}^1_S]_{\underline{\mathbb{A}}^1_S}, x \mapsto \_(x) \text{ ist bijektiv}\urcorner.$$

Beweisskizze. Wir beweisen die dritte Teilaussage. Nach den ersten beiden Teilaussagen kann man die Interpretation der intern definierten Abbildung mit dem kanonischen Schemamorphismus

$$X \longrightarrow \underline{\mathrm{Spec}}_S f_*\mathcal{O}_X$$

identifizieren. Genau dann ist die interne Bedingung in (3) erfüllt, wenn dieser Morphismus ein Isomorphismus ist. Das ist bekanntlich genau dann der Fall, wenn f affin ist. $\square$

Die interne Sprache ist mächtig genug, um von dem Identitätsmorphismus $S \to S$ zu zeigen, dass er das angegebene Affinitätskriterium erfüllt. Ohne weitere Axiome kann sie jedoch nicht einmal zeigen, dass $\mathbb{A}^1_S \to S$ affin ist, das diskutieren wir genauer im Anhang.

4.4. Eigenschaften von Modulgarben

Im Folgenden geben wir interne Charakterisierungen einiger Eigenschaften von Modulgarben über geringten Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ an. An einigen Stellen werden wir dazu die kanonischen $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{O}_X^n$ benötigen. Da wir diese nicht ad hoc als Objektkonstanten in die interne Sprache aufnehmen, sondern intern definieren wollen, müssen wir eine kurze Untersuchung von (Ko-)Limiten voranstellen.

Lemma 4.33. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $D\colon I \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$ ein Diagramm über einer kleinen Indexkategorie I. Dann besitzt D einen Limes, und dieser kann berechnet werden als interner Limes des induzierten internen Diagramms*

$$\coprod_{i \in I} D(i) \longrightarrow (\gamma^* I)_0,$$

wobei γ der kanonische geometrische Morphismus $\mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Set}$ und $(\gamma^* I)_0$ daher das Koprodukt $\amalg_{i \in I} 1$ ist. Die Modulstruktur ist die offensichtliche.

Beweis. Das ist eine Anwendung von Proposition 1.29. □

Korollar 4.34. *Der extern als Limes oder Kolimes definierbare $\mathcal{O}_X$-Modul*

$$\mathcal{O}_X^n := \bigoplus_{i \in [n]} \mathcal{O}_X,$$

wobei $[n] = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$, stimmt mit dem intern definierten Objekt $\bigtimes_{i\,:\,[n]} \mathcal{O}_X$ überein.

Bemerkung 4.35. (1) In der internen Sprache ist die Existenz allgemeiner Koprodukte $\oplus_{i\,:\,I} \mathcal{F}(i)$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln, d. h. solcher, die aus interner Sicht durch beliebige Mengen I indiziert werden, nicht völlig trivial: Die gewohnte Konstruktion als Teilmenge des Produkts $\prod_{i\,:\,I} \mathcal{F}(i)$ scheitert, da man die Inklusionsabbildungen

$$\mathcal{F}(i) \longrightarrow \prod_{i\,:\,I} \mathcal{F}(i)$$

nicht definieren kann, wenn man nicht die Diskretheit der Indexmenge voraussetzt. Stattdessen muss man auf eine Konstruktion über Äquivalenzklassen endlicher Listen von Modulelementen ausweichen, siehe [30, Kap. II.4].

(2) Filtrierte Kolimiten von Moduln werden als filtrierte Kolimiten der unterliegenden Mengen berechnet; für solche greift wieder Proposition 1.29, sodass der externe Kolimes einer durch eine gewöhnliche filtrierte Kategorie I indizierte Familie von $\mathcal{O}_X$-Moduln mit dem internen Kolimes über $\gamma^* I$ übereinstimmt.

4.4.1. Moduln von endlichem Typ, von endlicher Präsentation und kohärente Moduln

Proposition 4.36. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sind äquivalent:*

(1) $\mathcal{F}$ *ist* von endlichem Typ*, d. h. es gibt eine Überdeckung von X durch offene Mengen, sodass es zu jeder Überdeckungsmenge U für ein $n \geq 0$ eine kurze exakte Sequenz*

$$(\mathcal{O}_X|_U)^n \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

von $\mathcal{O}_X|_U$-Moduln gibt.

(2) $\mathrm{Sh}(X) \models \bigvee_{n \geq 0} \exists f : [\mathcal{O}_X^n, \mathcal{F}].\ \ulcorner f$ *ist $\mathcal{O}_X$-linear und surjektiv*$\urcorner$.

(3) $\mathrm{Sh}(X) \models \bigvee_{n \geq 0} \exists x_1, \ldots, x_n : \mathcal{F}.\ \forall x : \mathcal{F}.\ \exists a_1, \ldots, a_n : \mathcal{O}_X.\ x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$.

(4) $\mathrm{Sh}(X) \models \ulcorner\mathcal{F}$ *ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X$-Modul*$\urcorner$.

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma ist die Interpretation von Aussage (2) unter der Kripke-Joyal-Semantik genau Aussage (1). Die Äquivalenz der Aussagen (2) und (3) ist klar, denn der übliche Beweis der Äquivalenz

> Ein A-Modul M ist genau dann endlich erzeugt, wenn es für ein $n \geq 0$ eine A-lineare Surjektion $A^n \twoheadrightarrow M$ gibt.

ist konstruktiv und gilt daher auch im Topos $\mathrm{Sh}(X)$. Schließlich sind Aussagen (3) und (4) direkt nach Definition gleichbedeutend. □

Proposition 4.37. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sind äquivalent:*

(1) $\mathcal{F}$ *ist* endlich präsentiert*, d. h. es gibt eine Überdeckung von X durch offene Mengen, sodass es zu jeder Überdeckungsmenge U für gewisse $n, m \geq 0$ eine kurze exakte Sequenz*

$$(\mathcal{O}_X|_U)^m \longrightarrow (\mathcal{O}_X|_U)^n \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

von $\mathcal{O}_X|_U$-Moduln gibt.

(2) $\mathrm{Sh}(X) \models \bigvee_{n,m \geq 0} \exists g : [\mathcal{O}_X^m, \mathcal{O}_X^n], f : [\mathcal{O}_X^n, \mathcal{F}].$
$\ulcorner f$ *und g sind $\mathcal{O}_X$-linear,* $\operatorname{im} g = \ker f$ *und f ist surjektiv*$\urcorner$.

(3) $\mathrm{Sh}(X) \models \ulcorner\mathcal{F}$ *ist ein endlich präsentierter $\mathcal{O}_X$-Modul*$\urcorner$.

Beweis. Analog zum Beweis der vorherigen Proposition. □

Proposition 4.38. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sind äquivalent:*

(1) $\mathcal{F}$ *ist* kohärent*, d. h. $\mathcal{F}$ ist von endlichem Typ und für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist der Kern einer jeder $\mathcal{O}_X|_U$-linearen Abbildung $(\mathcal{O}_X|_U)^n \to \mathcal{F}|_U$, $n \geq 0$, von endlichem Typ.*

(2) $\mathrm{Sh}(X) \models \ulcorner \mathcal{F}$ *ist ein endlich erzeugter* $\mathcal{O}_X$*-Modul*$\urcorner\ \wedge$
$\bigwedge_{n\geq 0} \forall f : [\mathcal{O}_X^n, \mathcal{F}].\ \ulcorner f$ *ist* $\mathcal{O}_X$*-linear*$\urcorner \Rightarrow \ulcorner \ker f$ *ist endlich erzeugter* $\mathcal{O}_X$*-Modul*$\urcorner$.

Beweis. Analog. □

Folgende Proposition liefert ein Beispiel für eine Aussage, die dank der internen Charakterisierung völlig trivial wird:

Proposition 4.39. *Sei* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ein geringter Raum. Sind in einer kurzen exakten Sequenz* $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ *von* $\mathcal{O}_X$*-Moduln die außen stehenden Moduln von endlichem Typ, so auch der mittlere.*

Beweis. Es ist klar, dass man die analoge Aussage über gewöhnliche Moduln konstruktiv beweisen kann. Damit gilt sie auch intern in $\mathrm{Sh}(X)$; ihre externe Interpretation ist genau die Behauptung. □

Der Beweis folgender Proposition (die Aussage entnommen aus [40, Lemma 01BB]) liefert ein Beispiel, wie man die interne Charakterisierung von Moduln endlichen Typs und die externe von Quasikompaktheit kombinieren kann:

Proposition 4.40. *Sei* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ein geringter Raum. Sei* I *eine gerichtete Menge und* $D\colon I \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$ *ein Diagramm. Sei der Kolimes* $\mathcal{F} := \mathrm{colim}_i\, D(i)$ *von endlichem Typ und* X *quasikompakt. Dann gibt es einen Index* i*, sodass die kanonische Abbildung* $\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}$ *ein Epimorphismus ist.*

Beweis. Es ist klar, dass man folgende Aussage der Algebra konstruktiv beweisen kann: Ist ein filtrierter Kolimes $A := \mathrm{colim}_i\, A_i$ endlich erzeugt, so ist schon eine der kanonischen Abbildungen $A_i \to A$ surjektiv.

Also folgt in der Situation hier, dass man in der internen Sprache zeigen kann, dass

$$\mathrm{Sh}(X) \models \bigvee_{i\in I} \ulcorner \text{die kanonische Abbildung } \mathcal{F}_i \to \mathcal{F} \text{ ist surjektiv} \urcorner.$$

Da I gerichtet und die Teilaussagen dieser Disjunktion in i monoton sind, d. h. für $i \leq j$ die interne Sprache die Implikation

$$\mathrm{Sh}(X) \models \ulcorner \mathcal{F}_i \to \mathcal{F} \text{ ist surjektiv} \urcorner \Rightarrow \ulcorner \mathcal{F}_j \to \mathcal{F} \text{ ist surjektiv} \urcorner$$

zeigen kann, folgt mit Proposition 3.11 wegen der vorausgesetzten Kompaktheit von $\mathrm{Sh}(X)$ die Behauptung. □

Kategorielle Charakterisierung von Moduln endlichen Typs und endlicher Präsentation

Die Eigenschaften eines gewöhnlichen Moduls, endlich erzeugt oder endlich präsentiert zu sein, kann man rein kategoriell charakterisieren:

Proposition 4.41. *Sei M ein A-Modul. Genau dann ist $M\ldots$*

(1) ... endlich erzeugt, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(A)}(M, \_)$ mit filtrierten Kolimiten von Monomorphismen vertauscht.

(2) ... endlich präsentiert, wenn derselbe Funktor mit allen filtrierten Kolimiten vertauscht.

Beweis. Siehe [1, Thm. 3.12]. Der Beweis ist sehr instruktiv und auch intuitionistisch zulässig, wenn man „endlich" als kuratowskiendlich versteht. □

Dieses klassische Resultat impliziert sofort folgendes Korollar:

Korollar 4.42. *Sei $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Set}$ ein Topos über Set, $A \in \mathcal{E}$ ein interner Ring und M ein interner A-Modul. Dann gilt:*

(1) Ist M aus interner Sicht endlich erzeugt und $\mathcal{E}$ kompakt, so vertauscht der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{E}}(A)}(M, \_)$ mit filtrierten Kolimiten von Monomorphismen.

(2) Ist M aus interner Sicht endlich präsentiert und $\mathcal{E}$ stark kompakt (d. h. der Funktor $\gamma_* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, \_)$ vertauscht mit beliebigen filtrierten Kolimiten), so vertauscht derselbe Funktor wie in (1) mit beliebigen filtrierten Kolimiten.

Beweis. Sei M aus interner Sicht endlich erzeugt bzw. endlich präsentiert und sei $D\colon I \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{E}}(A)$ ein filtriertes Diagramm von Monomorphismen bzw. beliebiger Morphismen. Dann induziert D ein internes Diagramm auf der internen filtrierten Kategorie $\gamma^* I$ und der externe und interne Kolimesbegriff stimmen überein (Proposition 1.29). Da die vorherige Proposition konstruktiv beweisbar war, folgt daher sofort, dass die kanonische intern definierte Abbildung

$$\mathrm{colim}_i [M, D(i)]_A \longrightarrow [M, \mathrm{colim}_i\, D(i)]_A$$

aus interner Sicht bijektiv, also tatsächlich ein Isomorphismus ist. Damit folgt aber noch nicht unmittelbar die Behauptung, da dieser Isomorphismus nur etwas über Homgarben und nicht die eigentlich relevanten externen Hommengen aussagt. Stattdessen müssen wir zu globalen Schnitten übergehen. Es folgt, dass die induzierte Abbildung, das ist die obere Zeile des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\gamma_*(\mathrm{colim}_i [M, D(i)]_A) \arrow[r, "\cong"] & \gamma_*[M, \mathrm{colim}_i\, D(i)]_A \\
\mathrm{colim}_i\, \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(A)}(M, D(i)) \arrow[u, "(\star)"] \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{E}}(A)}(M, \mathrm{colim}_i\, D(i)), \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

bijektiv ist. Unter den Voraussetzungen an $\mathcal{E}$ in (1) bzw. (2) ist auch die markierte Abbildung bijektiv, sodass die Bijektivität der unteren folgt. Das zeigt die Behauptung. $\square$

Korollar 4.43. *Sei X ein quasikompaktes Schema und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul endlichen Typs. Dann vertauscht der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{F}, \_)$ mit filtrierten Kolimiten von Monomorphismen.*

Beweis. Klar, denn $\mathrm{Sh}(X)$ ist ein kompakter Topos, da der X zugrundeliegende topologische Raum kompakt ist. $\square$

Bemerkung 4.44. Man kann nicht erwarten, dass man die Rückrichtungen in Korollar 4.42 ähnlich leicht zeigen kann, da die im Beweis benutzten internen Familien über konstanten Objekten $\gamma^* I$ sehr spezielle sind.

4.4.2. Quasikohärente Moduln

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Bekanntlich heißt ein $\mathcal{O}_X$-Modul F genau dann *quasikohärent*, wenn er eine Überdeckung von X durch offene Mengen zulässt, sodass es zu jeder Überdeckungsmenge U eine exakte Sequenz der Form

$$(\mathcal{O}_X|_U)^J \longrightarrow (\mathcal{O}_X|_U)^I \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

gibt, wobei I, J beliebige Mengen sein dürfen. Diese Bedingung ist wegen der Beliebigkeit der Mengen I und J schwieriger zu internalisieren: Naheliegend ist vielleicht die mit der Stacksemantik interpretierbare Bedingung

$$\mathcal{E} \models \exists I, J : \mathbb{E}.\ \ulcorner \text{es gibt eine exakte Sequenz der Form } \mathcal{O}_X^J \to \mathcal{O}_X^I \to \mathcal{F} \to 0 \urcorner, \qquad (4.4)$$

wobei wir $\mathcal{E} := \mathrm{Sh}(X)$ gesetzt haben, aber dieses Vorgehen stellt sich als zu naiv heraus:

Proposition 4.45. *Bedingung* (4.4) *ist stets erfüllt.*

Beweis. Der übliche Beweis der Aussage, dass jeder Modul eine Auflösung durch freie Moduln besitzt, ist konstruktiv und gilt daher auch in $\mathrm{Sh}(X)$. $\square$

Bemerkung 4.46. Es stellt sich die Frage, inwieweit man ein Objekt natürlicher Zahlen benötigt, um die vollständige freie Auflösung von F zu konstruieren. Wenn man diese als internen Kettenkomplex vorliegen haben möchte, ist ein solches unverzichtbar, schließlich ist ein Kettenkomplex in einer additiven Kategorie $\mathcal{A}$ eine spezielle Art Funktor $\mathbb{Z} \to \mathcal{A}$ ($\mathbb{Z}$ vermöge der Partialordnungsstruktur als Kategorie aufgefasst); und die Existenz eines Objekts ganzer Zahlen ist äquivalent zur Existenz eines Objekts natürlicher Zahlen. Wenn man aber nur die Objekte und Differentiale des Komplexes einzeln benötigt, kann man auch die externen natürlichen Zahlen zur Indizierung verwenden, da man das n-te Objekt und Differential explizit in der internen Sprache angeben kann (anstatt nur zeigen zu können, dass es existiert).

Intuitiv liegt der Grund für das Scheitern von Bedingung (4.4) darin, dass diese den Objekten I, J erlaubt, beliebig variabel sein zu dürfen. Daher ist eine Definition sinnvoll, die die Variabilität begrenzt:

Definition 4.47. (1) Ein Objekt eines Topos $\mathcal{E} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Set}$ über Set heißt genau dann *konstant*, wenn es von der Form

$$\gamma^* I = \coprod_{i \in I} 1$$

für eine Menge I ist.

(2) Ein Objekt $X \in \mathcal{E}$ heißt *lokal konstant*, wenn es eine gemeinsam epimorphe Familie $V_i \xrightarrow{p_i} 1$ gibt, sodass die Rückzüge $p_i^* X$ jeweils konstante Objekte in $\mathcal{E}/V_i$ sind.

(3) Die lokal konstanten Objekte aller Scheibenkategorien $\mathcal{E}/U$ fassen wir zu einer lokal-internen Kategorie $\mathbb{E}_{\mathrm{lc}}$ zusammen, d. h. $\mathbb{E}_{\mathrm{lc},U}$ soll die volle Unterkategorie der lokal konstanten Objekte von $\mathcal{E}/U$ sein. Die $\mathcal{E}/U$-Anreichung sei von der kartesisch abgeschlossenen Struktur von $\mathcal{E}/U$ induziert.

Aus den Exaktheitseigenschaften eines Topos folgt, dass der Rückzug eines konstanten Objekts konstant ist, und da Rückzüge gemeinsam epimorpher Familie wieder gemeinsam epimorph sind, ist auch die Eigenschaft, ein lokal konstantes Objekt zu sein, unter Basiswechsel stabil. Damit ist $\mathbb{E}_{\mathrm{lc}}$ tatsächlich eine lokal-interne Kategorie. Das Verklebeaxiom (Definition 1.4) ist bezüglich aller Mengen erfüllt.

In der Definition der internen Sprache haben wir vorgeschrieben, dass Werte nur von Typen der Sorte $\mathbb{E}$ sein können, dem allgemeinen Fall hätten wir nämlich keinen Sinn geben können. Werte von Typen der Sorte $\mathbb{E}_{\mathrm{lc}}$ können wir aber zulassen.

Proposition 4.48. *Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ ist genau dann quasikohärent, wenn in der internen Sprache von $\mathcal{E} := \mathrm{Sh}(X)$ gilt:*

$$\mathcal{E} \models \exists I, J \colon \mathbb{E}_{\mathrm{lc}}.\ \ulcorner \text{es gibt eine exakte Sequenz der Form } \mathcal{O}_X^J \to \mathcal{O}_X^I \to \mathcal{F} \to 0 \urcorner.$$

Beweis. Die interne Aussage bedeutet, dass es eine offene Überdeckung von X gibt, sodass es zu jeder Überdeckungsmenge U konstante Objekte $I = \gamma^* M$, $J = \gamma^* N$ und eine exakte Sequenz der Form

$$[\![\mathcal{O}_X^J]\!] \longrightarrow [\![\mathcal{O}_X^I]\!] \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

gibt. Objekte der Sorte $\mathbb{E}_{\mathrm{lc}}$ sind aus interner Sicht diskret, daher kann das interne Koprodukt

$$\mathcal{O}_X^I = \bigoplus_{i : I} \mathcal{O}_X$$

als Untermodul des Produkts $\bigtimes_{i : I} \mathcal{O}_X$ konstruiert werden und stimmt dann mit der externen Definition von $\mathcal{O}_X^M$ überein (Proposition 1.29). Damit folgt die Behauptung. □

4.4.3. Flache Moduln

Definition 4.49. Ein A-Modul M heißt genau dann *flach*, wenn für alle $p \geq 0$ und Vektoren $m : M^p$, $a : A^p$ in suggestiver Notation gilt:

$$a^T m = 0 \implies \bigvee_{q \geq 0} \exists n : M^q, B : A^{p \times q}.\ Bn = m \text{ und } a^T B = 0.$$

Anschaulich besagt diese Definition, dass jede Relation zwischen Elementen aus M schon von einer Relation von Elementen aus A herkommt. Sie ist (auch konstruktiv) äquivalent zur üblichen Definition, dass der Funktor $\_ \otimes_A M$ exakt ist [30, Kap. III.5], [13, Abschn. II.6.12], hat aber mehrere Vorteile: Wenn man sie für jede Zahl $p \geq 0$ einzeln betrachtet, ist sie geometrisch; sie setzt nicht voraus, dass man schon eine Konstruktion des Tensorprodukts zur Verfügung hat; und man kann durch eine explizite und konstruktiv zulässige Rechnung sehen, dass Moduln über geometrischen Körpern flach sind.

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Traditionell wird das Tensorprodukt zweier $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ als Vergarbung der Prägarbe

$$U \subseteq X \text{ offen} \longmapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

definiert und dann nachgerechnet, dass die erwartete universelle Eigenschaft, dass $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ den Funktor $\mathrm{Bilin}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}; \_)$ darstellt, erfüllt ist. Mit der internen Sprache ist auch ein anderes Vorgehen möglich: Man kann die gewohnte Konstruktion des Tensorprodukts gewöhnlicher Moduln verwenden.

Definition 4.50. Das *Tensorprodukt* zweier $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ ist der über die interne Sprache als Quotient eines freien Moduls definierte $\mathcal{O}_X$-Modul

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} := \langle x \otimes y \mid x : \mathcal{F}, y : \mathcal{G} \rangle_{\mathcal{O}_X} / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation $(\sim)$ die übliche ist.

Wie wir schon in Bemerkung 4.35(1) gesehen haben, benötigen wir ein Objekt natürlicher Zahlen, um ohne Diskretheitsvoraussetzungen an $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ den genannten freien Modul konstruieren zu können. Ein solches ist in $\mathrm{Sh}(X)$, wie auch in jedem Topos, der abzählbare Kolimiten zulässt, auch in der Tat vorhanden.

Proposition 4.51. *Das intern definierte Tensorprodukt $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ hat die erwartete externe universelle Eigenschaft.*

Beweis. Es ist klar, dass das intern definierte Tensorprodukt aus Sicht der internen Sprache die erwartete Eigenschaft hat, weil der bekannte Beweis dieser Tatsache konstruktiv ist. Für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{H}$ haben wir also intern natürliche Isomorphien

$$\{\varphi : [\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}, \mathcal{H}] \mid \varphi\ \mathcal{O}_X\text{-linear}\} \cong \{\psi : [\mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mathcal{H}] \mid \psi\ \mathcal{O}_X\text{-bilinear}\},$$

deren Abbildungsterme man explizit angeben kann und daher auch Isomorphismen auf globalen Schnitten induzieren:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}, \mathcal{H}) \cong \mathrm{Bilin}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}; \mathcal{H}).$$

Das ist gerade die externe universelle Eigenschaft. □

Proposition 4.52. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sind äquivalent:*

(1) $\mathcal{F}$ *ist* flach, *d. h. die Halme $\mathcal{F}_x$ sind für alle $x \in X$ flache $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln.*

(2) $\mathrm{Sh}(X) \models \ulcorner \mathcal{F}$ *ist ein flacher* $\mathcal{O}_X$*-Modul*$\urcorner$.

(3) $\mathrm{Zar}(X) \models \ulcorner \mathcal{F}_{\text{groß}}$ *ist ein flacher* $\mathbb{A}^1_X$*-Modul*$\urcorner$.

Dabei bezeichnet „$\mathcal{F}_{\text{groß}}$" die auf dem großen Zariskisitus definierte Modulgarbe

$$\mathcal{F}_{\text{groß}}(T \xrightarrow{f} X) := (f^*\mathcal{F})(T) = (f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T)(T).$$

Beweis. Die in (2) angegebene Bedingung ist (wenn man die Teilaussagen für $p \geq 0$ einzeln betrachtet) geometrisch und gilt daher genau dann in $\mathrm{Sh}(X)$, wenn sie halmweise gilt. Das zeigt schon die Äquivalenz mit (1).

Da nach Proposition 4.3 die Einschränkungsfunktoren $\mathrm{Zar}(X) \xrightarrow{f^*_{\text{klgr}}} \mathrm{Sh}(T)$ gemeinsam konservativ sind, ist Aussage (3) genau dann erfüllt, wenn für alle X-Schemata T die $\mathcal{O}_T$-Moduln $f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T$ flach sind. Das ist bekanntlich äquivalent zu Aussage (1). □

Korollar 4.53. *Ein Morphismus $X \xrightarrow{f} S$ von Schemata ist genau dann flach, wenn*

$$\mathrm{Sh}(X) \models \ulcorner \mathcal{O}_X \textit{ ist ein flacher } f^{-1}\mathcal{O}_S\textit{-Modul}\urcorner.$$

Beweis. Klar, denn nach Definition ist f genau dann flach, wenn $\mathcal{O}_X$ im üblichen Sinn flach über $f^{-1}\mathcal{O}_S$ ist; und nach der Proposition stimmt der interne Flachheitsbegriff mit dem externen überein. □

Korollar 4.54. *Intuitionistisch lässt sich nicht zeigen, dass Moduln über Körpern von Brüchen stets flach sind.*

Beweis. Sonst wäre nach Proposition 4.52 jeder $\mathcal{O}_X$-Modul flach, da $\mathbb{A}^1_X$ ein Körper von Brüchen ist. □

A. Axiome für die affine Gerade des großen Zariskitopos

Grundlegend in synthetischer Differentialgeometrie ist das Axiom, dass jede Abbildung der reellen Zahlen in sich um jeden Punkt eindeutig in eine Potenzreihe entwickelbar ist [20, Thm. 5.3]. Ein algebraisches Pendant zu den reellen Zahlen im großen Zariskitopos $\mathrm{Zar}(S)$ eines Schemas S ist der Ring $\underline{\mathbb{A}}^1_S$, von dem wir gesehen haben, dass er sogar ein Körper von Brüchen ist.

Es liegt also nahe, Abbildungen $\underline{\mathbb{A}}^1_S \to \underline{\mathbb{A}}^1_S$ genauer darauf zu untersuchen, ob sie aus interner Sicht ein ähnliches Axiom erfüllen. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass das in der Tat der Fall ist.

Definition A.1. (1) Sei R ein interner Ring in einem Topos $\mathcal{E}$ mit einem Objekt natürlicher Zahlen N. Dann ist der interne Polynomring $R[T]$ durch den Ausdruck

$$R[T] := \{\varphi : [N, R] \mid \exists n : N.\ \forall m : N.\ m \geq n \Rightarrow \varphi(m) = 0\}$$

der internen Sprache von $\mathcal{E}$ mit der offensichtlichen Ringstruktur gegeben.

(2) Für eine externe natürliche Zahl $n \geq 0$ wollen wir mit „T^n“ folgenden Term der internen Sprache bezeichnen:

$$T^n := \lambda(k : N).\ \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 1 + \cdots + 1 \ (n \text{ Summanden}), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fallunterscheidung ist intern zulässig.

Da ein Objekt natürlicher Zahlen aus interner Sicht stets diskret ist, stimmt diese Konstruktion mit dem intern definierten Koprodukt $\bigoplus_{n:N} R$ überein, wobei natürlich die Ringstruktur eine andere ist. Der Grad eines Polynoms aus $R[T]$ ist nicht wohldefiniert, wenn R nicht diskret ist, da man nicht entscheiden kann, welcher der kleinste Koeffizient ist, der nicht verschwindet.

Proposition A.2. *Sei R ein interner Ring in einem Topos $\mathcal{E}$, der abzählbare Koprodukte besitzt. Dann gilt folgende Darstellungsaussage:*

$$\mathcal{E} \models \forall \varphi : R[T].\ \bigvee_{n \geq 0} \exists a_0, \ldots, a_n : R.\ \varphi = a_0 T^0 + \cdots + a_n T^n.$$

Beweis. Da $\mathcal{E}$ abzählbare Koprodukte besitzt, besitzt $\mathcal{E}$ ein Objekt natürlicher Zahlen; ein solches kann beispielsweise durch $N := \coprod_{n \in \mathbb{N}} 1$ definiert werden, wobei der Index die externen natürlichen Zahlen durchläuft. Durch Induktion, oder auch direkt über die Konstruktion, kann man die Darstellungsaussage

$$\mathcal{E} \models \forall n\colon N.\ \bigvee_{m \geq 0} n = 1 + \cdots + 1 \ (m \text{ Summanden})$$

zeigen, wobei die Disjunktion durch alle externen natürlichen Zahlen indiziert wird. Damit kann man leicht die Behauptung zeigen. □

Für uns ist wichtig, dass die vorhergehende Proposition auf den großen Zariskitopos des Schemas S anwendbar ist.

Proposition A.3. *Bezeichne* $\underline{\mathbb{A}}^1_S[T] \in \mathrm{Zar}(S)$ *den intern definierten Polynomring mit Koeffizienten aus* $\underline{\mathbb{A}}^1_S$*. Dann gilt jeweils in der internen Sprache von* $\mathrm{Zar}(S)$*:*

(1) *Verschwindet ein Polynom mit Koeffizienten aus* $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ *an allen Stellen, ist es schon das Nullpolynom.*

(2) *Jede Abbildung* $\underline{\mathbb{A}}^1_S \to \underline{\mathbb{A}}^1_S$ *ist die Auswertungsfunktion genau eines Polynoms aus* $\underline{\mathbb{A}}^1_S[T]$*.*

Beweis. (1) Nach der Darstellungsaussage müssen wir nur für jede externe natürliche Zahl $n \geq 0$ folgende Aussage der internen Sprache zeigen:

$$\mathrm{Zar}(S) \models \forall a_0, \ldots, a_n \colon \underline{\mathbb{A}}^1_S.\ \left[\forall x\colon \underline{\mathbb{A}}^1_S.\ \sum_{i=0}^{n} a_n x^n = 0\right] \implies a_0 = \cdots = a_n = 0.$$

Da S durch affine Schemata überdeckt werden kann, können wir dank des lokalen Charakters der Stacksemantik ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $S = \operatorname{Spec} A$ affin ist. Dann müssen wir folgende übersetzte Aussage zeigen:

Für alle A-Algebren B und Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in B$ gilt:

Sollte für alle B-Algebren C und alle Elemente $x \in C$ gelten, dass $\sum_{i=0}^{n} a_n x^n = 0 \in C$,

dann folgt schon $a_0 = \cdots = a_n = 0 \in B$.

Setzt man speziell $C := B[T]$ und $x := T \in B[T]$, ist klar, dass diese Aussage stimmt.

(2) Die Eindeutigkeitsaussage ist nach dem ersten Teil klar. Wir müssen also nur noch die interne Aussage

$$\mathrm{Zar}(S) \models \forall f \colon [\underline{\mathbb{A}}^1_S, \underline{\mathbb{A}}^1_S].\ \bigvee_{n \geq 0} \exists a_0, \ldots, a_n \colon \underline{\mathbb{A}}^1_S.\ f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \mathrm{id}^i$$

zeigen. Wieder können wir dazu annehmen, dass $S = \operatorname{Spec} A$ affin ist. Da die Menge $[\underline{\mathbb{A}}^1_S, \underline{\mathbb{A}}^1_S](\operatorname{Spec} B)$ mit der Menge der globalen Schnitte der Strukturgarbe von $\operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} A[T] \cong \operatorname{Spec} B[T]$ identifiziert werden kann, lautet die Übersetzung der Aussage dann:

> Für alle A-Algebren B und Elemente $f \in B[T]$ gibt es lokal Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in B$ mit $f = \sum_{i=0}^n a_i T^i$.

Es ist klar, dass diese Aussage erfüllt ist; wir müssen nicht einmal zu Lokalisierungen übergehen. □

Wir erinnern daran, dass wir in Überlegung 4.32 ein Kriterium für die Affinität eines Schemamorphismus $X \to S$ motiviert haben, nämlich dass aus interner Sicht die kanonische Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \underline{X} & \longrightarrow & [[\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S], \underline{\mathbb{A}}^1_S]_{\underline{\mathbb{A}}^1_S} \\ x & \longmapsto & \_(x) \end{array} \tag{A.1}$$

in die Menge der $\underline{\mathbb{A}}^1_S$-Algebrenhomomorphismen von $[\underline{X}, \underline{\mathbb{A}}^1_S]$ in den Grundkörper $\underline{\mathbb{A}}^1_S$ bijektiv ist. Akzeptieren wir die Aussage der vorhergehenden Proposition als Axiom, ist die interne Sprache mächtig genug, um die Bijektivität dieser Abbildung im Fall $X = \mathbb{A}^1_S$ zu zeigen:

> Wir zeigen zunächst die Injektivität. Seien dazu $x, y : \underline{\mathbb{A}}^1_S$ mit $\_(x) = \_(y)$ gegeben. Dann folgt speziell $\mathrm{id}(x) = \mathrm{id}(y)$, also $x = y$.
>
> Sei zur Surjektivität ein beliebiger $\underline{\mathbb{A}}^1_S$-Algebrenhomomorphismus $\psi : [\underline{\mathbb{A}}^1_S, \underline{\mathbb{A}}^1_S] \to \underline{\mathbb{A}}^1_S$ vorgegeben. Wir setzen $x := \psi(\mathrm{id}) : \underline{\mathbb{A}}^1_S$. Ist dann $f : [\underline{\mathbb{A}}^1_S, \underline{\mathbb{A}}^1_S]$ beliebig, gilt $\psi(f) = f(x)$, denn nach dem Axiom können wir f als Polynomfunktion schreiben,
>
> $$f = \sum_{i=0}^n a_i \, \mathrm{id}^i,$$
>
> und dann die einfache Rechnung
>
> $$\psi(f) = \psi\Big(\sum_{i=0}^n a_i \, \mathrm{id}^i\Big) = \sum_{i=0}^n a_i \psi(\mathrm{id})^i = \sum_{i=0}^n a_i x^i = f(x)$$
>
> durchführen. Da f beliebig war, folgt $\psi = \_(x)$.

Wenn Überlegung 4.32 richtig ist, folgt damit als Korollar, dass der Schemamorphismus $\mathbb{A}^1_S \to S$ affin ist.

Literatur

[1] J. Adamek und J. Rosicky. *Locally Presentable and Accessible Categories*. Bd. 189. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge University Press, 1994.

[2] M. Anel. „Grothendieck topologies from factorisation systems“. 2009. URL: `http://thales.math.uqam.ca/~anelm/mat/doc/factorisation.pdf`.

[3] S. Awodey und A. Bauer. „Propositions as [Types]“. In: *J. Logic Comput.* 14.4 (2004), S. 447–471.

[4] J. Bell. „The development of categorical logic“. In: *Handbook of Philosophical Logic.* Hrsg. von D. Gabbay und F. Guenthner. 2. Aufl. Bd. 12. Springer-Verlag, 2005, S. 279–361.

[5] J. Chapman und F. Rowbottom. *Relative Category Theory and Geometric Morphisms: A Logical Approach.* Bd. 16. Oxford Logic Guides. Clarendon Press, 1992.

[6] T. Coquand. „A Completeness Proof for Geometrical Logic“. In: *Logic, Methodology and Philosophy of Sciences. Preceedings of the Twelfth International Congress.* Hrsg. von P. Hájek, L. Valdés-Villanueva und D. Westerståhl. 2005, S. 79–90.

[7] T. Coquand. „A remark about the theory of local rings“. 2008. URL: `http://www.cse.chalmers.se/~coquand/local.pdf`.

[8] T. Coquand und H. Lombardi. „A logical approach to abstract algebra“. In: *Math. Structures Comput. Sci* 16.5 (2006), S. 885–900.

[9] M. Coste, H. Lombardi und M. F. Roy. „Dynamical methods in algebra: effective Nullstellensätze“. In: *Ann. Pure Appl. Logic* 111.3 (2001), S. 203–256.

[10] M. Erné u. a. „A primer on Galois connections“. In: *Ann. New York Acad. Sci.* 704 (1993), S. 103–125.

[11] M. Escardó. „Synthetic topology of data types and classical spaces“. In: *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.* 87 (2004), S. 21–156.

[12] F. Geißler. „Topos-theoretische Grundlagen zu G. C. Wraiths Generic Galois Theory of local rings“. Bachelorarbeit. Universität Augsburg, 2012.

[13] S. I. Gelfand und Yu. I. Manin. *Methods of homological algebra.* 2. Aufl. Springer Monogr. Math. Springer-Verlag, 2003.

[14] M. Hakim. *Topos annelés et schémas relatifs.* Bd. 64. Ergeb. Math. Grenzgeb. Springer-Verlag, 1972.

[15] P. T. Johnstone. „Rings, fields, and spectra“. In: *J. Algebra* 49.1 (1977), S. 238–260.

[16] P. T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*. Oxford University Press, 2002.

[17] P. T. Johnstone. *Stone Spaces*. Bd. 3. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1982.

[18] P. T. Johnstone. *Topos Theory*. Bd. 10. L.M.S. Monographs. Academic Press, 1977.

[19] P. T. Johnstone und I. Moerdijk. „Local maps of toposes". In: *Proc. London Math. Soc.* s3-58.2 (1989), S. 281–305.

[20] A. Kock. *Synthetic Differential Geometry*. 2. Aufl. Bd. 333. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge University Press, 2006.

[21] A. Kock. „Universal projective geometry via topos theory". In: *J. Pure Appl. Algebra* 9.1 (1976), S. 1–24.

[22] A. Kock, P. Lecouturier und C. J. Mikkelsen. „Some topos theoretic concepts of finiteness". In: *Model Theory and Topoi*. Hrsg. von F. W. Lawvere, C. Maurer und G. C. Wraith. Bd. 445. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1975, S. 209–283.

[23] T. Leinster. „An informal introduction to topos theory". In: *Publications of the nLab* 1.1 (2011).

[24] T. Leinster. „The Yoneda Lemma: What's It All About?" 2000. URL: `http://www.maths.gla.ac.uk/~tl/categories/yoneda.ps`.

[25] D. Lešnik. „Synthetic Topology and Constructive Metric Spaces". Diss. University of Ljubljana, 2010.

[26] S. Mac Lane und I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: a First Introduction to Topos Theory*. Universitext. Springer-Verlag, 1992.

[27] M. Maietti. „Modular correspondence between dependent type theories and categories including pretopoi and topoi". In: *Math. Structures Comp. Sci.* 15.6 (2005), S. 1089–1149.

[28] E. Makai Jr. „Automorphisms and full embeddings of categories in algebra and topology". In: *Category theory at work, Proc. Workshop, Bremen 1991*. Hrsg. von H. Herrlich und H.-E. Porst. Bd. 18. Res. Expo. Math. Heldermann Verlag, 1991, S. 217–260.

[29] C. McLarty. „Review of J. Chapman and F. Rowbottom, Relative category theory and geometric morphisms: A logical approach". In: *Mod. Log.* 4.3 (1994), S. 345–348.

[30] R. Mines, F. Richman und W. Ruitenburg. *A Course in Constructive Algebra*. Universitext. Springer-Verlag, 1988.

[31] I. Moerdijk und E. Palmgren. „Type Theories, Toposes and Constructive Set Theory: Predicative Aspects of AST". In: *Ann. Pure Appl. Logic* 114.1–3 (2000), S. 155–201.

[32] I. Moerdijk und J. J. C Vermeulen. *Proper maps of toposes*. Mem. Amer. Math. Soc. 705. American Mathematical Society, 2000.

[33] C. Mulvey. „Intuitionistic algebra and representations of rings". In: *Recent Advances in the Representation Theory of Rings and C^*-algebras by Continuous Sections.* Hrsg. von K. H. Hofmann und J. R. Liukkonen. Bd. 148. Mem. Amer. Math. Soc. American Mathematical Society, 1974.

[34] J. Penon. „Catégories localement internes". In: *C. R. Acad. Sc. Paris Sér. A* 278 (1974), S. 1577–1580.

[35] A. Pitts. „Polymorphism is Set Theoretic, Constructively". In: *Category Theory and Computer Science, Proc. Edinburgh 1987.* Hrsg. von D. Pitt, A. Poigné und D. Rydeheard. Bd. 283. Lect. Notes Comput. Sci. Springer-Verlag, 1987, S. 12–39.

[36] G. Reyes. „Cramer's rule in the Zariski topos". In: *Applications of Sheaves.* Hrsg. von M. Fourman, C. Mulvey und D. Scott. Bd. 753. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1979, S. 586–594.

[37] J. Reynolds. „Polymorphism is not set-theoretic". In: *Semantics of Data Types, Proc. Sophia-Antipolis 1984.* Hrsg. von K. Gilles, D. MacQueen und G. Plotkin. Bd. 173. Lect. Notes Comput. Sci. Springer-Verlag, 1984, S. 145–156.

[38] E. Rijke. „Homotopy Type Theory". Masterarbeit. Utrecht University, 2012.

[39] M. Shulman. „Stack semantics and the comparison of material and structural set theories". 2010.

[40] The Stacks Project Authors. *Stacks Project.* `http://stacks.math.columbia.edu/`.

[41] A. S. Troelstra und D. van Dalen. *Constructivism in Mathematics: An Introduction.* North-Holland Publishing, 1988.

[42] J. J. C. Vermeulen. „Proper maps of locales". In: *J. Pure Appl. Algebra* 92.1 (1994), S. 79–107.

[43] S. Vickers. „Locales and Toposes as Spaces". In: *Handbook of Spatial Logics.* Hrsg. von M. Aiello, I. Pratt-Hartmann und J. van Benthem. Springer-Verlag, 2007, S. 429–496.