Triangulierte Kategorien und Massey-Produkte

Ingo Blechschmidt

11. November 2010
(Arbeitsversion)

Inhaltsverzeichnis

1 Das Massey-Produkt in triangulierten Kategorien

1.1 Das Massey-Produkt von Komplexen der Länge 4

Sei $\mathcal{D}$ eine triangulierte Kategorie und $X^\bullet\colon X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \xrightarrow{d^2} X^3$ ein Komplex über $\mathcal{D}$, d. h. es gelte $d^2 d^1 = 0$ und $d^3 d^2 = 0$.

Definition 1.1. Die Klasse aller Morphismen der Form $p[-1]q \in \operatorname{Hom}(X^0, X^3[-1])$, wobei $Y \xrightarrow{p} X^3$ und $X^0 \xrightarrow{q} Y[-1]$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[drrr, "q", "{[-1]}"'] & & X^1 \arrow[rr, "d^1"] & & X^2 \arrow[rr, "d^2"] \arrow[dl] & & X^3 \\
& & & Y \arrow[ul, "{[1]}"] \arrow[urrr, "p"'] \arrow[u, phantom, "\star"] & & &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

kommutativ machen und Y ein beliebiger Kegel von $X^1 \xrightarrow{d^1} X^2$ ist, heißt *Massey-Produkt von* $X^\bullet$ und wird als $\langle\langle d^0, d^1, d^2 \rangle\rangle$ notiert.

Wir wollen zunächst die Nichttrivialität des so definierten Massey-Produkts zeigen:

Proposition 1.2. *Das Massey-Produkt* $\langle\langle d^0, d^1, d^2 \rangle\rangle$ *ist stets nichtleer.*

Beweis. Die Existenz eines Kegels Y von d^1 ist nach den Axiomen triangulierter Kategorien gesichert. Um einen Morphismus $X^0 \xrightarrow{q} Y[-1]$ zu erhalten, der das linke Dreieck kommutativ macht, betrachten wir die zum ausgezeichneten Dreieck $X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} X^1[1]$ gehörige lange exakte Sequenz

$$\cdots \to \mathrm{Hom}(X^0, Y[-1]) \xrightarrow{v[-1]_\star} \mathrm{Hom}(X^0, X^1) \xrightarrow{d^1_\star} \mathrm{Hom}(X^0, X^2) \xrightarrow{u_\star} \mathrm{Hom}(X^0, Y) \to \cdots . \tag{2}$$

Wegen $d^1 d^0 = 0$ liegt d^0 im Kern von $d^1_\star$ und damit im Bild von $v[-1]_\star$; somit erhält man einen Morphismus $X^0 \xrightarrow{q} Y[-1]$ mit $d^0 = v[-1]_\star(q) = v[-1]q$.

Auf ähnliche Art und Weise erhält man einen ins Diagramm passenden Pfeil $Y \xrightarrow{p} X^3$: Aus der Exaktheit von

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}(X^1, X^3) \xleftarrow{(d^1)^\star} \mathrm{Hom}(X^2, X^3) \xleftarrow{u^\star} \mathrm{Hom}(Y, X^3) \xleftarrow{v^\star} \mathrm{Hom}(X^1[1], X^3) \leftarrow \cdots \tag{3}$$

folgt wegen $d^2 \in \ker (d^1)^\star$, dass d^2 im Bild von $u^\star$ liegen und es somit einen Morphismus $Y \xrightarrow{p} X^3$ mit $pu = d^2$ geben muss. $\square$

Je zwei Elemente von $\langle\langle d^0, d^1, d^2 \rangle\rangle$ unterscheiden sich um ein Element aus der Untergruppe

$$A := d^2[-1]\mathrm{Hom}(X^0, X^2[-1]) + \mathrm{Hom}(X^1, X^3[-1])d^0 \subseteq \mathrm{Hom}(X^0, X^3[-1]), \tag{4}$$

genauer zeigen wir sogar, dass $\langle\langle d^0, d^1, d^2 \rangle\rangle$ eine Verschiebung von A ist:

Proposition 1.3. *Das Massey-Produkt* $\langle\langle d^0, d^1, d^2 \rangle\rangle$ *ist von der Form*

$$\langle\langle d^0, d^1, d^2 \rangle\rangle = p[-1]q + A,$$

wobei $p[-1]q$ *ein beliebiges Element des Produkts bezeichnet.*

Beweis. „$\subseteq$“: Sei ein beliebiges Element $X^0 \xrightarrow{\tilde{q}} \tilde{Y} \xrightarrow{\tilde{p}[-1]} X^3[-1]$ von $\langle\!\langle d^0, d^1, d^2 \rangle\!\rangle$ gegeben, es gibt also ein Diagramm wie (1), wobei der Kegel $\tilde{Y}$ in diesem Diagramm nicht mit dem zu $p[-1]q$ übereinstimmen muss.

Nach Axiom (TR3) triangulierter Kategorien erhalten wir aus

$$\begin{tikzcd}
X^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, equal] & X^2 \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, dashed, "\varphi", "\cong"'] & X^1[-1] \arrow[d, equal] \\
X^1 \arrow[r, "d^1"] & X^2 \arrow[r, "\tilde{u}"] & \tilde{Y} \arrow[r, "\tilde{v}"] & X^1[-1]
\end{tikzcd}$$

einen Morphismus $Y \xrightarrow{\varphi} \tilde{Y}$, der ein Isomorphismus ist, da die anderen vertikalen Pfeile des Diagramms Isomorphismen sind.

In die Differenz $\tilde{p}[-1]\tilde{q} - p[-1]q$ schieben wir einen Zusatzterm ein,

$$\begin{aligned}
\tilde{p}[-1]\tilde{q} - p[-1]q &= \tilde{p}[-1]\tilde{q} - \tilde{p}[-1]\varphi[-1]q + \tilde{p}[-1]\varphi[-1]q - p[-1]q \\
&= \tilde{p}[-1]\underbrace{(\tilde{q} - \varphi[-1]q)}_{=:\,a} + \underbrace{(\tilde{p}\varphi - p)}_{=:\,b}[-1]q.
\end{aligned}$$

Wegen $\tilde{v}[-1]a = \tilde{v}[-1]\tilde{q} - \tilde{v}[-1]\varphi[-1]q = \tilde{v}[-1]\tilde{q} - v[-1]q = d^0 - d^0 = 0$ folgt aus der langen exakten Sequenz zum Kegel $\tilde{Y}$ (wie (2)), dass a in $\operatorname{im} \tilde{u}[-1]_\star = \ker \tilde{v}[-1]_\star$ liegt und es somit einen Morphismus $X^0 \xrightarrow{g} X^2[-1]$ mit $a = \tilde{u}[-1]g$ gibt.

Ähnlich folgt wegen $bu = \tilde{p}\varphi u - pu = \tilde{p}\tilde{u} - pu = d^2 - d^2 = 0$ und der Sequenz (3), dass b in $\ker u^\star = \operatorname{im} v^\star$ liegt und es somit einen Pfeil $X^1[1] \xrightarrow{h} X^3$ mit $b = hv$ gibt.

Zusammengenommen lässt sich die Differenz $\tilde{p}[-1]\tilde{q} - p[-1]q$ daher wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}[-1]\tilde{q} - p[-1]q &= \tilde{p}[-1]a + b[-1]q \\
&= \tilde{p}[-1]\tilde{u}[-1]g + h[-1]v[-1]q \\
&= d^2[-1]g + h[-1]d^0 \in A
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

„$\supseteq$“: Sei ein beliebiges Element $f = p[-1]q + (d^2[-1]g + h[-1]d^0)$ aus $p[-1]q + A$ gegeben. Wir definieren $\tilde{p} := p + hv$ und $\tilde{q} := q + u[-1]g$.

Dann gilt $\tilde{p}u = pu + hvu = d^2 + 0 = d^2$ und $v[-1]\tilde{q} = v[-1]q + (vu)[-1]g = d^0 + 0 = d^0$, somit liegt $\tilde{p}[-1]\tilde{q}$ im Massey-Produkt $\langle\!\langle d^0, d^1, d^2 \rangle\!\rangle$ und die Behauptung folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}[-1]\tilde{q} &= (p + hv)[-1] \circ (q + u[-1]g) \\
&= p[-1]q + p[-1]u[-1]g + h[-1]v[-1]q + h[-1]v[-1]u[-1]g \\
&= p[-1]q + d^2[-1]g + h[-1]d^0 \\
&= f
\end{aligned}$$

□

1.2 Das Massey-Produkt von Komplexen beliebiger endlicher Länge

Die Definition des Massey-Produkts für Komplexe der Länge 4 wollen wir auf Komplexe beliebiger endlicher Länge erweitern.

Sei $\mathcal{D}$ eine triangulierte Kategorie und $X^\bullet\colon X^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n$ ein Komplex der Länge $n+1$ über $\mathcal{D}$, d. h. es gelte $d^{i+1}d^i = 0$ für $i = 0, \ldots, n-2$.

Definition 1.4. Die Klasse aller Morphismen der Form $p[2-n]q \in \mathrm{Hom}(X^0, X^n[2-n])$, wobei $X^0 \xrightarrow{q} \hat{T}[2-n]$ und $\hat{T} \xrightarrow{p} X^n$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[ddrr, "q", "{[2-n]}"'] & & X^1 \arrow[rr, "d^1"] & & \cdots \arrow[rr, "d^{n-2}"] & & X^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] \arrow[ddll, "\hat{\beta}"'] & & X^n \\
& & & & & & & & \\
& & \hat{T} \arrow[uu, "\hat{\alpha}", "{[n-2]}"'] \arrow[uurrrrrr, "p"'] & & & & & &
\end{tikzcd} \tag{5}$$

kommutativ machen, heißt *Massey-Produkt von* $X^\bullet$ und wird als $\langle d^0, \ldots, d^{n-1}\rangle$ notiert.

Dabei ist T eine beliebige Faltung des Teilkomplexes $X^1 \to \cdots \to X^{n-1}$ mit zugehörigen Morphismen $T \xrightarrow{\alpha} X^1$ und $X^{n-1}[-(n-2)] \xrightarrow{\beta} T$, und $\hat{T} := T[n-2]$, $\hat{\alpha} := \alpha[n-2]$, $\hat{\beta} := \beta[n-2]$.

Für Komplexe mit Länge mindestens 5 kann das so definierte Massey-Produkt leer sein.

Der Spezialfall von Komplexen der Länge 3

Das Massey-Produkt eines Komplexes $X^\bullet\colon X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \xrightarrow{d^1} X^2$ der Länge 3 ist die einelementige Menge $\{0\}$, denn das einzige Postnikov-System zum Teilkomplex X^1 von X ist

$$\begin{tikzcd}
X^1 \\
X^1[1] \arrow[u, "{[1]}", "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

mit Faltung $X^1[1][-1] = X^1 =: T$; die assoziierten Morphismen $T \xrightarrow{\alpha} X^1$ und $X^1[-0] \xrightarrow{\beta} T$ sind beide die Identitätsmorphismen auf X^1. Die einzigen Morphismen $X^0 \xrightarrow{q} X^1$ und $X^1 \xrightarrow{p} X^2$, die in ein Diagramm wie (5) passen, sind daher genau d^0 bzw. d^1. Das Massey-Produkt besteht daher genau aus $p[2-2]q = d^1 d^0 = 0$.

Zusammenhang zum Massey-Produkt für Komplexe der Länge 4

Für Komplexe der Länge 4 stimmt die Definition für allgemeine triangulierte Kategorien mit der speziellen dieses Abschnitts bis auf ein Vorzeichen überein:

Proposition 1.5. *Es gilt* $\langle d^0, d^1, d^2\rangle = -\langle\!\langle d^0, d^1, d^2\rangle\!\rangle$.

Beweis. „$\subseteq$“: Sei $p[-1]q$ ein beliebiges Element von $\langle d^0, d^1, d^2\rangle$, dann gibt es ein kommutatives Diagramm wie (5). Aus dem zugehörigen Postnikov-System zu $X^1 \xrightarrow{d^1} X^2$,

$$\begin{tikzcd}
& X^1[1] \arrow[rr, "{d^1[1]}", "{[1]}"'] \arrow[dr, "{d^1[1]\,[1]}"] \arrow[d, phantom, "\star"] & & X^2 \\
\hat{T}[1] \arrow[ur, "{\hat{\alpha}[1]}", "{[1]}"'] & {} & X^2[1] \arrow[ll, "{\hat{\beta}[1]}"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

erhält man durch dreifache Linksrotation einen Kegel von $X^1 \xrightarrow{d^1} X^2$:

$$X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \xrightarrow{\hat{\beta}} \hat{T} \xrightarrow{-\hat{\alpha}} X^1[1]$$

Das Minuszeichen vor dem letzten Pfeil könnte man auch zum vorletzten Pfeil rechnen, ganz ohne geht es aber nicht.

Wir setzen nun $\tilde{p} := p$ und $\tilde{q} := -q$. Dann gilt $-p[-1]q = \tilde{p}[-1]\tilde{q} \in \langle\!\langle d^0, d^1, d^2\rangle\!\rangle$, denn $\tilde{p}\hat{\beta} = p\hat{\beta} = d^2$ und $(-\hat{\alpha})[-1]\tilde{q} = \hat{\alpha}[-1]q = d^0$, woraus die Inklusion folgt.

„$\supseteq$“: Sei $-p[-1]q \in -\langle\!\langle d^0, d^1, d^2\rangle\!\rangle$ beliebig gegeben. Dann gibt es also einen Kegel Y mit Morphismen $X^2 \xrightarrow{u} Y$ und $Y \xrightarrow{v} X^1[1]$ derart, dass das Diagramm (1) kommutiert.

Aus diesen Daten bauen wir nun ein Rechts-Postnikov-System zu $X^1 \xrightarrow{d^1} X^2$:

$$\begin{tikzcd}
& X^1[1] \arrow[rr, "{d^1[1]}", "{[1]}"'] \arrow[dr, "{d^1[1]\,[1]}"] \arrow[d, phantom, "\star"] & & X^2 \\
Y[1] \arrow[ur, "{-v[1]}", "{[1]}"'] & {} & X^2[1] \arrow[ll, "{u[1]}"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dessen Faltung ist $T := Y[1][-2] = Y[-1]$, die zugehörigen Morphismen $Y[-1] \xrightarrow{\alpha} X^1$ und $X^2[-1] \xrightarrow{\beta} Y[-1]$ sind $\alpha = -v[1][-2] = -v[-1]$ bzw. $\beta = u[1][-2] = u[-1]$.

Mit $\hat{T} := T[1]$, $\hat{\alpha} := \alpha[1] = -v$ und $\hat{\beta} := \beta[1] = u$ folgt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[drrr, "-q", "{[-1]}"'] & & X^1 \arrow[rr, "d^1"] & & X^2 \arrow[rr, "d^2"] \arrow[dl, "\hat{\beta}"'] & & X^3 \\
& & & \hat{T} \arrow[ul, "{[1]}"', "\hat{\alpha}"] \arrow[urrr, "p"'] & & &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, denn $\hat{\alpha}[-1] \circ (-q) = v[-1]q = d^0$ und $p\hat{\beta} = pu = d^2$. Somit gilt $-p[-1]q = p[-1] \circ (-q) \in \langle d^0, d^1, d^2 \rangle$, das war zu zeigen. □

1.3 Notwendige Bedingung für die Existenz von Elementen im Massey-Produkt

Sei weiterhin $X^\bullet \colon X^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n$ ein Komplex der Länge $n+1$ über einer triangulierten Kategorie $\mathcal{D}$.

Proposition 1.6. *Ist das Massey-Produkt $\langle d^0, \dots, d^{n-1} \rangle$ nichtleer, dann sind auch die Produkte $\langle d^1, \dots, d^{n-1} \rangle$ und $\langle d^0, \dots, d^{n-2} \rangle$ nichtleer und beide enthalten die Nullmorphismen des jeweiligen Typs.*

Beweis der Proposition. Sei ein Element $p[2-n]q \in \langle d^0, \dots, d^{n-1} \rangle$ gegeben, dann gibt es also ein Diagramm wie (5). Wir zeigen, dass 0 ein Element von $\langle d^1, \dots, d^{n-1} \rangle$ ist; den zweiten Teil der Behauptung zeigt man analog.

Um $0 \in \langle d^1, \dots, d^{n-1} \rangle$ zu zeigen, müssen wir ein Postnikov-System des Komplexes $X^2 \to \cdots \to X^{n-1}$ mit Faltung U und Morphismen r und s derart finden, dass

$$\begin{tikzcd}
X^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[drr, "s", "{[3-n]}"'] & X^2 \arrow[r, "d^1"] & \cdots \arrow[r, "d^{n-2}"] & X^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[dl, "\hat{\delta}"] & X^n \\
& & \hat{U} \arrow[ul, "{[n-3]}", "\hat{\gamma}"'] \arrow[urr, "r"'] & &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Dazu betrachten wir ein Rechts-Postnikov-System von $X^1 \to \cdots \to X^{n-1}$ zur aus dem Diagramm von $p[2-n]q$ gegebenen Faltung T:

$$\begin{tikzcd}
& X^1[n-2] \arrow[rr, "{d^1[n-2]}", "{[1]}"'] \arrow[dr, "\lambda"] & & X^2[n-3] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X^{n-1} \\
\hat{T}[1] \arrow[ur, "{\hat{\alpha}[1]}", "{[1]\,\star}"'] & & U[n-2] \arrow[ll, "\mu"'] \arrow[ur, "{\hat{\gamma}[1]}", "{[1]}"'] & & \cdots \arrow[ll] & X^{n-1}[1] \arrow[l] \arrow[u, "{[1]}", "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

Durch Abschneiden des linken Teildreiecks erhält man daraus ein Rechts-Postnikov-System von $X^2 \to \cdots \to X^{n-1}$ mit Faltung U und zugehörigen Pfeilen $U \xrightarrow{\hat{\gamma}[3-n]} X^2$ und $X^{n-1}[-(n-3)] \xrightarrow{\delta} U$.

Durch die Setzungen $r := p \circ \mu[-1]$ und $s := \lambda[2-n]$ werden die Kommutativitätsbedingungen erfüllt:

$$\hat{\gamma}[3-n]s = (\hat{\gamma}[1]\lambda)[2-n] = d^1[n-2][2-n] = d^1$$
$$r\hat{\delta} = p \circ \mu[-1] \circ \delta[n-3] = p(\mu\delta[n-2])[-1] = p\beta[n-2] = p\hat{\beta} = d^{n-1}$$

Damit ist gezeigt, dass das Massey-Produkt $\langle d^1, \dots, d^{n-1}\rangle$ den Morphismus $r[3-n]s$ enthält. Dieser Pfeil ist null,

$$r[3-n]s = p[3-n](\mu\lambda)[2-n] = 0,$$

da $\mu\lambda$ die Verkettung zweier aufeinanderfolgender Morphismen eines ausgezeichneten Dreiecks ist. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Die Umkehrung der Proposition gilt nicht, für das klassische Massey-Produkt gibt es explizite Gegenbeispiele [2]. Eine mögliche (triviale) Charakterisierung der Existenz von Elementen im Massey-Produkt kann man aber dem Beweis direkt ablesen:

Korollar 1.7. *Das Massey-Produkt $\langle d^0, \dots, d^{n-1}\rangle$ ist genau dann nichtleer, wenn es ein Postnikov-System von $X^1 \to \cdots \to X^{n-1}$ derart gibt, dass seine Abschneidungen nach dem Konstruktionsverfahren des Beweises Nullmorphismen als Elemente von $\langle d^1, \dots, d^{n-1}\rangle$ und $\langle d^0, \dots, d^{n-2}\rangle$ liefern.*

In dem Spezialfall, dass die triangulierte Kategorie $\mathcal{D}$ eine Homotopiekategorie von Komplexen ist, kann man dieses sog. *simulatene Verschwinden* konkret illustrieren, siehe dazu Abschnitt 2.2 auf S. 11.

1.4 Charakterisierung der Existenz von Postnikov-Systemen

Sei weiterhin $X^\bullet \colon X^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n$ ein Komplex der Länge $n+1$ über einer triangulierten Kategorie $\mathcal{D}$.

Proposition 1.8. *Der Komplex $X^\bullet$ besitzt genau dann eine Faltung, wenn der Nullmorphismus im Massey-Produkt $\langle d^0, \dots, d^{n-1}\rangle$ enthalten ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Wir benötigen zunächst ein Postnikov-System von $X^1 \to \cdots \to X^{n-1}$. Aus einem gegebenen Rechts-Postnikov-System von $X^\bullet$ mit Faltung P und zur Faltung gehörigen Morphismen $P \xrightarrow{u} X^0$, $X^n[-n] \xrightarrow{v} P$ erhalten wir dies in zwei Schritten wie folgt:

Wie im Beweis der vorherigen Proposition kann man das das System zunächst links, bei X^0, abschneiden. Daraus erhält man ein Rechts-Postnikov-System von $X^1 \to \cdots \to X^n$, dessen Faltung sei Q und die zugehörigen Pfeile seien $Q \xrightarrow{u'} X^1$ und $X^n[-(n-1)] \xrightarrow{v'} Q$. Nach Konstruktion gibt es noch einen Morphismus $X^0[n] \xrightarrow{\lambda} Q[n]$ mit $u'\lambda[-n] = d^0$.

Rechts-Postnikov-Systeme kann man nicht rechts (bei X^n) abschneiden, unter anderem deshalb, weil vom Diagonalpfeil mit Ziel X^n stets gefordert wird, dass er die Identität ist. Zu dem abgeschnittenen Rechts-Postnikov-System gibt es aber ein Links-Postnikov-System mit gleicher Faltung:

$$\begin{tikzcd}
X^1 \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & \cdots \arrow[rr] & & X^{n-1} \arrow[rr, "d^{n-1}"] \arrow[dr, "{\beta[n-2]}"] & & X^n \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\star"] & \\
& Z^1 & & \cdots \arrow[ll, "{[1]}"] & & Z^{n-1} \arrow[ll, "{[1]}"] \arrow[ur, "k"'] & {} & Q[n-1] \arrow[ll, "m", "{[1]}"']
\end{tikzcd}$$

Dieses kann man rechts, bei X^n, abschneiden und so ein Links-Postnikov-System von $X^1 \to \cdots \to X^{n-1}$ erhalten. Die Faltung dieses abgeschnittenen Systems ist $T := Z^{n-1}[-(n-2)]$, und es gilt $\hat{\alpha}m[1-n] = u'$.

Wir setzen nun $q := m[1-n]\lambda[-n]$ und $p := k$. Dann gilt in der Tat:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}[2-n]q &= \hat{\alpha}m[1-n]\lambda[-n] = u'\lambda[-n] = d^0 \\
p\hat{\beta} &= k\beta[n-2] = d^{n-1}
\end{aligned}$$

Damit ist $p[2-n]q \in \langle d^0, \ldots, d^{n-1}\rangle$. Die Behauptung folgt wegen

$$p[2-n]q = k[2-n]m[1-n]\lambda[-n] = (k[1]m)[1-n]\lambda[-n] = 0.$$

„$\Leftarrow$“: Sei $0 = p[2-n]q \in \langle d^0, \ldots, d^{n-1}\rangle$, somit gibt es ein Diagramm wie (5). Zur Faltung T in diesem Diagramm gibt es ein Rechts-Postnikov-System

$$\begin{tikzcd}
& X^1[n-2] \arrow[rr, "{d^1[n-2]}", "{[1]}"'] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\star"] & & X^2[n-3] \arrow[rr] & & \cdots \arrow[rr] & & X^{n-1} \\
T[n-1] \arrow[ur, "{\alpha[n-1]}", "{[1]}"'] & {} & Y^1 \arrow[ll] \arrow[ur, "{[1]}"'] & & \cdots \arrow[ll] & & X^{n-1}[1] \arrow[ll] \arrow[ur, "{[1]}", "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

aus welchem wir ein Postnikov-System von $X^0 \to \cdots \to X^n$ konstruieren wollen.

Als erstes ergänzen wir den Morphismus $X^0[n-1] \xrightarrow{q[n-1]} T[n-1]$ zu einem ausgezeichneten Dreieck

$$X^0[n-1] \xrightarrow{q[n-1]} T[n-1] \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} X^0[n] \tag{6}$$

und fügen es links an das Rechts-Postnikov-System von $X^1 \to \cdots \to X^{n-1}$ an. Da die Kommutativitätsbedingung $\alpha[n-1]q[n-1] = (\hat{\alpha}[2-n]q)[n-1] = d^0[n-1]$ erfüllt ist, ist das ergänzte Diagramm ein Rechts-Postnikov-System von $X^0 \to \cdots \to X^{n-1}$, mit Faltung $C[-n]$.

Zu diesem Rechts-Postnikov-System gibt es ein Links-Postnikov-System von $X^0 \to \cdots \to X^{n-1}$ mit gleicher Faltung,

$$\begin{tikzcd}
X^0 \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & \cdots \arrow[rr] & & X^{n-2} \arrow[rr, "d^{n-2}"] \arrow[dr] & & X^{n-1} \arrow[rr, dotted, "d^{n-1}"] \arrow[dr, "\lambda"'] \arrow[d, phantom, "\star"] & & X^n \arrow[dr, dotted] \arrow[d, phantom, "\star"] & \\
& Z^0 & & \cdots \arrow[ll, "{[1]}"] & & Z^{n-2} \arrow[ll, "{[1]}"] \arrow[ur] & & C[-1] \arrow[ll, "{[1]}"] \arrow[ur, dotted, "{g[-1]}"] & & C' \arrow[ll, dotted, "{[1]}"]
\end{tikzcd}$$

und mit $\lambda = u[-1]\beta[n-2]$, welches wir zu einem Links-Postnikov-System von $X^0 \to \cdots \to X^n$ ergänzen wollen. Um den schon vorgezeichneten Pfeil $C[-1] \xrightarrow{g[-1]} X^n$ zu konstruieren, nutzen wir die lange exakte Sequenz zum ausgezeichneten Dreieck (6):

Nach Voraussetzung gilt $p[1]q[n-1] = 0$, also folgt $p[1] \in \ker q[n-1]^\star = \operatorname{im} u^\star$; somit gibt es einen Morphismus $C \xrightarrow{g} X^n[1]$ mit $gu = p[1]$. Die Kommutativitätsbedingung $g[-1]\lambda = g[-1]u[-1]\beta[n-2] = p\hat{\beta} = d^{n-1}$ ist auch erfüllt.

Somit muss der Pfeil $g[-1]$ nur noch zu einem ausgezeichneten Dreieck ergänzt und dieses Dreieck rechts ans Postnikov-System angefügt werden, das entstehende Diagramm ist dann ein Links-Postnikov-System von $X^0 \to \cdots \to X^n$. $\square$

2 Das Massey-Produkt in Homotopiekategorien von Komplexen

Für den Spezialfall, dass die zugrunde gelegte triangulierte Kategorie $\mathcal{D}$ eine Homotopiekategorie $K(\mathcal{A})$ von Komplexen über einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ ist, gibt es eine klassische Definition des Massey-Produkt-Begriffs, die nicht die Sprache triangulierter Kategorien verwendet.

In diesem Abschnitt wollen wir diesen klassischen Begriff formulieren und dann zeigen, dass er mit dem verallgemeinerten (bis auf Vorzeichen) übereinstimmt. Zur Vereinfachung der Notation wird der Hom-Komplex hilfreich sein:

Definition 2.1. Seien $U^\bullet$ und $V^\bullet$ zwei Komplexe über einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Dann ist der *Hom-Komplex* $\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet(U^\bullet, V^\bullet)$ gradweise durch

$$\underline{\mathrm{Hom}}^p(U^\bullet, V^\bullet) := \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U^i, V^{p+i})$$

definiert und das Differential für $f^\bullet \in \underline{\mathrm{Hom}}^p(U^\bullet, V^\bullet)$ durch

$$\partial f^\bullet := d^\bullet_{V^\bullet}[p] f^\bullet - (-1)^p f^\bullet[1] d^\bullet_{U^\bullet} \in \underline{\mathrm{Hom}}^{p+1}(U^\bullet, V^\bullet)$$

gegeben.

Mit dieser Vorzeichenkonvention sind die Grad-p-Kozykeln von $\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet(U^\bullet, V^\bullet)$ genau die Komplexabbildungen $U^\bullet \to V^\bullet[p]$, Komplexabbildungen der Form $\partial f^\bullet$ sind genau die nullhomotopen und für $f^\bullet \in \underline{\mathrm{Hom}}^p(U^\bullet, V^\bullet)$, $g^\bullet \in \underline{\mathrm{Hom}}^q(V^\bullet, W^\bullet)$ gilt die Leibnizregel

$$\partial(g[p] \circ f) = (\partial g)[p] \circ f + (-1)^q g[p+1] \circ \partial f.$$

Mit $X^\bullet[p]$ bezeichnen wir die durch $(X^\bullet[p])^n := X^{p+n}$ definierte Verschiebung von $X^\bullet$ mit Differential $d_{X^\bullet[p]} = (-1)^p d_{X^\bullet}[p]$.

2.1 Das Massey-Produkt von Komplexen der Länge 4

Sei $X^\bullet\colon X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \xrightarrow{d^2} X^3$ ein Diagramm über $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, das über $K(\mathcal{A})$ ein Komplex ist, d. h. dass die Kompositionen $d^1 d^0$ und $d^2 d^1$ nullhomotop sind.

Definition 2.2. Die Klasse aller Morphismen der Form

$$d^2[-1]u - vd^0 \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-1}(X^0, X^3)$$

mit $u \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-1}(X^0, X^2)$, $v \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-1}(X^1, X^3)$ und

$$\begin{aligned} d^1 d^0 &= \partial u, \\ d^2 d^1 &= \partial v \end{aligned}$$

heißt *(klassisches) Massey-Produkt von* $X^\bullet$ und wird als $\langle d^0, d^1, d^2 \rangle_{\mathrm{c}}$ notiert.

Da $d^1 d^0$ und $d^2 d^1$ nullhomotop sind, gibt es solche Abbildungen u und v, das Massey-Produkt $\langle d^0, d^1, d^2 \rangle_{\mathrm{c}}$ ist also sets nichtleer. Ferner sind die Elemente des Massey-Produkts Komplexabbildungen:

Proposition 2.3. *Es gilt* $\langle d^0, d^1, d^2 \rangle_{\mathrm{c}} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}(X^0, X^3[-1])$.

Beweis. Sei ein beliebiges Element $d^2[-1]u - vd^0 \in \langle d^0, d^1, d^2 \rangle_{\mathrm{c}}$ gegeben. Unter Benutzung der Leibnizregel und $\partial d^i = 0$ folgt, dass es ein ∂-Kozykel ist: $\partial(d^2[-1]u - vd^0) = ((\partial d^2)[-1]u + d^2\,\partial u) - (\partial v\, d^0 - v[1]\,\partial d^0) = d^2 d^1 d^0 - d^2 d^1 d^0 = 0$. □

An dieser Stelle sieht man auch, dass das Vorzeichen in der Definition des Massey-Produkts wichtig ist.

Das so definierte Produkt stimmt mit dem allgemeinen Produktbegriff in triangulierten Kategorien überein; das werden wir in Abschnitt 2.5.1 beweisen.

2.2 Das Massey-Produkt von Komplexen der Länge 5

Vor dem allgemeinen Fall von Komplexen beliebiger endliche Länge wollen wir eine Definition für die Länge 5 formulieren. Sei dazu $X^\bullet \colon X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \xrightarrow{d^2} X^3 \xrightarrow{d^3} X^4$ ein beliebiges Diagramm über $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, das über $K(\mathcal{A})$ ein Komplex ist.

An die Massey-Produkte $\langle d^0, d^1, d^2 \rangle_\mathrm{c}$ und $\langle d^1, d^2, d^3 \rangle_\mathrm{c}$ kann man die Forderungen stellen, dass sie jeweils einen nullhomotopen Morphismus enthalten. Um in die folgende Definition einzuführen, wollen wir kurz ausformulieren, was es bedeutet, wenn diese Forderungen erfüllt sind.

Dass $\langle d^0, d^1, d^2 \rangle_\mathrm{c}$ einen nullhomotopen Morphismus enthält, ist äquivalent dazu, dass es Homotopien $u \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-1}(X^0, X^2)$ und $v \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-1}(X^1, X^3)$ mit $d^1 d^0 = \partial u$, $d^2 d^1 = \partial v$ und $d^2[-1]u - vd^0 = 0$ in $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^0, X^3[-1])$ gibt; die letzte Aussage bedeutet, dass eine Homotopie $A \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-2}(X^0, X^3)$ mit $d^2[-1]u - vd^0 = \partial A$ existiert.

Die zweite Forderung lautet ausgeschrieben: Es gibt Homotopien $v' \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-1}(X^1, X^3)$, $w \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-1}(X^2, X^4)$ mit $d^2 d^1 = \partial v'$, $d^3 d^2 = \partial w$ und $d^3[-1]v' - wd^1 = \partial B$ für eine weitere Homotopie $B \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-2}(X^1, X^4)$.

Im Allgemeinen kann man dabei nicht $v = v'$ wählen [2]; kann man das in einem Spezialfall doch, so sagt man, dass $\langle d^0, d^1, d^2 \rangle_\mathrm{c}$ und $\langle d^1, d^2, d^2 \rangle_\mathrm{c}$ *simultan verschwinden.*

Definition 2.4. Die Klasse aller Morphismen der Form

$$d^3[-2]A - w[-1]u + Bd^0 \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-2}(X^0, X^4)$$

mit $u \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-1}(X^0, X^2)$, $v \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-1}(X^1, X^3)$, $w \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-1}(X^2, X^4)$ sowie $A \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-2}(X^0, X^3)$ und $B \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-2}(X^1, X^4)$ derart, dass die Bedingungen

$$\begin{aligned} d^1 d^0 &= \partial u \\ d^2 d^1 &= \partial v \\ d^3 d^2 &= \partial w \\ d^2[-1]u - vd^0 &= \partial A \\ d^3[-1]v - wd^1 &= \partial B \end{aligned}$$

erfüllt sind, heißt *(klassisches) Massey-Produkt von $X^\bullet$* und wird als $\langle d^0, d^1, d^2, d^3 \rangle_\mathrm{c}$ notiert.

Bemerkung 2.5. Direkt nach der Definition ist klar, dass $\langle d^0, d^1, d^2, d^3 \rangle_\mathrm{c}$ genau dann nichtleer ist, wenn $\langle d^0, d^1, d^2 \rangle_\mathrm{c}$ und $\langle d^1, d^2, d^3 \rangle_\mathrm{c}$ simultan verschwinden.

Wieder sind die Elemente des Massey-Produkts Komplexabbildungen:

Proposition 2.6. *Es gilt $\langle d^0, d^1, d^2, d^3 \rangle_\mathrm{c} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}(X^0, X^4[-2])$.*

Beweis. Für ein beliebiges Element $f = d^3[-2]A - w[-1]u + Bd^0 \in \langle d^0, d^1, d^2, d^3\rangle_{\mathrm{c}}$ gilt:

$$\begin{aligned}\partial f &= d^3[-1]\partial A - (\partial w)[-1]u + w\partial u + (\partial B)d^0 \\ &= d^3[-1]d^2[-1]u - d^3[-1]vd^0 - d^3[-1]d^2[-1]u + wd^1d^0 + d^3[-1]vd^0 - wd^1d^0 \\ &= 0\end{aligned}$$ □

2.3 Das Massey-Produkt von Komplexen beliebiger endlicher Länge

Sei $X^\bullet \colon X^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n$ ein beliebiges Diagramm über $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, das über $K(\mathcal{A})$ ein Komplex ist. Für eine Definition des Massey-Produkts von $X^\bullet$ ist es hilfreich, die auftretenden Morphismen in einer oberen Dreiecksmatrix (mit fehlendem oberen rechten Eintrag) zu organisieren:

Definition 2.7. Ein *definierendes System für $X^\bullet$* ist eine Familie $M = (a_{ij})_{ij}$ von Morphismen mit $0 \leq i \leq j \leq n-1$ und $(i,j) \neq (0, n-1)$ derart, dass

$$\begin{aligned} a_{ij} &\in \underline{\mathrm{Hom}}^{i-j}(X^i, X^{j+1}) \\ a_{ii} &= d^i \\ \partial a_{ij} &= L_M(i,j) \end{aligned}$$

für alle Indizes gilt. Dabei bezeichnet $L_M(i,j)$ folgende signierte Summe:

$$L_M(i,j) = \sum_{r=i}^{j-1} (-1)^{j-1-r} a_{r+1,j}[i-r]a_{ir}$$

Die Forderung $\partial a_{ii} = L_M(i,i) = 0$ wiederholt dabei lediglich die Voraussetzung, dass die d^i Komplexabbildungen sind.

Definition 2.8. Die Klasse aller Morphismen der Form $L_M(0, n-1) \in \underline{\mathrm{Hom}}^{-n+2}(X^0, X^n)$, wobei M ein beliebiges definierendes System für $X^\bullet$ ist, heißt *(klassisches) Massey-Produkt von $X^\bullet$* und wird als $\langle d^0, \ldots, d^{n-1}\rangle_{\mathrm{c}}$ notiert.

Speziell für $n = 3$ und $n = 4$ erhält man mit diesen Vorzeichenkonventionen die Definitionen der beiden vorigen Abschnitte zurück, und wieder kann man nachrechnen, dass die Elemente des Massey-Produkts Komplexabbildungen sind; dazu zeigen wir allgemeiner:

Proposition 2.9. *Die Morphismen $L_M(i,j) \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}[i-j+1](X^i, X^{j+1})$ sind für alle definierenden Systeme M und alle Indizes ∂-Kozykel, also Komplexabbildungen.*

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\partial L_M(i,j) &= \sum_{r=i}^{j-1}(-1)^{j-1-r}\Big((\partial a_{r+1,j})[i-r]a_{ir} + (-1)^{r+1-j}a_{r+1,j}[i-r+1]\partial a_{ir}\Big)\\
&= \sum_{r=i}^{j-1}\sum_{s=r+1}^{j-1} -(-1)^{s-1-r}a_{s+1,j}[i-s+1]a_{r+1,s}[i-r]a_{ir}\\
&+ \sum_{r=i}^{j-1}\sum_{s=i}^{r-1} \quad (-1)^{r-1-s}a_{r+1,j}[i-r+1]a_{s+1,r}[i-s]a_{is}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichheit wird klar, wenn man die Indexmengen skizziert. □

Für den Beweis der Übereinstimmung dieser Definition mit der allgemeinen für triangulierte Kategorien werden wir folgende technische Hilfsaussage benötigen:

Hilfsaussage 2.10. *Ist $M = (a_{ij})_{ij}$ mit $0 \leq i \leq j \leq n-1$ und $(i,j) \neq (0, n-1)$ ein definierendes System für $X^\bullet \colon X^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n$, dann ist die Abschneidung $\tilde{M} = (a_{ij})_{ij}$ mit $1 \leq i \leq j \leq n-1$ und $(i,j) \neq (1, n-1)$ ein definierendes System für $X^{\geq 1} \colon X^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n$, und es gilt für alle zulässigen Indizes*

$$L_{\tilde{M}}(i,j) = L_M(i+1, j+1).$$

Beweis. Einfaches Nachrechnen. □

Für später wird es relevant sein, dass hier kein Vorzeichen eingefügt werden muss.

2.4 Zusammenhang zu klassischen Massey-Produkt-Definitionen

Sei R ein kommutativer Ring und $C^\bullet$ ein Kokettenkomplex von R-Moduln mit einem assoziativen und R-bilinearen Produkt $\smile$, das für Koketten $\varphi \in C^p$, $\psi \in C^l$ die Leibnizregel $d(\varphi \smile \psi) = d\varphi \smile \psi + (-1)^p \varphi \smile d\psi$ erfüllt; beispielsweise kann $C^\bullet$ der singuläre Kokettenkomplex eines topologischen Raums mit Koeffizienten in R und das Produkt $\smile$ das Cup-Produkt sein.

Eine beliebige Kokette $x \in C^p$ liefert eine Abbildung $(x \smile \_) \in \underline{\mathrm{Hom}}^p(C^\bullet, C^\bullet)$, die genau dann eine Abbildung von Komplexen ist, wenn x ein Kozykel ist. Ferner gilt die Vertauschungsregel $\partial(x \smile \_) = dx \smile \_$.

Seien nun $d^0 \in C^p$, $d^1 \in C^q$, $d^2 \in C^r$ Kozykel, für die $d^1 \smile d^0$ und $d^2 \smile d^1$ nullhomotop sind; das ist das Datum für das klassische Massey-Produkt von Kozykeln.

Daraus lässt sich ein Diagramm über Kom($R-$Mod) konstruieren, das über $K(R-\mathrm{Mod})$ ein Komplex ist:

$$C^\bullet \xrightarrow{d^0\smile -} C^\bullet[p] \xrightarrow{(d^1\smile -)[p]} C^\bullet[p+q] \xrightarrow{(d^2\smile -)[p+q]} C^\bullet[p+q+r]$$

Das Massey-Produkt zu diesem Komplex stimmt dann bis auf Vorzeichen und Kompositionsreihenfolge mit klassischen Definitionen [2, 1] des Massey-Produkts von Kozykeln überein.

2.5 Zusammenhang zum Massey-Produkt in triangulierten Kategorien

2.5.1 Der Spezialfall von Komplexen der Länge 4

Sei $X^\bullet\colon X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \xrightarrow{d^2} X^3$ ein Diagramm über Kom($\mathcal{A}$), das über $K(\mathcal{A})$ ein Komplex ist.

Die Homotopieklassen von Elementen aus $\langle d^0, d^1, d^2\rangle_\mathrm{c}$ unterscheiden sich nur um Elemente aus der Untergruppe $A \subseteq \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^0, X^3[-1])$ von (4),

$$A = d^2[-1]\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^0, X^2[-1]) + \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^1, X^3[-1])d^0.$$

Um das zu zeigen, beweisen wir gleich die stärkere Aussage, dass die klassische Definition 2.2 wie eingangs behauptet mit der allgemeinen (Def. 1.4) übereinstimmt.

Proposition 2.11. *Es gilt $\langle d^0, d^1, d^2\rangle_\mathrm{c} = \langle d^0, d^1, d^2\rangle$, wobei das Massey-Produkt auf der rechten Seite über der triangulierten Kategorie $K(\mathcal{A})$ genommen wird und die linke Seite, die eigentlich eine Teilklasse von $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}(X^0, X^3[-1])$ ist, als Teilklasse von $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^0, X^3[-1])$ augefasst werden muss.*

Beweis. Wir zeigen die wegen Prop. 1.5 äquivalente Aussage $\langle d^0, d^1, d^2\rangle_\mathrm{c} = -\langle\langle d^0, d^1, d^2\rangle\rangle$.

„$\subseteq$“: Sei $f := d^2[-1]u - vd^0 \in \langle d^0, d^1, d^2\rangle_\mathrm{c}$ beliebig; um zu zeigen, dass $-f$ in $\langle\langle d^0, d^1, d^2\rangle\rangle$ liegt, müssen wir ein kommutatives Diagramm wie (1) konstruieren. Als Kegel Y von $X^1 \xrightarrow{d^1} X^2$ wählen wir die kanonische Konstruktion $Y := X^1[1] \oplus X^2$ mit Differential

$$d_Y := \begin{pmatrix} -d_{X^1}[1] & 0 \\ d^1[1] & d_{X^2} \end{pmatrix},$$

dann ist das Dreieck

$$X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \xrightarrow{\overline{\pi}} Y \xrightarrow{\delta} X^1[1]$$

mit $\overline{\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{X^2} \end{pmatrix}$ und $\delta = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^1[1]} & 0 \end{pmatrix}$ ausgezeichnet.

Dann müssen wir noch Morphismen $Y \xrightarrow{p} X^3$ und $X^0 \xrightarrow{q} Y[-1]$ derart definieren, dass in $K(\mathcal{A})$ gilt:

1. $p\overline{\pi} = d^2$
2. $\delta[-1]q = d^0$
3. $f = -(p[-1]q)$

Auf eine Idee für p und q kommt man, wenn man $-f$ künstlich als Komposition zweier Morphismen schreibt:

$$-f = vd^0 - d^2[-1]u = \begin{pmatrix} v & d^2[-1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^0 \\ -u \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise wird man zu den Wahlen $p := \left(\begin{smallmatrix} v[1] & d^2 \end{smallmatrix} \right)$ und $q := \left(\begin{smallmatrix} d^0 \\ -u \end{smallmatrix} \right)$ geleitet; dass diese die Bedingungen 1., 2. und 3. erfüllen, kann man schnell nachrechnen.

Da aber u und v nicht notwendigerweise Morphismen von Komplexen sind, ist nicht sofort klar, dass p und q auch wirklich Komplexabbildungen sind, das müssen wir also noch zeigen:

$$\begin{aligned}
\partial p = d_{X^3}p - p[1]d_Y &= d_{X^3}\begin{pmatrix} v[1] & d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v[2] & d^2[1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{X^1}[1] & 0 \\ d^1[1] & d_{X^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d_{X^3}v[1] + v[2]d_{X^1}[1] - (d^2d^1)[1] & d_{X^3}d^2 - d^2[1]d_{X^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\partial v)[1] - (d^2d^1)[1] & \partial d^2 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial q = d_{Y[-1]}q - q[1]d_{X^0} &= \begin{pmatrix} d_{X^1} & 0 \\ -d^1 & -d_{X^2}[-1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^0 \\ -u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d^0[1] \\ -u[1] \end{pmatrix} d_{X^0} \\
&= \begin{pmatrix} d_{X^1}d^0 - d^0[1]d_{X^0} \\ -d^1d^0 + d_{X^2}[-1]u + u[1]d_{X^0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial d^0 \\ -d^1d^0 + \partial u \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Das schließt den Beweis der Behauptung $-f \in \langle\!\langle d^0, d^1, d^2 \rangle\!\rangle$ ab.

„$\supseteq$“: Sei ein beliebiges Element $f \in -\langle\!\langle d^0, d^1, d^2 \rangle\!\rangle$ gegeben. Für ein festes $f_0 \in \langle d^0, d^1, d^2 \rangle_{\mathrm{c}} \subseteq -\langle\!\langle d^0, d^1, d^2 \rangle\!\rangle$ (Existenz gesichert) gilt $\langle\!\langle d^0, d^1, d^2 \rangle\!\rangle = -f_0 + A$, daher gilt $f = f_0 - a$ für ein $a \in A$.

Sei $f_0 = d^2[-1]u_0 - v_0d^0$ mit $d^1d^0 = \partial u_0$ und $d^2d^1 = \partial v_0$ und $a = d^2[-1]g + hd^0$ für gewisse $X^0 \xrightarrow{g} X^2[-1]$ und $X^1 \xrightarrow{h} X^3[-1]$.

Dann ist $f = f_0 - a = d^2[-1](u_0 - g) - (v_0 + h)d^0$, und wegen $\partial(u_0 - g) = \partial u_0 - \partial g = d^1d^0 - 0$ und $\partial(v_0 + h) = d^2d^1$ ist damit klar, dass f in $\langle d^0, d^1, d^2 \rangle_{\mathrm{c}}$ liegt. □

2.5.2 Der allgemeine Fall von Komplexen beliebiger endlicher Länge

In diesem Abschnitt wollen wir folgende Proposition zeigen:

Proposition 2.12. *Sei $n \geq 3$ und $X^\bullet\colon X^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n$ ein beliebiges Diagramm über* $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$*, das über $K(\mathcal{A})$ ein Komplex ist. Dann gilt*

$$\langle d^0, \ldots, d^{n-1} \rangle_{\mathrm{c}} = (-1)^{v_n} \langle d^0, \ldots, d^{n-1} \rangle,$$

wobei wie in der vorhergehenden Proposition das Massey-Produkt auf der rechten Seite über der triangulierten Kategorie $K(\mathcal{A})$ genommen wird und die linke Seite als Teilklasse von $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^0, X^x xx[-1])$ *aufgefasst werden muss.*

Das Vorzeichen beginnt mit $v_3 = 1$ und alterniert dann in Zweierschritten, d.h. es gilt $v_4 = v_5 = -1$, $v_6 = v_7 = 1$, ...

Beweis. „$\subseteq$“: Wir wollen den Beweis durch Induktion über n führen, wobei der Induktionsanfang $n = 3$ Gegenstand des vorhergehenden Abschnitts war. Wir schließen nun von n auf $n + 1$.

Sei also ein Diagramm $X^\bullet\colon X^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n$ über $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, das über $K(\mathcal{A})$ ein Komplex ist, und ferner ein Element $f = \langle d^0, \ldots, d^{(n+1)-1} \rangle_{\mathrm{c}}$ beliebig gegeben.

Folglich gibt es definierendes System $M = (a_{ij})_{ij}$ für $X^\bullet$ mit $f = L(0, (n+1) - 1)$. Dieses können wir wie in der Hilfsaussage 2.10 zu einem definierenden System $\tilde{M}$ von $X^{\geq 1}$ abschneiden und erhalten nach Induktionsvoraussetzung ein Massey-Produkt-Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[drr, "\tilde{q}", "{[2-n]}"'] & X^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots \arrow[r, "d^{n-1}"] & X^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[dl, "\hat{\tilde{\beta}}"'] & X^{n+1} \\
 & & \hat{\tilde{T}} \arrow[ul, "{[n-2]}", "\hat{\tilde{\alpha}}"'] \arrow[urr, "\tilde{p}"'] & &
\end{tikzcd}$$

und ein zur Faltung $\tilde{T} =: Y_1[-n+1]$ von $X^2 \to \cdots \to X^n$ gehöriges Rechts-Postnikov-System

$$\begin{tikzcd}
 & X^2[n-2] \arrow[rr, "{[1]}"'] \arrow[dr] & & X^3[n-3] \arrow[rr, "{[1]}"'] \arrow[dr] & & X^4[n-4] \arrow[rr] & & \cdots \arrow[rr] & & X^n \\
Y_1 \arrow[ur, "{[1]\,\star}"'] & & Y_2 \arrow[ll, "h_2"] \arrow[ur, "{[1]\,\star}"'] & & Y_3 \arrow[ll, "h_3"] \arrow[ur, "{[1]}"'] & & \cdots \arrow[ll] & & X^n[1] \arrow[ll] \arrow[ur, "{[1]}", "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

mit assoziierten Morphismen $Y_1[-n+1] \xrightarrow{\tilde{\alpha}} X^2$ und $X^n[-(n-2)] \xrightarrow{\tilde{\beta}} Y_1[-n+1]$; dabei gilt $\tilde{p}[2-n]\tilde{q} = (-1)^{v_n} L_{\tilde{M}}(0, n-1)$.

Um weiter unten die Notation zu vereinfachen, führen wir noch die Schreibweise $p_1 := \tilde{p}$ ein.

Wir ergänzen nun dieses Postnikov-System links zu einem von $X^1 \to \cdots \to X^n$:

$$\begin{tikzcd}
 & X^1[n-1] \arrow[rr, "{[1]}"'] \arrow[dr, "{\tilde{q}[n-1]}"] & & X^2[n-2] \arrow[rr, "{[1]}"'] \arrow[dr] & & X^3[n-3] \arrow[rr, "{[1]}"'] \arrow[dr] & & X^4[n-4] \arrow[rr] & & \cdots \arrow[rr] & & X^n \\
Y_0 \arrow[ur, "{[1]\,\star}"'] & & Y_1 \arrow[ll, "h_1"] \arrow[ur, "{[1]\,\star}"'] & & Y_2 \arrow[ll, "h_2"] \arrow[ur, "{[1]\,\star}"'] & & Y_3 \arrow[ll, "h_3"] \arrow[ur, "{[1]}"'] & & \cdots \arrow[ll] & & X^n[1] \arrow[ll] \arrow[ur, "{[1]}", "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dabei wählen wir Y_0 über die kanonische Kegelkonstruktion in $K(\mathcal{A})$, d.h. wir setzen $Y_0 := X^1[n] \oplus Y_1$ mit Differential

$$d_{Y_0} := \begin{pmatrix} d_{X^1}[n] & 0 \\ \tilde{q}[n] & d_{Y_1} \end{pmatrix}$$

und $h_0 := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ id_{Y_1} \end{smallmatrix}\right)$.

Die Faltung dieses ergänzten Systems ist dann $Y_0[-n]$ und die assoziierten Morphismen sind $Y_0[-n] \xrightarrow{\alpha} X^1$ und $X^n[-(n-1)] \xrightarrow{\beta} Y_0[-n]$ mit $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id}_{X^1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\beta = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \tilde{\beta}[-1] \end{smallmatrix}\right)$.

Es bleibt, Morphismen $Y_0[-1] \xrightarrow{p} X^{n+1}$ und $X^0 \xrightarrow{q} Y_0[-n]$ zu definieren, die dann ein Massey-Produkt-Diagramm von $X^0 \to \cdots \to X^{n+1}$ mit $p[2-(n+1)]q = (-1)^{v_{n+1}} f$ ergeben.

Definition von p. Die Setzung

$$p := \begin{pmatrix} -(-1)^{v_n} a_{1n}[n-1] & \tilde{p} \end{pmatrix}$$

erfüllt alle Kommutativitätsanforderungen:

$$\begin{aligned}
\partial p &= d_{X^{n+1}} p - p[1] d_{Y_0[-1]} \\
&= d_{X^{n+1}} \begin{pmatrix} -(-1)^{v_n} a_{1n}[n-1] & \tilde{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(-1)^{v_n} a_{1n}[n] & \tilde{p}[1] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{X^1[n]}[-1] & 0 \\ \tilde{q}[n-1] & d_{Y_1}[-1] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(-1)^{v_n} (\partial a_{1n})[n-1] + (\tilde{p}[2-n]\tilde{q})[n-1] & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{\mathrm{IV}}{=} \begin{pmatrix} (-(-1)^{v_n} L_M(1,n) + (-1)^{v_n} L_M(1,n))[n-1] & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$p\hat{\beta} = p\beta[n-1] = \tilde{p}\tilde{\beta}[n-2] \overset{\mathrm{IV}}{=} d^n$$

Definition von q. Hierfür ist mehr Vorarbeit nötig.

Zunächst lässt sich ein Morphismus $\xrightarrow{g_1} \in \underline{\mathrm{Hom}}^0(X^1[n], Y_0)$ durch $g_1 := \left(\begin{smallmatrix} id_{X^1[n]} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ definieren. Nimmt man diese Konstruktion in die Induktionsvoraussetzung mit auf, kann man die Existenz analog definierter $g_{r+1} \in \underline{\mathrm{Hom}}^0(X^{r+1}[n-r], Y_r)$ für $r = 1, \ldots, n-2$ sichern.

Unter der Schreibweise $p_0 := P$ gilt dabei $p_0[1]g_1 = -(-1)^{v_n} a_{1n}[n]$; nimmt man diese Gleichheit in die Induktionsvoraussetzung auf, erhält man analog $p_r[1]g_{r+1} = -(-1)^{v_{n-r}} a_{r+1,n}[n-r]$, wobei wir für $r = 1, \dots, n-2$ mit p_r den Morphismus $Y_r[-1] \to X^{n+1}$ zurückliegender Induktionsschritte bezeichnen.

Wegen $p_0[1]h_1 = \tilde{p}[1] = p_1[1]$ kann man dabei induktiv die Identität $p_r[1]h_{r+1} = p_{r+1}[1]$ folgern.

Mit diesen Bezeichnungen kann man nun den Morphismus q definieren:

$$q := \begin{pmatrix} d^0 \\ (-1)^{v_{n+1}} \tilde{\beta}[-1] a_{0,n-1} + A \end{pmatrix},$$

mit $A \in \underline{\mathrm{Hom}}(X^0, Y[-n])$ wie folgt:

$$A := \sum_{r=1}^{n-2} (-1)^{n-r} (-1)^{v_{n-r}} (h_2 h_3 \cdots h_r g_{r+1})[-n] a_{0r}$$

Die Kommutativitätsforderung

$$\alpha q = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^0 \\ (-1)^{v_{n+1}} \tilde{\beta}[-1] a_{0,n-1} + A \end{pmatrix} = d^0$$

ist damit schnell nachgewiesen; der Nachweis, dass q in der Tat eine Komplexabbildung ist, soll hier aber nicht ausgeführt werden.

Berechnung der Komposition $p[1-n]q$: Essentiell zur Überprüfung der Vorzeichenwahl ist jedoch, dass wir detailliert die Identität

$$p[1-n]q = (-1)^{v_{n+1}} L_M(0, n),$$

die den Beweis des Induktionsschritt abschließt, nachrechnen.

Die rechte Seite ist dabei einfach

$$(-1)^{v_{n+1}} L_M(0, n) = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{v_{n+1}} (-1)^{n-1-r} a_{r+1,n}[-r] a_{0r}, \tag{7}$$

die linke ergibt sich als

$$\begin{aligned} p[1-n]q &= \begin{pmatrix} -(-1)^{v_n} a_{1n} & \tilde{p}[1-n] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^0 \\ (-1)^{v_{n+1}} \tilde{\beta}[-1] a_{0,n-1} + A \end{pmatrix} \\ &= -(-1)^{v_n} a_{1n} d^0 + (-1)^{v_{n+1}} \tilde{p}[1-n] \tilde{\beta}[-1] a_{0,n-1} + \tilde{p}[1-n] A. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist wegen $(-1)^{v_{n+1}} = (-1)^n (-1)^{v_n}$ und $d^0 = a_{00}$ auch der erste Summand in der Summe 7, und der zweite Summand ist wegen $\tilde{p}[1-n]\tilde{\beta}[-1] = (\tilde{p}\tilde{\beta}[n-2])[1-n] \overset{\mathrm{IV}}{=} d^n[1-n] = a_{nn}[1-n]$ der Summand mit $r = n-1$ in 7. Nutzt man die weiter oben hergeleiteten Identitäten, kann man schließlich nachrechnen, dass die restlichen Terme genau durch $\tilde{p}[1-n]A$ geliefert werden:

$$\begin{aligned}\tilde{p}[1-n]A &= \sum_{r=1}^{n-2}(-1)^{n-r}(-1)^{v_{n-r}}\tilde{p}[1-n](h_2h_3\cdots h_r g_{r+1})[-n]a_{0r} \\ &= \sum_{r=1}^{n-2}(-1)^{n-r}(-1)^{v_{n-r}}(p_r[1]g_{r+1})[-n]a_{0r} \\ &= \sum_{r=1}^{n-2}(-1)^{n-r}(-1)^{v_{n-r}}(-1)(-1)^{v_{n-r}}a_{r+1,n}[n-r][-n]a_{0r} \\ &= \sum_{r=1}^{n-2}(-1)^{n-r-1}a_{r+1,n}[-r]a_{0r}\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

„$\supseteq$“: Die umgekehrte Inklusion wollen wir nur skizzieren.

Sei $n \geq 3$ beliebig, ein Diagramm $X^\bullet\colon X^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n$ über $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, das über $K(\mathcal{A})$ ein Komplex ist, und ferner ein Element $f = (-1)^{v_n}p[2-n]q \in (-1)^{v_n}\langle d^0, \ldots, d^{n-1}\rangle$ gegeben.

Von den Kegeln des Rechts-Postnikov-Systems des zugehörigen Massey-Produkt-Diagramms kann man nicht erwarten, dass sie durch die Standardkonstruktion gegeben sind. Man kann jedoch sukzessive von rechts nach links die Kegel durch die kanonischen Kegel ersetzen; dabei muss man die Morphismen der ausgezeichneten Dreiecke geeignet durch Isomorphismen abändern.

Bei diesem Verfahren ändern sich zwar die Pfeile p und q, nicht aber die Komposition $p[2-n]q$. Aus dem auf Standardform gebrachten Postnikov-System und den (veränderten) Pfeilen p und q kann man dann, an genau den Stellen, wie sie der obige Induktionsbeweis platziert, ein definierendes System M für $X^\bullet$ ablesen.

Die Übereinstimmung von f mit dem Massey-Produkt zu M ist dann klar. $\square$

Literatur

[1] David Kraines. „Massey Higher Products“. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 124.3 (1966), S. 431–449. ISSN: 00029947.

[2] Edward J. O'Neill. „On Massey products“. In: *Pacific J. Math* 76.1 (1978), S. 123–127.