Arbeitsgemeinschaft Algebra und Zahlentheorie

Triangulierte Kategorien, Massey-Produkte und der projektive Raum

Ingo Blechschmidt

7. Dezember 2010

Das klassische Massey-Produkt

Sei R ein Ring und seien $x, y, z \in R$ Ringelemente. Ferner gelte

$$xy = 0 \text{ und } yz = 0.$$

Dann folgt, dass auch das dreifache Produkt

$$xyz$$

verschwindet, anschaulich aus zwei Gründen: Zum einen, weil $xyz = (xy)z = 0 \cdot z = 0$, zum anderen, weil $xyz = x(yz) = x \cdot 0 = 0$.

Diese Gründe sind aber in diesem Kontext nur Gegenstände der Anschauung, nicht formale Objekte einer mathematischen Theorie. Im Folgenden definieren wir Kokettenkomplexe, mit denen man Gründe dieser Art sauber fassen kann, und führen dann das Massey-Produkt ein, welches den Unterschied zwischen diesen Gründen messen wird.

Definition. Ein *Kokettenkomplex* über einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ (beispielsweise der Kategorie der $\mathbb{R}$-Vektorräume) ist ein Diagramm der Form

$$C^\bullet\colon\ \cdots \xrightarrow{d^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots,$$

mit $d^i \circ d^{i-1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, wobei die C^i Objekte von $\mathcal{A}$ (also beispielsweise $\mathbb{R}$-Vektorräume) und die d^i Morphismen zwischen den Objekten (also $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen) sind.

Elemente aus $\ker d^n \subseteq C^n$ heißen *geschlossen* (vom Grad n), Elemente aus $\operatorname{im} d^{n-1} \subseteq C^n$ *exakt* (vom Grad n).

Eine notwendige Bedigung für Exaktheit. Notwendig dafür, dass ein Element $x \in C^n$ exakt ist, ist, dass es geschlossen ist: Denn ist x exakt, gilt also $x = d^{n-1}(s)$ für ein $s \in C^{n-1}$, so folgt $d^n(x) = d^n(d^{n-1}(s)) = 0$.

Diese Bedingung ist im Allgemeinen aber nicht hinreichend. Den Grad des Versagens misst die Kohomologie:

Definition. Die n-te Kohomologie eines Kokettenkomplexes $C^\bullet$ ist der Quotient

$$H^n(C^\bullet) := \ker d^n / \operatorname{im} d^{n-1}.$$

Die n-te Kohomologie ist genau dann null, wenn $\operatorname{im} d^{n-1} = \ker d^n$, d. h. wenn jedes geschlossene Element auch exakt ist, also wenn die hergeleitete notwendige Bedingung in der Tat hinreichend ist.

Das Massey-Produkt. Wir wollen nun die Rechnung des Anfangs im Kontext von Kokettenkomplexen wiederholen. Sei dazu ein Kokettenkomplex $C^\bullet$ gegeben, auf dem noch ein Produkt definiert ist, d. h. der mit Produktabbildungen

$$\cdot \colon C^i \otimes_{\mathcal{A}} C^j \longrightarrow C^{i+j}$$

kommt, die für $s \in C^i$, $t \in C^j$ eine graduierte Variante der Leibnizregel erfüllen:

$$d^{i+j}(st) = d^i(s)\, t + (-1)^i s\, d^j(t).$$

Seien weiter Elemente $[x] \in H^k(C^\bullet)$, $[y] \in H^\ell(C^\bullet)$ und $[z] \in H^m(C^\bullet)$ gegeben, und es gelte $[x][y] = 0 \in H^{k+\ell}(C^\bullet)$ und $[y][z] = 0 \in H^{\ell+m}(C^\bullet)$.

Somit folgt, dass die Produkte xy und yz exakt sind, dass es also Elemente $u \in C^{k+\ell-1}$ und $v \in C^{\ell+m-1}$ mit

$$xy = d^{k+\ell-1}(u) \text{ und } yz = d^{\ell+m-1}(v)$$

gibt. Die Elemente u und v interpretieren wir als *Gründe* für das Verschwinden von $[x][y]$ bzw. $[y][z]$ in der Kohomologie.

Wie in der Rechnung oben folgt nun weiter, dass auch das Dreifachprodukt $[x][y][z] \in H^{k+\ell+m}(C^\bullet)$ null ist. Die beiden Gründe können wir aber dieses Mal explizit angeben:

$$\begin{aligned} d((-1)^k xv) &= (-1)^k\,(d(x)\, v + (-1)^k \quad x\, d(v)) = xyz, \\ d(uz) &= \qquad\quad d(u)\, z + (-1)^{k+\ell-1} u\, d(z) \;\; = xyz. \end{aligned}$$

Das *Massey-Produkt* ist nun definiert als die Differenz

$$\langle [x], [y], [z] \rangle := [uz - (-1)^k xv] \in H^{k+\ell+m-1}.$$

Bemerkungen. Da man Freiheiten in den Wahlen von u und v hat, ist das Massey-Produkt wie angegeben nicht wohldefiniert, auch nicht auf Niveau der Kohomologie. Es ist aber wohldefiniert bis auf Elemente aus

$$[x] H^{\ell+m-1}(C^\bullet) + H^{k+\ell-1}(C^\bullet)[z].$$

Wir sehen, dass das Massey-Produkt eine *Kohomologieoperation dritter Ordnung* ist. Die Definition lässt sich von drei auf n Eingabeelemente erweitern, womit wir dann allgemeiner eine Operation n-ter Ordnung erhalten.

Die Bernstein-Gelfand-Gelfand-Korrespondenz

Sei E ein $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum über einem Körper k mit von zwei verschiedener Charakteristik. Sei $S^\star E$ die symmetrische Algebra über E und $X := \mathbb{P}E = \operatorname{Proj} S^\star E$ der projektive Raum zu E mit Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$. Die Konvention sei also so, dass $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(1)) \cong E$.

Terminologie. Sei $\Lambda := \Lambda^\star E^\vee = \oplus_{k=0}^{n+1} \Lambda^{k+1} E^\vee$ die äußere Algebra des Dualraums von E. Sei $\mathcal{M}^b(\Lambda)$ die Kategorie der endlich erzeugten graduierten Λ-Moduln und graderhaltenden Λ-linearen Abbildungen.

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Mor}\mathcal{M}^b(\Lambda)$ die Klasse derjenigen Morphismen, die über freie Moduln faktorisieren. Eine Abbildung $V \xrightarrow{f} W$ liegt also genau dann in $\mathcal{F}$, wenn es einen freien Λ-Modul F und Abbildungen $V \to F$, $F \to W$ derart gibt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & W \\ & F \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Weiter definieren wir die Quotientenkategorie $\mathcal{M}^b(\Lambda)/\mathcal{F}$; Objekte sind Objekte aus $\mathcal{M}^b(\Lambda)$, Morphismen sind Äquivalenzklassen von Morphismen aus $\mathcal{M}^b(\Lambda)$, wobei wir zwei Pfeile genau dann als äquivalent bezeichnen wollen, wenn ihre Differenz in $\mathcal{F}$ liegt. (Man muss sich überlegen, dass das wohldefiniert ist.)

Die Korrespondenz. Die Bernstein-Gelfand-Gelfand-Korrespondenz ist nun eine triangulierte Äquivalenz zwischen der derivierten Kategorie $\mathcal{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$ beschränkter Komplexe quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Moduln und der Kategorie $\mathcal{M}^b(\Lambda)/\mathcal{F}$.

Der zugehörige Funktor $\mathcal{M}^b(\Lambda)/\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{D}^b(\mathrm{Qcoh}(X))$ sieht dabei auf Objekten wie folgt aus:

Zu einem endlich erzeugten graduierten Λ-Modul

$$V = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} V^i$$

assoziieren wir den *rigiden Komplex*

$$\cdots \longrightarrow V^{i-1} \otimes_k \mathcal{O}(i-1) \longrightarrow V^i \otimes_k \mathcal{O}(i) \longrightarrow V^{i+1} \otimes_k \mathcal{O}(i+1) \longrightarrow \cdots .$$

Zur Konstruktion des Differentials beobachten wir, dass wir im k-Vektorraum

$$\mathrm{Hom}_k(V^i \otimes E^\vee, V^{i+1})$$

ein kanonisches Element besitzen, nämlich eine Einschränkung der durch die Λ-Modulstruktur gegebene Multiplikation. Über die Isomorphismenkette

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_k(V^i \otimes E^\vee, V^{i+1}) &\cong \mathrm{Hom}_k(V^i, \mathrm{Hom}_k(E^\vee, V^{i+1})) \\ &\cong \mathrm{Hom}_k(V^i, (E^\vee)^\vee \otimes_k V^{i+1}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_k(V^i, V^{i+1} \otimes_k E)\end{aligned}$$

erhalten wir eine Abbildung $V^i \longrightarrow V^{i+1} \otimes E$.

Diese induziert einen Morphismus

$$V^i \otimes_k \mathcal{O} \longrightarrow V^{i+1} \otimes_k \mathcal{O}(1)$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln, der nach Tensorieren mit $\mathcal{O}(i)$ und Ausnutzen des Isomorphismus $(V^{i+1} \otimes_k \mathcal{O}(1)) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(i) \cong V^{i+1} \otimes_k \mathcal{O}(i+1)$ das gesuchte Differential an der Stelle i gibt.

Wählt man eine Basis $E = k\langle x_0, \ldots, x_n\rangle$ von E mit zugehöriger Dualbasis $E^\vee = k\langle \xi_0, \ldots, \xi_n\rangle$, lässt sich das Differential explizit wie folgt schreiben:

$$x \otimes s \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \xi_i x \otimes x_i s$$

Für die andere Richtung der Korrespondenz verweisen wir auf [2, Kap. IV.3].

Literatur

[1] J. Bernstein, I. M. Gelfand und S. I. Gelfand. „Algebraic bundles on P^n and problems of linear algebra“. In: *Funct. Anal. Appl.* 12.3 (1978), S. 212–214.

[2] S. I. Gelfand und Y. I. Manin. *Methods of homological algebra.* 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin, 2003. ISBN: 978-3-540-43583-9.

[3] D. Kraines. „Massey Higher Products“. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 124.3 (1966), S. 431–449.

[4] E. J. O'Neill. „On Massey products“. In: *Pacific J. Math.* 76.1 (1978), S. 123–127.