Aufgabe 6.1

Sei A ein beliebiger Ring (mit Eins, aber nicht notwendigerweise kommutativ). Sei $\mathcal{A}_n$ die Kategorie der A-Moduln, die Auflösungen der Länge n durch endlich erzeugte und projektive Moduln erlauben. Moduln aus $\mathcal{A}_n$ sind somit insbesondere endlich erzeugt, da sie eine Surjektion aus einem endlich erzeugten Modul erlauben.

Teilaufgabe a)

Behauptung:
Sei ein beliebiger A-Modul N aus $\mathcal{A}_{n+1}$ gegeben. Dann gilt:

1. *Es gibt eine kurze exakte Sequenz*
$$0 \longrightarrow Q_1 \hookrightarrow Q_0 \twoheadrightarrow N \longrightarrow 0$$
derart, dass Q_1 ein Objekt aus $\mathcal{A}_n$ und Q_0 projektiv ist.
2. *Zu jeder kurzen exakten Sequenz*
$$0 \longrightarrow Q_1' \hookrightarrow Q_0' \twoheadrightarrow N \longrightarrow 0$$
derart, dass Q_1' ein Objekt aus $\mathcal{A}_n$ und Q_0' projektiv ist, gibt es eine kurze exakte Sequenz
$$0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \oplus Q_1' \longrightarrow Q_0' \longrightarrow 0.$$

Beweis:

1. In eine nach Voraussetzung existierende projektive Auflösung von N fügen wir den Kern K der Surjektion auf N ein:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r, two heads] & N \arrow[r] & 0 \\ & & & & K \arrow[ur, hook] & & & \end{tikzcd}$$
Aus diesem Diagramm erhalten wir die kurze Sequenz
$$0 \longrightarrow K \hookrightarrow P_0 \twoheadrightarrow N \longrightarrow 0, \tag{1}$$
welche natürlich exakt ist. Wir erhalten aus dem Diagramm noch eine zweite Sequenz,
$$0 \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow K \longrightarrow 0,$$
welche ebenfalls exakt ist. Um das einzusehen, müssen wir uns nur von der Exaktheit bei P_1 und bei K überzeugen. Bei P_1 ist sie deswegen exakt, weil der Kern der Abbildung $P_1 \to K$ gleich dem Kern der Komposition $P_1 \to K \hookrightarrow P_0$ ist (denn $K \hookrightarrow P_0$ ist injektiv); dieser ist nach Voraussetzung gleich dem Bild der Abbildung $P_2 \to P_1$.

Bei K ist sie direkt deswegen exakt, weil die ursprüngliche Sequenz bei P_0 exakt ist.

Damit ist gezeigt, dass K ein Objekt aus $\mathcal{A}_n$ ist, womit die Sequenz (1) eine der gewünschten Art ist und die Behauptung folgt.

2. Als erstes ergänzen wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, dotted, "\alpha"'] & Q_0 \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, dotted, "\beta"'] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_1' \arrow[r, hook, "\iota'"'] & Q_0' \arrow[r, two heads, "\pi'"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

zu einem kommutativen Diagramm: Die Existenz einer Abbildung $Q_0 \to Q_0'$, welche das rechte Quadrat kommutativ macht, folgt direkt aus der Projektivität von Q_0. Da die Abbildung $Q_1 \to Q_0 \to Q_0'$ bei Nachschaltung mit $Q_0' \to N$ die Nullabbildung gibt, folgt die Existenz einer passenden Abbildung $Q_1 \to Q_1'$ über die Exaktheit der unteren Zeile.

Eine kurze exakte Sequenz der gesuchten Gestalt ist dann

$$0 \longrightarrow Q_1 \overset{\iota \oplus \alpha}{\longrightarrow} Q_0 \oplus Q_1' \overset{\beta - \iota'}{\longrightarrow} Q_0' \longrightarrow 0,$$

wobei die Abbildung aus der direkten Summe durch $(q_0, q_1') \mapsto \beta(q_0) - \iota'(q_1')$ gegeben sei. Die Exaktheit vorne ist wegen der Injektivität von ι klar, und einfache Diagrammjagden zeigen die Exaktheit an den anderen beiden Stellen. $\square$

Teilaufgabe b)

Sei $F(\mathcal{A}_n)$ die freie abelsche Gruppe über den Objekten aus $\mathcal{A}_n$ und sei $I(\mathcal{A}_n) \subseteq F(\mathcal{A}_n)$ das Ideal, welches von denjenigen Elementen der Form $M' + M'' - M \in F(\mathcal{A}_n)$ erzeugt wird, für die es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

gibt. Sei $G(\mathcal{A}_n) := F(\mathcal{A}_n)/I(\mathcal{A}_n)$ die Quotientengruppe. [Die mengentheoretische Zulässigkeit dieser Konstruktion diskutieren wir gleich.]

Bemerkung:
In der abelschen Gruppe $G(\mathcal{A}_n)$ gelten folgende Rechenregeln:

1. *Die Äquivalenzklasse eines Nullmoduls ist das neutrale Element der Gruppe, d. h. es gilt $[0] = 0$.*
2. *Für alle Moduln $M, N \in \mathcal{A}_n$ gilt $[M \oplus N] = [M] + [N]$.*
3. *Isomorphe Moduln geben gleiche Äquivalenzklassen.*

Beweis:

1. Ein Nullmodul 0 passt in die triviale kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0,$$

   daher gilt $[0] = [0] + [0]$ in $G(\mathcal{A}_n)$, woraus die Behauptung folgt.

2. Beliebig gegebene Moduln $M, N \in \mathcal{A}_n$ passen in die zerfällte kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \hookrightarrow M \oplus N \twoheadrightarrow N \longrightarrow 0,$$

   daher gilt $[M] + [N] - [M \oplus N] = 0$ in $G(\mathcal{A}_n)$.

3. Zueinander isomorphe Moduln $M, N \in \mathcal{A}_n$ passen in die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cong} N \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

   Somit gilt $[M] + [0] - [N] = 0$. □

Die Konstruktion von $G(\mathcal{A}_n)$ ist so wie angegeben formal nicht durchführbar: Da die Objekte aus $\mathcal{A}_n$ eine echte Klasse bilden, können wir nicht die freie abelsche Gruppe $F(\mathcal{A}_n)$ definieren. Die dritte Rechenregel der Bemerkung zeigt aber einen Ausweg auf:

Da isomorphe Moduln ohnehin gleiche Äquivalenzklassen geben, kann man $F(\mathcal{A}_n)$ auch als die freie abelsche Gruppe von Isomorphieklassen der Moduln aus $\mathcal{A}_n$ definieren. Von diesen gibt es nur Mengen-viele, da die Moduln aus $\mathcal{A}_n$ endlich erzeugt und somit bis auf Isomorphie tatsächliche Quotienten der abzählbar vielen Moduln A^k, $k \geq 0$ sind.

Behauptung:
Der Inklusionsfunktor $\mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_{n+1}$ induziert einen Isomorphismus $G(\mathcal{A}_n) \cong G(\mathcal{A}_{n+1})$.

Beweis:
Die von der Inklusion induzierte Abbildung lautet auf dem kanonischen Erzeugendensystem von $G(\mathcal{A}_n)$

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & G(\mathcal{A}_n) & \longrightarrow & G(\mathcal{A}_{n+1}) \\ & [X] & \longmapsto & [X] \end{array}$$

und ist in der Tat wohldefiniert, denn es ist unmittelbar nach Definition klar, dass sie das Ideal $I(\mathcal{A}_n)$ in das Ideal $I(\mathcal{A}_{n+1})$ schickt.

Eine Umkehrabbildung φ^{-1} definieren wir wie folgt: Sei ein beliebiger Modul $X \in \mathcal{A}_{n+1}$ gegeben. Nach der früheren Behauptung finden wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \tag{2}$$

mit $Q_1 \in \mathcal{A}_n$ und $Q_0 \in \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_n$. Folglich gilt in $G(\mathcal{A}_{n+1})$ die Rechnung $[X] = [Q_0] - [Q_1]$; wir definieren

$$\varphi^{-1}([X]) := [Q_0] - [Q_1] \in G(\mathcal{A}_n).$$

Die Differenz $[Q_0] - [Q_1]$, aufgefasst als ein Element von $G(\mathcal{A}_n)$, ist dabei unabhängig von der Wahl der kurzen exakten Sequenz (2). Denn für eine weitere kurze exakte Sequenz $0 \to Q_1' \to Q_0 \to X \to 0$ gibt es nach der früheren Überlegung eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \oplus Q_1' \longrightarrow Q_0' \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{A}_n$, weswegen in $G(\mathcal{A}_n)$ die Gleichung

$$[Q_0] + [Q_1'] = [Q_1] + [Q_0']$$

gilt. Durch Umstellen folgt die behauptete Unabhängigkeit.

Als nächstes zeigen wir die Wohldefiniert von φ^{-1}. Sei dazu eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

von Moduln aus $\mathcal{A}_{n+1}$ gegeben, wir müssen zeigen, dass $\varphi^{-1}([M']) + \varphi^{-1}([M'']) - \varphi^{-1}([M]) = 0 \in G(\mathcal{A}_n)$. Dazu erinnern wir uns an die Konstruktion der zur Definition von φ^{-1} benutzten kurzen exakten Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P'_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P'_1 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & P'_0 \arrow[r, two heads] \arrow[dd] & M' \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
 & & & & K' \arrow[ur, hook] & & & \\
0 \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & P_0 \arrow[r, two heads] \arrow[dd] & M \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
 & & & & K \arrow[ur, hook] & & & \\
0 \arrow[r] & P''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P''_1 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[d] & & P''_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 & K'' \arrow[ur, hook] & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Dabei seien die eingezeichneten projektiven Auflösungen von M' und M'' durch die Voraussetzungen an M' und M'' gegeben, und die projektive Auflösung von M sei durch das Hufeisenlemma der homologischen Algebra derart konstruiert, dass auch alle Spalten des Diagramms exakt sind.

Weiter können wir Abbildungen $K' \to K$ und $K \to K''$ zwischen den Kernen induzieren; eine einfache Diagrammjagd zeigt dann, dass die erhaltene kurze Sequenz

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \longrightarrow 0$$

ebenfalls exakt ist.

Somit gilt in $G(\mathcal{A}_n)$ die Rechnung

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}([M']) + \varphi^{-1}([M'']) - \varphi^{-1}([M]) &= [P_0'] - [K'] + [P_0''] - [K''] - [P_0] + [K] \\ &= ([P_0'] + [P_0''] - [P_0]) - ([K'] + [K''] - [K]) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Das schließt den Beweis der Wohldefiniertheit von φ^{-1} ab.

Wir bemerken, dass φ^{-1} projektive Moduln $X \in \mathcal{A}_{n+1}$ auf $[X] \in G(\mathcal{A}_n)$ schickt: Denn X erlaubt die zur Berechnung von $\varphi^{-1}([X])$ nutzbare triviale Auflösung

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\cong} X \longrightarrow 0,$$

womit also $\varphi^{-1}([X]) = [X] - [0] = [X]$ folgt.

Nun ist nur noch zu zeigen, dass φ^{-1} in der Tat eine Umkehrfunktion von φ ist, klar ist zumindest, dass φ linksinvers zu φ^{-1} ist. Sei für die andere Richtung ein beliebiger Modul $X \in \mathcal{A}_n$ gegeben; indem wir sukzessive passende kurze exakte Sequenzen finden, können wir X in $G(\mathcal{A}_n)$ als Linearkombination von (Äquivalenzklassen von) projektiven Moduln schreiben.

Die Anwendung der Komposition $\varphi^{-1} \circ \varphi$ auf $[X]$ ist dann die entsprechende Linearkombination der Bilder der projektiven Moduln unter der Komposition. Da für projektive Moduln die Umkehreigenschaft klar ist, folgt so die Behauptung. □

Teilaufgabe c)

Behauptung:
Sei $G(\mathcal{A}) := F(\mathcal{A})/I(\mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A} := \cup_{n\geq 0}\mathcal{A}_n$. Dann gilt

$$K(A) \cong G(\mathcal{A}).$$

Beweis:
Die K-Theorie $K(A)$ ist als die Grothendieckkonstruktion zum abelschen Monoid $\Phi(P(A))$ der Isomorphieklassen der Objekte aus $P(A)$, der Kategorie endlich erzeugter projektiver A-Moduln, definiert; um die Isomorphie zu zeigen, beweisen wir, dass $G(\mathcal{A})$ die entsprechende universelle Eigenschaft hat.

Dazu müssen wir einen Monoidhomomorphismus $\Phi(P(A)) \to G(\mathcal{A})$ derart angeben, dass es für jede Gruppe H und jeden Monoidhomomorphismus $\Phi(P(A)) \to H$ genau einen Gruppenhomomorphismus $G(\mathcal{A}) \to H$ gibt, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Phi(P(A)) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\iota"'] & & H \\ & G(\mathcal{A}) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutieren lässt.

Zur Definition von ι. Da $P(A)$ eine Teilklasse von $\mathcal{A}_0$ ist, können wir ι einfach über

$$\begin{array}{rrcl} \iota\colon & \Phi(P(A)) & \longrightarrow & G(\mathcal{A}) \\ & [X] & \longrightarrow & [X] \end{array}$$

definieren. Die drei weiter oben bewiesenen Rechenregeln garantieren dabei, dass diese Setzung wohldefiniert ist und dass ι ein Monoidhomomorphismus wird.

Zur Definition von $\overline{f}$. Als erstes geben wir eine Abbildung $\overline{f}_0$ an:

$$\begin{array}{rrcl} \overline{f}_0\colon & G(\mathcal{A}_0) & \longrightarrow & H \\ & [X] & \longrightarrow & f([X]) \end{array}$$

Das ist wohldefiniert, denn da jede kurze exakte Sequenz $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ in $\mathcal{A}_0$ zerfällt (da insbesondere X'' projektiv), gilt $X \cong X' \oplus X''$ und somit $f([X']) + f([X'']) - f([X]) = 0 \in H$.

Zur Definition von $\overline{f}$ sei nun ein beliebiger Modul $X \in \mathcal{A}$ gegeben. Nach Definition von $\mathcal{A}$ liegt X in einem $\mathcal{A}_i$; wir setzen

$$\overline{f}([X]) := \overline{f}_0(\varphi_i([X])),$$

wobei $\varphi_i\colon G(\mathcal{A}_i) \xrightarrow{\cong} G(\mathcal{A}_0)$ den durch wiederholte Anwendung der vorherigen Überlegung erhaltenen Isomorphismus bezeichnet. Die Ausdruck $\overline{f}_0(\varphi_i([X])) \in H$ hängt dabei nicht von der Wahl von i ab.

Zur Wohldefiniertheit von $\overline{f}$ sei eine kurze exakte Sequenz $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ in $\mathcal{A}$ gegeben, die Moduln X', X und X'' liegen dabei in irgendeinem gemeinsamen $\mathcal{A}_i$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \overline{f}([X' + X'' - X]) &= \overline{f}([X']) + \overline{f}([X'']) - \overline{f}([X]) \\ &= \overline{f}_0(\varphi_i([X'])) + \overline{f}_0(\varphi_i([X''])) - \overline{f}_0(\varphi_i([X])) \\ &= \overline{f}_0(\varphi_i([X' + X'' - X])) \\ &= \overline{f}_0(\varphi_i(0)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

das war zu zeigen.

Zur Kommutativität und Eindeutigkeit. Dass die so definierte Abbildung $\overline{f}$ das Diagramm der universellen Eigenschaft kommutieren lässt, ist klar. Die Eindeutigkeit ist auch klar, denn ein beliebiges Element aus $G(\mathcal{A})$ lässt sich als Linearkombination projektiver Moduln schreiben, und die Bilder projektiver Moduln sind durch die Kommutativitätsbedingung bereits eindeutig festgelegt. $\square$

Aufgabe 6.2

Behauptung (Fakt aus der Algebra):
Jeder endlich erzeugte Modul M über einem Hauptidealbereich A erlaubt eine projektive Auflösung der Länge 1.

Beweis:
Da M endlich erzeugt ist, gibt es eine Surjektion $A^n \twoheadrightarrow M$. Diese besitzt einen Kern K, der als Untermodul des freien Moduls A^n über dem Hauptidealbereich A wieder frei ist. Wir erhalten daher die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K \hookrightarrow A^n \twoheadrightarrow M \longrightarrow 0,$$

welche eine projektive Auflösung von M der Länge 1 ist. □

Behauptung:
Sei A ein Hauptidealbereich. Dann gilt

$$K(A) \cong \mathbb{Z}.$$

Beweis:
Zunächst ist klar, dass $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$. Denn da jeder Modul aus $\mathcal{A}$ eine Surjektion aus einem endlich erzeugten (und sogar projektiven) Modul erlaubt, sind die Moduln aus $\mathcal{A}$ endlich erzeugt und liegen nach der Vorüberlegung somit schon in $\mathcal{A}_1$.

Somit ist die gesuchte K-Theorie $K(A)$ isomorph zu $G(\mathcal{A}) = G(\mathcal{A}_1)$; letztere Gruppe wiederum ist isomorph zu $G(\mathcal{A}_0)$. Die Moduln in $\mathcal{A}_0$ sind genau die endlich erzeugten projektiven Moduln. Da A ein Hauptidealbereich ist, ist das genau die Klasse der freien Moduln endlichen Rangs. (Der Rang ist wohldefiniert, da A als Hauptidealbereich insbesondere kommutativ ist.)

Damit können wir das gesuchte Isomorphismenpaar angeben:

$$\alpha\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G(\mathcal{A}_0) \\ n & \longmapsto & n\,[A] \end{array} \qquad \beta\colon \begin{array}{ccc} G(\mathcal{A}_0) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ [\sum_i a_i X_i] & \longmapsto & \sum_i a_i \operatorname{rank} X_i \end{array}$$

In der Definition von α fassen wir dabei A als Modul über sich selbst auf. Es ist klar, dass α ein Gruppenhomomorphismus und rechtsinvers zu β ist; wir müssen aber noch zeigen, dass β wohldefiniert ist und dass $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$ gilt.

Zur Wohldefiniert genügt es zu zeigen, dass Elemente der Form $M' + M'' - M \in I(\mathcal{A}_0)$ auf null geschickt werden. Nach Voraussetzung gibt es für solche eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

die, da M'' projektiv ist, zerfällt. Somit ist M isomorph zur direkten Summe $M' \oplus M''$, und es gilt in der Tat

$$\operatorname{rank} M' + \operatorname{rank} M'' - \operatorname{rank} M = 0.$$

Zur Umkehreigenschaft sei ein beliebiges Element $[\sum_i a_i X_i] \in G(\mathcal{A}_0)$ gegeben. Diese Darstellung können wir vereinfachen:

$$\Big[\sum_i a_i X_i\Big] = \sum_i a_i [X_i] = \sum_i a_i [A^{\operatorname{rank} X_i}] = \sum_i a_i \operatorname{rank} X_i \cdot [A] = \left(\sum_i a_i \operatorname{rank} X_i\right) \cdot [A],$$

wobei die zweite und dritte Gleichheit aus der Bemerkung folgen. Somit gilt

$$\alpha\Big(\beta\Big(\Big[\sum_i a_i X_i\Big]\Big)\Big) = \left(\sum_i a_i \operatorname{rank} X_i\right) \cdot \alpha(\beta([A])) = \Big[\sum_i a_i X_i\Big]$$

und der Beweis ist abgeschlossen. $\square$