

Der Duflo-Isom. in der Lie-Theorie

k - Grundkörper der Char. 0

$\mathfrak{g}$ - Lie-Algebra, $\dim_k \mathfrak{g} < \infty$

$S\mathfrak{g} = T\mathfrak{g} / \langle x \otimes y - y \otimes x \rangle$ Symmetrische Algebra von $\mathfrak{g}$

$U\mathfrak{g} = T\mathfrak{g} / \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \rangle$ universell einhüllende Algebra von $\mathfrak{g}$

PBW-Theorem (Poincaré, Birkhoff, Witt)

$$\begin{aligned} I_{PBW} : S\mathfrak{g} &\longrightarrow U\mathfrak{g} \\ x_1 \cdots x_n &\longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

ist Isomorphismus von Vektorräumen / $\mathfrak{g}$ -Moduln

V $\mathfrak{g}$ -Modul $\leadsto V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V \mid x \cdot v = 0 \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$
 $\mathfrak{g}$ -Invarianten von V .

$I_{PBW} : (S\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \longrightarrow (U\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = Z(U\mathfrak{g})$ (Zentrum)
 ist Iso. von Vektorräumen.

Algebrenstruktur wird i. A. nicht bewahrt!

Verbesserung: Definiere Duflo-Element

$$J = \det \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}}}{\text{ad}} \right) \in \hat{S}(\mathfrak{g}^*) = \prod_{n \geq 0} S^n \mathfrak{g}$$

$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$

adjungierte Darstellung

vollständige symm. Algebra

$\hat{S}(\mathfrak{g}^*) \cong$ Differentialoperatoren ∞ -ter Ord.
 auf $S(\mathfrak{g})$ mit konst. Koeff's.

Theorem: (Duflo, $k = \mathbb{C}$)

$I_{PBW} \circ J^{1/2} : (S\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \longrightarrow Z(U\mathfrak{g})$ ist Iso. von Algebren.

$C^*(\mathfrak{g}, V) := \Lambda^*(\mathfrak{g}^*) \otimes V$ Chevalley-Eilenberg-Komplex
 von $\mathfrak{g}$ mit Werten in V .
 { Kohomologie

$H^*(\mathfrak{g}, V) = \text{Ext}_{U\mathfrak{g}}^*(k, V)$
 $\nwarrow$ triviale $\mathfrak{g}$ -Modul.

Bsp.: $H^0(\mathfrak{g}, V) = V^{\mathfrak{g}}$

Theorem: (Kontsevich, Pevzner, Torossian)

$I_{PBW} \circ J^{1/2}$ ist QIS von Komplexen

$$C^*(\mathfrak{g}, S\mathfrak{g}) \longrightarrow C^*(\mathfrak{g}, U\mathfrak{g})$$

und induziert Iso. graduierter Algebren auf Kohomologie

$$H^*(\mathfrak{g}, S\mathfrak{g}) \cong H^*(\mathfrak{g}, U\mathfrak{g})$$

Duflo-Kontsevich-Isomorphismus in der komplexen Geometrie

M - komplexe Mfgl. $\Rightarrow T^*M = T^* \oplus T^*$

$E \rightarrow M$ holomorphes Vektorbündel

$\leadsto$ DG-Algebra $A^{P,*}(M, E) = \Gamma(M, \Lambda^P(T^*)^* \otimes \Lambda^*(T^*)^* \otimes E)$

mit Differential $\bar{\partial}_E$ ($\bar{\partial}$ -Zusammenhang auf E)

$\Rightarrow$ Dolbeault-Kohomologie von E : $H^{p,q}(M, E)$

$T_{\text{poly}}^{1,*}(M, E) = \Gamma(E \otimes \Lambda^*(T'))$ E-wertige 2-Polyvektorfelder.

$D_{\text{poly}}^{1,*}(M, E)$ E-wertige 2-Polydifferentialoperatoren

$\in (C^\infty(\mathcal{L}^\infty(M), \Gamma(E)), d_H)$ Hochschild-Komplex
Unterkomplex

HKR-Theorem (Hochschild, Kostant, Rosenberg)

$$\begin{aligned} I_{\text{HKR}} : (T_{\text{poly}}^1(M, E) \otimes \mathcal{O}) &\longrightarrow (D_{\text{poly}}^1(M, E), d_H) \\ X_1 \wedge \dots \wedge X_n \otimes s &\mapsto \left(f_1 \otimes \dots \otimes f_n \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma X_{\sigma(1)}(f_1) \dots X_{\sigma(n)}(f_n) \cdot s \right) \end{aligned}$$

ist QIS von Komplexen.

Für $E = \Lambda(T'')^*$ werden

$$T_{\text{poly}}^1(M, E) = \Gamma(\Lambda^*(T'')^* \otimes \Lambda(T')) = \mathcal{A}^{0,*}(M, \Lambda(T'))$$

$$D_{\text{poly}}^1(M, E)$$

zu DG-Algebren.

Definiere Todd-Klasse td_E von hol. Bündel $E \rightarrow M$

$$\text{td}_E = \det \left(\frac{at_E}{1 - e^{-at_E}} \right),$$

wobei $at_E \in H^{1,1}(M, \text{End}(E))$

Atiyah-Klasse von E.

Theorem (Kontsevich, Calaque, Van den Bergh)

$$\begin{aligned} I_{\text{HKR}} \circ \text{td}_E^{1/2} : (T_{\text{poly}}^1(M, \Lambda(T'')^*), \bar{\partial}_{\Lambda(T')}) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow (D_{\text{poly}}^1(M, \Lambda(T'')^*), d_H + \bar{\partial}, \cup) \end{aligned}$$

ist QIS von Komplexen und induziert

Is. graduierter Algebren auf Kohomologie

$$H_{\text{HKR}}^{0,*}(\Lambda(T')) \cong H^*(D_{\text{poly}}^1(\dots), d_H + \bar{\partial})$$

$$(H^*(M, \Gamma(-, \Lambda(T'))))$$

Gravitationskohomologie

$\cong$ Hochschild-Kohomologie
des Komplexen Algeb. M